

Technical note

Effect of repair in carbonated concrete with high water/cement ratio and shallow concrete cover

E.I. Moreno, R.G. Solís-Carcaño, M. Torres-López

Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán. Av. Industrias No Contaminantes por Anillo Periférico Norte s/n. Apartado Postal 150 Cordemex, CP 97110. Mérida, Yucatán, México. Tel: +52 (999) 930-0568. Fax: +52 (999) 930-0559.

emoreno@uady.mx tulich@uady.mx

Abstract

Concrete carbonation affects the structure's service life. Even though there are well defined repair procedures, they are not widely known, thus employing a custom procedure. This investigation evaluated three repair procedures for reinforced concrete elements damaged by carbonation-induced corrosion, recreating critical conditions (high water/cement ratio and shallow concrete cover). Procedures A and B consisted in removing concrete at the rebar level (traditional procedure) before repair, adding a NaOH solution to the new concrete for procedure B. Procedure C consisted in removing contaminated concrete beyond the rebar level, placing new concrete without addition. Results show that due to the critical conditions recreated, none of the repair procedures allowed a significant increment of the structure's service life.

Keywords: Carbonation, concrete, corrosion, limestone aggregate, repair.

Nota técnica

Efecto de la reparación en concreto carbonatado de alta relación agua/cemento y bajo espesor de recubrimiento

Resumen

La carbonatación del concreto afecta la vida útil de las estructuras de concreto armado y aunque existen procedimientos de reparación definidos en manuales, por lo general se aplican procedimientos tradicionales. Esta investigación evaluó tres procedimientos de reparación de elementos de concreto armado dañados por la corrosión inducida por la carbonatación, bajo condiciones críticas (alta relación agua/cemento y poco recubrimiento). Los procedimientos A y B (técnica tradicional) consistieron en eliminar el concreto hasta la cara externa de la barra de acero y posteriormente reponerlo; en el procedimiento B se adicionó una solución de NaOH al concreto de reparación. El procedimiento C consistió en eliminar el concreto contaminado rebasando la barra de acero y su posterior reposición sin adición alguna. Los resultados mostraron que debido a las condiciones críticas utilizadas, ningún procedimiento de reparación permitió un incremento notable en la vida útil de la estructura.

Palabras clave: Agregado calizo, carbonatación, concreto, corrosión, reparación.

Introducción

El recubrimiento de concreto protege a las barras de acero de refuerzo de los agentes inicia-

dores de la corrosión; el grado de protección que le pueda dar depende principalmente de su calidad y espesor. Una de las causas por las que el

concreto deja de proteger adecuadamente al acero contra la corrosión es la carbonatación [1].

La carbonatación es la reacción de los productos hidratados del cemento con el dióxido de carbono (CO_2) existente en la atmósfera. Debido a esta reacción, el pH de la solución del poro del concreto disminuye de $>12,5$ unidades a un valor entre 8 y 9 unidades [2]. Cuando el pH del concreto ha disminuido, la barra de refuerzo pierde sus propiedades pasivas, dando paso al proceso de corrosión del acero de refuerzo.

Cuando el concreto se ha dañado, los procedimientos de reparación superficiales consisten en remover el concreto contaminado y posteriormente reponerlo; se ha observado que muchas veces la intervención no resulta satisfactoria por lo que la vida útil después de la reparación es más corta que el período transcurrido entre el término de la construcción y la necesidad de intervención.

Tradicionalmente, al reparar una estructura de concreto armado carbonatado, sólo se elimina el concreto agrietado hasta alcanzar la barra de acero; mientras que los procedimientos propuestos en los manuales establecen que se debe eliminar todo el concreto carbonatado, más allá de las barras de acero [3, 4]. Adicionalmente, debido al desconocimiento del mecanismo del deterioro que causan las cargas ambientales, en las reparaciones no se suelen utilizar concretos de buena calidad y recubrimientos adecuados. La presente investigación evaluó tres diferentes procedimientos de reparación, en la rehabilitación de elementos de concreto armado dañados por la corrosión inducida por la carbonatación, empleando concreto de alta relación agua/cemento y poco recubrimiento.

Parte experimental

Se fabricaron 9 probetas prismáticas de $15 \times 15 \times 27,5$ cm de concreto reforzadas con 3 varillas de acero corrugado de $3/8$ " de diámetro. Se utilizó una relación agua/cemento de 0,70 y un cm de recubrimiento para generar condiciones críticas de ambientes urbanos o rurales. La mezcla fue diseñada acorde al ACI, utilizando 307 kg por metro cúbico de cemento Portland ordinario de bajo nivel de álcalis ($<1\%$); el agregado pétreo

fue piedra caliza de alta absorción y nula reactividad álcali-agregado [5].

Todas las varillas fueron recubiertas en sus extremos con resina epóxica para impedir corrosión por contaminación lateral. Los especímenes fueron curados durante 28 días cubriéndolos con papel húmedo recubierto con polietileno. Posteriormente fueron acondicionados al ambiente de laboratorio por 53 días antes de iniciar el proceso de carbonatación acelerada.

Los especímenes fueron carbonatados en una cámara de aceleración utilizando 8% de CO_2 y 60% de humedad relativa [1]. Una vez que la profundidad de carbonatación había rebasado la profundidad de la barra se suspendió el proceso de carbonatación. Posteriormente las probetas fueron forradas con papel húmedo y colocadas en bolsas de polietileno para mantener la humedad alrededor del 95% y acelerar el proceso de corrosión. Durante esta etapa se realizaron mediciones periódicas de potencial de corrosión, velocidad de corrosión y resistencia eléctrica del concreto utilizando un equipo Gecorr 6, tomando como criterio para el proceso de reparación que las barras de acero alcanzaran una densidad de corriente de corrosión de $> 1,0 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ y un potencial más negativo que -350 mV (Cu/CuSO_4), valores típicos de corrosión activa [3]. Los procedimientos de reparación consistieron en: A. Remoción del concreto contaminado hasta la cara externa de las barras de acero (reparación tradicional); B. la misma reparación tradicional empleando una solución alcalina de NaOH con una concentración de 5 g/100 mL añadida al agua de la mezcla del concreto de reparación; C. Reparación con el procedimiento recomendado en manuales de reparación, consistente en la remoción del concreto contaminado más allá de las barras de acero [3, 4].

Una vez reparadas, las probetas fueron curadas por 7 días y colocadas nuevamente en la cámara de carbonatación por 37 días. Posteriormente se retiraron nuevamente las probetas, utilizando el mismo criterio y procedimiento descritos para acelerar el proceso de corrosión.

Resultados

Las Figuras 1 y 2 presentan los resultados de las pruebas electroquímicas. El efecto del avance de la carbonatación puede observarse en

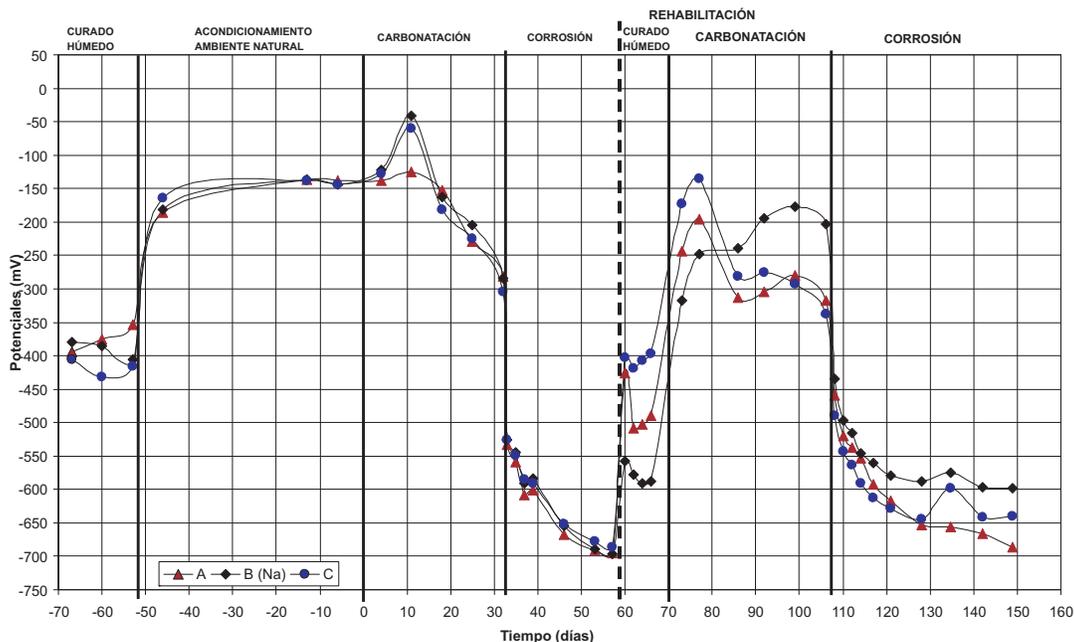


Figura 1. Promedio de potenciales, medidos con electrodo de cobre/sulfato de cobre.

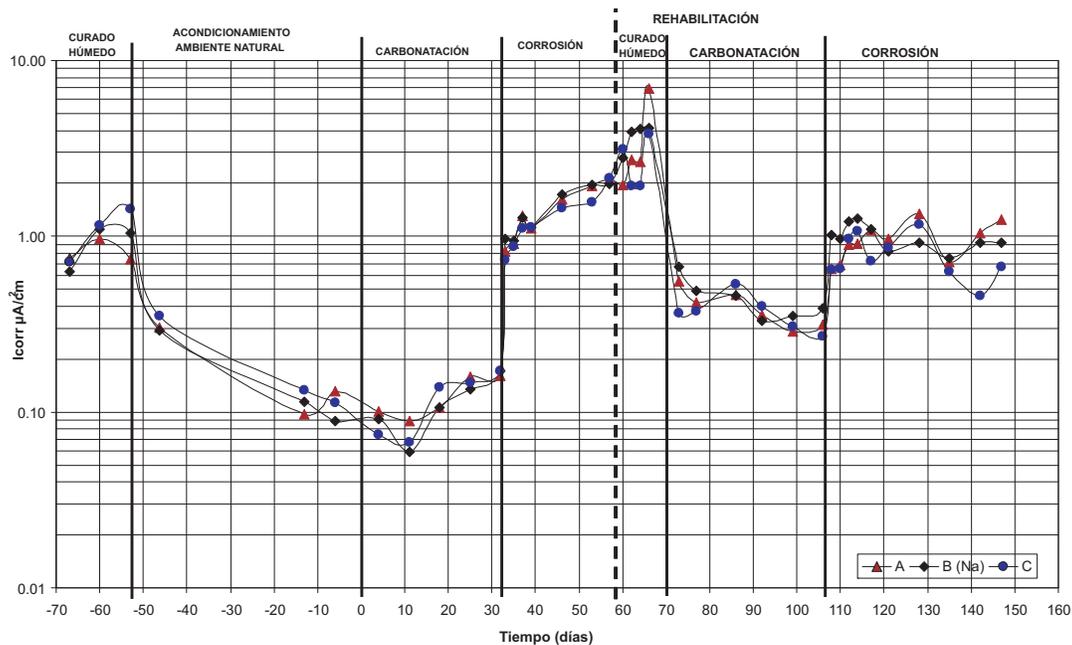


Figura 2. Promedio de densidades de corriente de corrosión.

estas figuras por el cambio de pendiente alrededor del día 11. El efecto de los procedimientos de reparación fue más apreciable en el desarrollo de los potenciales que en el de las densidades de corrosión, debido a la dispersión de los resultados de la prueba de corrosión por cambios en el mi-

croclima, así como por polarizaciones accidentales. Se observó que una vez reparada las probetas sólo el procedimiento C permitió una pasivación en el mismo rango de potenciales del curado inicial, pero por muy corto tiempo.

El procedimiento A presentó un comportamiento intermedio durante el curado húmedo posterior a la reparación, con respecto a los potenciales de media celda, 100 mV más negativos que los potenciales observados durante el curado húmedo inicial. Una vez carbonatado nuevamente, el procedimiento A presentó los potenciales más negativos tanto al final del período de carbonatación como en el período de corrosión, así como las densidades de corriente de corrosión más altas, pero sin alcanzar valores que indiquen una pasivación clara de la armadura.

El procedimiento B presentó los potenciales más negativos durante el período de reparación y curado húmedo (Figura 1), 200 mV más negativos que los potenciales mostrados durante el curado húmedo inicial. Posteriormente, el potencial medido tiene un cambio de pendiente menos pronunciado que en el caso de los procedimientos A y C, presentando también el potencial más positivo durante el período de corrosión posterior a la reparación.

Sin embargo, las ventajas observadas con el procedimiento C (mejor pasivación después de la reparación) y con el procedimiento B (potencial más positivo durante el período de corrosión posterior a la reparación), no se traducen en un comportamiento electroquímico que permitiera pronosticar un aumento de la vida útil del elemento de concreto. Esto pudiera deberse a la baja calidad del concreto utilizado y al poco recubrimiento de concreto que permitieron un fácil acceso del CO_2 y el oxígeno, facilitando el proceso de corrosión.

Conclusión

Los procedimientos de reparación A y B no lograron restablecer las condiciones originales en las barras durante el curado húmedo posterior a la rehabilitación y aún cuando por el procedimiento B la barra alcanzó potenciales menos negativos durante el proceso de carbonatación, éstos no indican una clara pasivación de la armadura. El procedimiento de reparación C logró restablecer las condiciones originales en la superficie de las barras, como era de esperarse, pero por un tiempo muy corto. Sin embargo, debido a la

baja calidad del concreto y al poco recubrimiento, ningún procedimiento mejoró notablemente el tiempo de vida útil, lo cual indica que este tipo de concreto no debería utilizarse ni siquiera en ambientes urbanos o rurales.

Referencias bibliográficas

1. Moreno E. I., Domínguez G. G., Cob E., Duarte F.: "Efecto de la relación agua/cemento en la velocidad de carbonatación del concreto utilizando una cámara de aceleración", Ingeniería, Revista Académica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán, Vol. 8, No. 2 (2004) 117-130.
2. Moreno E. I.: "Determinación del pH de la solución de los poros de concreto después de un proceso acelerado de carbonatación", Ingeniería-Revista Académica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán, Vol. 10, No. 3 (2006) 5-12.
3. Troconis O., Romero A., Andrade C., Helene P., Díaz I.: "Manual de Inspección, Evaluación y Diagnóstico de Corrosión en Estructuras de Hormigón Armado", Programa Iberoamericano de Ciencia y Tecnología para el Desarrollo, Red temática XV.B, Durabilidad de la armadura. (Maracaibo, Venezuela: CYTED, 1997), 47-54.
4. Muñoz H., Helene P., Pereira F., Hashook L.: "Procedimientos de preparación y limpieza del sustrato". En Manual de rehabilitación de estructuras de hormigón. Reparación, Refuerzo y Protección. Helene P., Pereira F. (editores), Programa Iberoamericano de Ciencia y Tecnología para el Desarrollo, Red temática XV.F. Rehabilitar. (Sao Paulo, Brasil: CYTED, 2003), 253-286.
5. Solís R. y Moreno E.: "Análisis de la porosidad del concreto con agregado calizo". Rev. Fac. Ing. Univ. Central Venezuela, Vol. 21, No. 3 (2006) 57-68.

Recibido el 10 de Enero de 2010

En forma revisada el 19 de Septiembre de 2011

A numerical study of strain localization on granular material using bifurcation theory in a hypoplastic constitutive model

Alfonso Mariano Ramos Cañón^{1*}, Arcesio Lizcano Peláez²,
Daniel Felipe Castilla²

¹Instituto Geofísico, Pontificia Universidad Javeriana. Carrera 7 N° 42-27. Bogotá, Colombia.
* a-ramos@javeriana.edu.co

²Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes. Carrera 1 N° 18-A-10, Bogotá, Colombia.

Abstract

This paper applies the bifurcation theory to an incremental non linear constitutive model on triaxial and biaxial tests for granular materials. State of stresses, void ratio and inclination of shear bands at the onset of bifurcation are obtained when the strain field loses its continuity. A PIV (Particle Image Velocimeter) analysis is performed on a drained triaxial test in order to validate experimentally the basic hypothesis of bifurcation theory, namely the discontinuity in the strain field. The orientations of shear bands on biaxial and triaxial tests calculated by means of bifurcation are compared to experimental observations. The agreement between calculations and measurements is satisfactory.

Key words: Bifurcation, sands, hypoplasticity.

Estudio numérico de la localización de la deformación en materiales granulares usando la teoría de la bifurcación en un modelo constitutivo hipoplástico

Resumen

En este artículo se aplica la teoría de la bifurcación a un modelo constitutivo incremental no lineal en ensayos biaxiales y triaxiales para materiales granulares. Del análisis de bifurcación se obtiene el estado de esfuerzos, relación de vacíos e inclinación de la banda de corte en el momento en que el campo de deformaciones deja de ser continuo. Se realiza un análisis de PIV (Particle Image Velocimeter) a un ensayo triaxial drenado con el que se pudo verificar experimentalmente la hipótesis básica de la teoría de la bifurcación (discontinuidad del campo de deformaciones). Se compara la inclinación de las bandas de corte calculadas con bifurcación en ensayos biaxiales y triaxiales con experimentación, obteniendo buenos resultados.

Palabras clave: Bifurcación, arenas, hipoplasticidad.

1. Introducción

La localización de la deformación en una zona de espesor finito de grandes esfuerzos y deformaciones por corte se conoce como banda de corte. Este fenómeno es el que gobierna la estabilidad en diferentes estructuras geotécnicas tales

como fallas de cimentaciones por capacidad portante, falla de taludes y estructuras de contención. La teoría de la bifurcación es una de las alternativas para abordar el estudio de las bandas de corte. Bifurcación, en el contexto de materiales, fue originalmente propuesta por Hill [1,2] y fue aplicada por primera vez a elastoplasticidad

por Rice y Rudnicki [3]. En este artículo se implementa la teoría de la bifurcación siguiendo la metodología de Bauer [4] en un modelo constitutivo de tipo incremental, independiente de la tasa y no lineal. La propuesta de Bauer [4] está restringida para deformación plana y es extendida para un estado de esfuerzos general. La bifurcación establece el estado del material y la inclinación de la banda de corte en el momento en que el campo de deformaciones deja de ser continuo. Se verificó la bondad de los resultados teóricos por medio de la comparación de la inclinación de las bandas de corte para 3 tipos de arenas en ensayos biaxiales realizados por [5]. La hipótesis matemática básica de la bifurcación es que al inicio de la banda de corte se presenta una discontinuidad en el campo de deformaciones. Dicha hipótesis es corroborada experimentalmente por medio del uso del PIV (Particle Image Velocimeter) en un ensayo triaxial drenado. El presente trabajo se desarrolla de la siguiente manera: En la sección 2 se describe brevemente el modelo constitutivo hipoplástico. La sección 3 explica la teoría de la bifurcación. En la sección 4 se aplica la teoría de la bifurcación a la hipoplasticidad y se explica la extensión a un estado general de esfuerzos. En la sección 5 la bifurcación es aplicada a ensayos elementales tipo biaxial y triaxial. Finalmente, en la sección 6 se aplica la técnica del PIV para obtener campos de desplazamiento en un ensayo triaxial.

2. Modelo constitutivo hipoplástico

El comportamiento constitutivo de un material granular puede ser descrito por la hipoplasticidad propuesta por von Wolffersdorff [6]. En este modelo, el comportamiento depende de unas variables de estado y por las propiedades del material que no cambian durante el proceso de carga. El estado del material está definido por los esfuerzos T y la relación de vacíos e . La forma general de la ecuación es:

$$\overset{\circ}{T} = f_s[L:D + f_d N \|D\|] \quad (1)$$

donde $\overset{\circ}{T}$ es el tensor de incrementos objetivo de Jaumman y es función del tensor de esfuerzos de Cauchy T , de la relación de vacíos e , y del tensor

de incremento de deformación D . L y N es un tensor de cuarto y segundo orden respectivamente que dependen del tensor normalizado $\overset{\circ}{T} = \frac{T}{trT}$.

Los escalares f_s y f_d dependen de la relación de vacíos y de la presión media p . La función tensorial dentro del paréntesis de la ec 1 consiste de dos partes. La primera parte es el producto interno del tensor L con el tensor D (lineal en D), en tanto que la segunda parte es no lineal en D con respecto a la norma euclideana del incremento de deformación $\|D\| = \sqrt{D:D}$. Ambas funciones son positivamente homogéneas de primer orden en D por lo que el comportamiento del material es independiente de la tasa. El modelo hipoplástico tiene 8 parámetros: ϕ_c =ángulo de fricción en el estado crítico, n = exponente del factor de barotropía, h_s = dureza granular, α y β = exponentes del factor de picnotropía, e_{io} =relación de vacíos en el estado más suelto, e_{do} = relación de vacíos en el estado más denso y e_{co} = relación de vacíos en el estado crítico. Las relaciones de vacíos (e_{io} , e_{do} , e_{co}) son definidas para una presión de referencia $p=0$. Información detallada de la capacidad del modelo hipoplástico usado en este trabajo y la calibración de los parámetros se puede encontrar en Von Wolffersdorff [6], Herle y Gudehus [7] y Bauer [8].

3. Teoría de la bifurcación aplicada a geomateriales

Una de las aplicaciones de la teoría del caos es la teoría de la bifurcación. La bifurcación es un punto de ramificación en nuevos tipos de comportamiento. Dicha ramificación usualmente es súbita en lugar de darse una evolución gradual y lenta [9]. Dixon [10] denomina bifurcación a los puntos de decisión sensitivos. Dixon dice que lejos de los puntos de decisión sensitiva un sistema se comporta bien, pero a medida que se acerca a los puntos de decisión sensitiva, las trayectorias del sistema se convierten en aleatorias e impredecibles. Estas definiciones pueden acoplarse al comportamiento geomecánico de un material cuando se presenta la banda de corte. Para ilustrar los anteriores conceptos en un marco de geomateriales, se presenta en la Figura 1 el resultado experimental de un ensayo biaxial no drenado en arcilla [11].

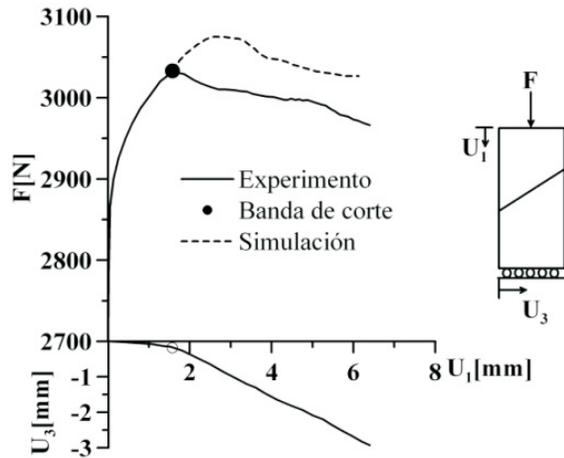


Figura 1. Resultados experimentales de un ensayo biaxial no drenado (Adaptado de Lizcano et al. [11]).

En la parte superior se observa la fuerza vertical con respecto al desplazamiento vertical. Abajo se muestra el desplazamiento horizontal del cuerpo inferior con respecto al desplazamiento vertical. Claramente se observa un punto de inestabilidad. Este punto está asociado con un incremento súbito en la respuesta del material.

La modelación constitutiva en geomecánica se basa en que el campo de deformación y de esfuerzos es uniforme en toda la muestra. Sin embargo, después que se presenta la banda de corte, la deformación deja de ser homogénea y la modelación constitutiva ya no es válida. En la Figura 1 se muestra la forma como difiere lo que daría una modelación constitutiva (líneas a trazos) con el resultado experimental. En el caso de un ensayo biaxial, se presentan dos campos de desplazamientos diferentes para el cuerpo superior e inferior separados por la banda de corte. Los dos cuerpos se comportan prácticamente como cuerpos rígidos. La teoría de la bifurcación aplicada a la geomecánica permite tener un criterio matemático para detectar el momento en que las simulaciones numéricas, tanto a nivel elemental, como de elementos finitos, no cumplen con las premisas básicas de la teoría del medio continuo. De esta manera, las simulaciones dejan de tener validez. Las condiciones estáticas y cinemáticas para la teoría de la bifurcación se pueden condensar de la siguiente manera: Considere una muestra inicialmente homogénea que

está siendo deformada hasta un estado de esfuerzos y de relación de vacíos (T, e). Se examina el momento en que la ecuación constitutiva (deformaciones homogéneas) permite un campo alternativo no uniforme de deformaciones para las cuales el gradiente de velocidad tiene un salto a través de un plano de discontinuidad S [2, 3].

$$[[\nabla v]] = \nabla v^+ - \nabla v^- \neq 0 \quad (2)$$

(.)⁺ y (.)⁻ indica cantidades sobre los dos lados separados por la normal n al plano de discontinuidad S (Figura 2). $[[.]]$ indica el salto de alguna cantidad a través de la discontinuidad. Las condiciones de compatibilidad cinemática para un plano de discontinuidad requieren que no se presenten espacios ni traslapes, es decir $[[v]] = 0$ [2]. El plano de discontinuidad o la banda de corte está limitado por dos planos de discontinuidad paralelos $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ (Figura 2).

La superficie de discontinuidad S se puede expresar por una expresión genérica en función del sistema coordenado

$$z(x) = 0 \quad (3)$$

Si el salto de gradiente de velocidad se hace cero, la siguiente expresión es válida

$$\left[\left[\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \right] dx_i = 0 \quad (4)$$

Dado que dx_i está en S , el diferencial completo debe ser igual a cero [1, 12, 13]

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad \text{o} \quad g_k n_i dx_i = 0 \quad (5)$$

donde n_i es el vector normal a S en x_i y g_k puede ser interpretado como el vector que representa la orientación de la evolución de la banda de corte. Combinando las ec. (4) y (5) se obtiene:

$$\left(\left[\left[\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \right] - g_k n_i \right) dx_i = 0 \quad (6)$$

La ecuación (6) entonces establece que

$$\left[\left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] \right] = [[\nabla v]] = g \otimes n \neq 0 \quad (7)$$

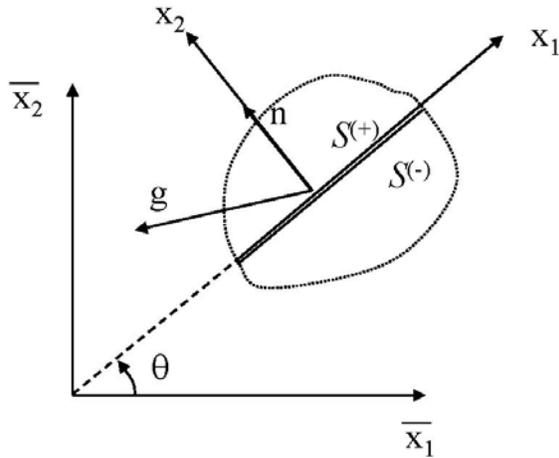


Figura 2. Orientación de la banda de corte.

Si se usa el teorema de Cauchy, el incremento del vector de esfuerzo a ambos lados de la discontinuidad son $\dot{t}^+ = \dot{T}^+n$ y $\dot{t}^- = \dot{T}^-n$. Por continuidad, el salto del vector de esfuerzo a través de la discontinuidad debe ser cero [3] o lo que es equivalente

$$[[\dot{T}]]n = 0 \tag{8}$$

4. Bifurcación aplicada a la hipoplasticidad

El salto en el incremento de esfuerzos en la ec (8) se puede relacionar con el incremento de esfuerzos de Jaumann

$$[[\dot{T}]]n = \left[[[\dot{T}]] + [[W]]T - T[[W]] \right]n = 0 \tag{9}$$

donde \dot{T} es la respuesta del modelo hipoplástico y W es el tensor spin. El incremento de esfuerzos a cada lado de la discontinuidad es:

$$\dot{T}^+ = f_s [L:D^+ + f_d N \|D^+\|] \tag{10}$$

$$\dot{T}^- = f_s [L:D^- + f_d N \|D^-\|] \tag{11}$$

Los valores de f_s, f_d, L y N en las ec (10) y (11) son iguales a los dos lados de la discontinuidad en el estado de bifurcación. Por lo que el salto se obtiene como:

$$[[\dot{T}]] = f_s [L:[D^+ - D^-]] + f_s f_d N [\|D^+\| - \|D^-\|] \tag{12}$$

$$[[\dot{T}]] = f_s L: [[D]] + f_s f_d N \lambda \tag{13}$$

donde $[[D]]$ es el salto del tensor de incrementos de deformación y λ es la norma euclidea del tensor de deformación en la superficie de discontinuidad.

$$\lambda = [\|[[D]]\|] = \sqrt{D^+ - D^+} - \sqrt{D^- - D^-} \tag{14}$$

Reemplazando la ec (13) en la ec (9) conlleva a la ecuación fundamental para análisis de bifurcación en hipoplasticidad.

$$f_s (L: [[D]])n + f_s f_d N \lambda n + [[W]]Tn - T[[W]]n = 0 \tag{15}$$

El salto del tensor de incremento de deformación y el tensor spin están relacionados con el salto del gradiente de velocidad (ec 7)

$$[[D]] = D^+ - D^- = \frac{[g \otimes n + n \otimes g]}{2} \tag{16}$$

$$[[W]] = W^+ - W^- = \frac{[g \otimes n - n \otimes g]}{2} \tag{17}$$

La desigualdad $|\lambda| \leq \gamma$ es válida independiente de D^+ y D^- [12], donde

$$\gamma = \|D^+ - D^-\| = \sqrt{[[D]]: [[D]]} \tag{18}$$

La ec (14) es positiva homogénea de primer orden con respecto a g y consecuentemente es independiente de la tasa, por lo que $[[D]]$ es arbitrario y puede ser $1 S^{-1}$ [12]. Así que

$$|\lambda| \leq \gamma = 1 \tag{19}$$

Ahora se orientará la banda de corte con un sistema coordenado local con x_2 normal al plano de discontinuidad relativo a un sistema de coordenadas global \bar{x} (Figura 2). θ es el ángulo entre \bar{x}_1 y x_1 . Con respecto al sistema de coordenadas local, los componentes del vector g y n son

$$[g] = [g_1, g_2, g_3]^T \tag{20}$$

$$[n] = [0, 1, 0]^T \tag{21}$$

Los componentes de esfuerzo en el sistema coordenado \bar{x} y x se relacionan por la transformación

$$[T] = [Q][\bar{T}][Q^T] \quad (22)$$

donde Q es la matriz de transformación y depende de la inclinación de la banda de corte θ .

Si se reemplaza $[T]$, $[g]$ y $[n]$ en la ecuación 15 se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas con la siguiente representación matricial

$$[K(f_s, \bar{T}, \theta)][g] = f_s f_d \lambda [r(\bar{T}, \theta)] \quad (23)$$

Se puede ampliar de deformación plana a un análisis en 3 dimensiones si el vector unitario n (ec. 21) se expresa en coordenadas esféricas como:

$$[n] = [\cos \psi, \sin \psi \cos \theta, \sin \psi \sin \theta]^T$$

En la ecuación (23), la matriz $[K]$ es definida positiva en el régimen de endurecimiento por lo que la inversa $[K]^{-1}$ existe. Si se despeja el vector g tenemos que

$$[g] = f_s f_d \lambda [K]^{-1} \quad (24)$$

Como se impuso que $\gamma = 1$, de la ecuación (18) se tiene para deformación plana

$$\gamma = \sqrt{[D]:[D]} = \sqrt{\frac{g_1^2 + 2g_2^2 + g_3^2}{2}} = 1 \quad (25)$$

que es lo mismo a

$$g_1^2 + 2g_2^2 + g_3^2 - 2 = 0 \quad (26)$$

Para deformación plana se tiene una ecuación para la inclinación de la banda de corte con $w = \tan \theta$ (Figura 2)

$$f(\theta) = b_4 w^8 + b_3 w^6 + b_2 w^4 + b_1 w^2 + b_0 = 0 \quad (27)$$

Los coeficientes b_4, \dots, b_0 en la ecuación (27) son funciones del estado actual (\bar{T}, e) y el escalar λ . Al comienzo de la etapa de carga, la ecuación (27) no tiene soluciones reales, es decir no se ha presentado la localización de la deformación. A medida que progresa la carga, se encuentra la solución de la ecuación (27), es decir, la inclinación

de la banda de corte y se puede encontrar el vector g con la ecuación (24). El ángulo entre el plano de la banda de corte y el vector g es la dilatación v [14]. Cuando se amplía el análisis a un estado de esfuerzos general, se llega a una ecuación del tipo (ec 26) igual a cero, donde las incógnitas son los ángulos $[\psi, \theta]$ en coordenadas esféricas para cada paso de carga. En este caso, dada la complejidad de la ecuación, se procedió a discretizar $[\psi, \theta]$ en cada paso de carga. Por lo que se barre todos los posibles valores de ángulos. Cuando la ecuación se hace por primera vez cero, se encuentra el punto de bifurcación. Es importante mencionar que el modelo hipoplástico seleccionado no tiene en su formulación una longitud característica por lo que con el presente análisis de bifurcación no se puede determinar el espesor de la banda de corte.

5. Teoría de la bifurcación aplicada a ensayos elementales

Los ensayos elementales son usados para la validación de modelos constitutivos. Una de las principales características de los ensayos elementales es que la deformación debe ser homogénea en la muestra. Deformación homogénea significa que la muestra debe tener un único campo de esfuerzos y deformaciones. En el momento en que se localiza la deformación en una banda de corte, se generan al menos dos diferentes campos de deformaciones a ambos lados de la banda. En este aparte se aplicará la teoría de la bifurcación a ensayos tipo biaxial y triaxial y se compara la modelación matemática de la bifurcación con resultados experimentales. Bifurcación aplicada a la hipoplasticidad en condiciones planas de deformación ha sido reportada por Herle [15] y Bauer y Huang [16].

5.1. Ensayos biaxiales

En la Tabla 1 se presenta la inclinación de la banda de corte en ensayos biaxiales en condición drenada para diferentes arenas y se comparan los resultados con las reportadas por Yoshida *et al.* [5]. Los parámetros hipoplásticos de las arenas usadas en las simulaciones se presentan en la Tabla 2

Los subíndices en la Tabla 1 corresponden al esfuerzo de confinamiento en cada ensayo en

Tabla 1
Análisis de bifurcación para obtener la inclinación de la banda de corte

Arena	Karlsruhe	Hostun	Toyoura
e_o	0,62	0,62	0,69
θ_{80}^m	59,0	63,0	66,0
θ_{80}^c	60,21	62,69	61,7
e_o	0,63	0,65	0,66
θ_{400}^m	58,0	58,0	66,0
θ_{400}^c	59,3	60,1	61,1

Tabla 2
Parámetros hipoplásticos reportados por Herle [15]

Arena	Karlsruhe	Hostun	Toyoura
ϕ_c	30	31	30
h_s	5800	1000	2600
n	0,28	0,29	0,27
e_{do}	0,53	0,61	0,61
e_{co}	0,84	0,96	0,98
e_{io}	1,00	1,09	1,10
α	0,13	0,13	0,18
β	1,03	2,04	1,08

kPa. Para cada ensayo se presenta la relación de vacíos inicial de la muestra e_o , el ángulo de inclinación de la banda de corte θ_m medido por Yoshida *et al.* [5] y el ángulo de inclinación calculado en este trabajo θ_c . Se observa que existe una buena concordancia entre la inclinación de la banda de corte calculada y la medida en experimentos realizados por Yoshida *et al.* [5]. En forma general se observa que las diferencias son menores a 5 grados, a excepción de la arena de Toyoura. La arena de Toyoura tiene un diámetro medio ($d_{50}=0,16$ mm) menor al de la arena de Hostun ($d_{50}=0,35$ mm) y al de la arena de Karlsruhe ($d_{50}=0,40$ mm). La influencia del diámetro promedio de las partículas no puede ser tenido en cuenta en las simulaciones ya que el modelo constitutivo usado en este trabajo se basa en el continuo convencional

o continuo de Boltzmann. Se puede esperar mejores resultados en los cálculos si se utiliza el continuo de Cosserat [17, 18]. El continuo de Cosserat tiene en su formulación una longitud característica, por lo que el tamaño de las partículas tiene influencia en los resultados. Se ha verificado desde el punto de vista micromecánico que la evolución de las bandas de corte está íntimamente relacionado con la posibilidad de rotación de las partículas [19]. Entre mayor es el diámetro de las partículas, es más difícil que estas roten para unas condiciones de esfuerzo y deformación dadas por lo que la aparición de una banda de corte se dificulta cuando el diámetro promedio de la partícula aumenta.

La aplicación de la teoría de la bifurcación con el modelo constitutivo hipoplástico es capaz

de capturar la influencia de la presión de confinamiento con la inclinación de la banda de corte. El ángulo de inclinación de la banda de corte es menor con el aumento en la presión de confinamiento, lo que está de acuerdo con lo observado en experimentos [5].

5.2. Ensayos triaxiales

En la Figura 3 se presenta el resultado experimental de un triaxial drenado en la arena de Hostun con relación de vacíos inicial $e_o = 0.616$ y esfuerzo de confinamiento $\sigma_c = 60$ kPa realizado en [20]. Se muestra además la simulación con un modelo constitutivo hipoplástico y el estado de esfuerzos donde se cumple el criterio de bifurcación. Además se presenta la tomografía realizada por [20] en el ensayo. La curva esfuerzo deformación simulada presenta buena concordancia con la del experimento hasta el punto de esfuerzo máximo (Figura 3).

El criterio de bifurcación dado por la ec 15 es satisfecho a una deformación axial de 3.6% y la inclinación de la banda de corte es de 62.35° . La Figura 3 muestra que la inclinación de la banda de corte del ensayo no es un plano único. Se observan dos ángulos (52° y 62°). Resultados similares han sido reportados por Okubo *et al.* [21], Finno *et al.* [22] y Besuelle *et al.* [23]. La suposición de la bifurcación en cuanto a que la banda de corte es un plano único puede tener alguna limitación ya que las condiciones de contorno del experimento afectan la forma y número de bandas de corte. Desrues y Viggiani [24] reportan un

amplio rango de patrones de localización para ensayos triaxiales con diferentes condiciones de borde de las placas. Sin embargo no es posible obtener una relación unívoca entre las condiciones de borde y las características de las bandas de corte. Por lo tanto, es necesario desarrollar investigación adicional en este sentido.

6. Seguimiento de los desplazamientos con PIV

La Figura 4 presenta el experimento y la simulación de un triaxial drenado en la arena del Guamo ($e_o = 0.45 - \sigma_c = 200$ kPa). Arias [25] y Patiño [26] han obtenido los parámetros de la arena del Guamo, sin embargo la granulometría de la arena en este ensayo es diferente a la utilizada por Arias [25] y Patiño [26]. Por lo que los parámetros se calibraron con base en este ensayo tratando que la modelación se ajuste hasta el esfuerzo pico. Cuando el modelo constitutivo llena los requisitos para el criterio de bifurcación, la deformación comienza a ser no homogénea dado que se presenta un salto en la deformación $[[D]]$ y la modelación constitutiva deja de ser válida. Por lo anterior, si se encuentra que el criterio de bifurcación se satisface antes que se llegue al esfuerzo pico, la modelación constitutiva y los parámetros obtenidos con este ensayo son válidos (Figura 4).

Una vez calibrados los parámetros hipoplásticos se realizó el análisis de bifurcación. El criterio de bifurcación se cumple a una deformación axial del 4.4% (Figura 4). Durante la ejecu-

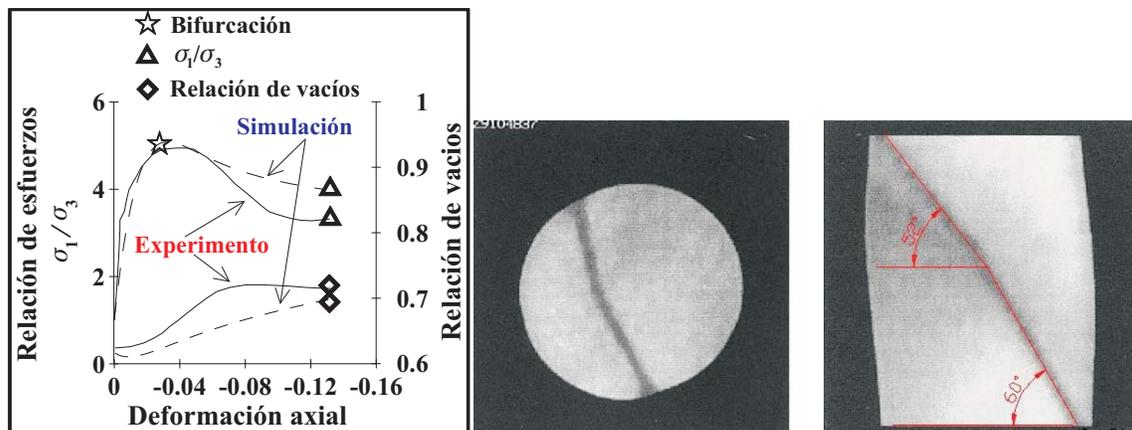


Figura 3. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun. Experimento [20] y simulación. Banda de corte en el experimento triaxial. Corte transversal a una altura de 72 mm (izquierda) y en un corte longitudinal (derecha) [20]. Ángulo de inclinación de la banda de corte.

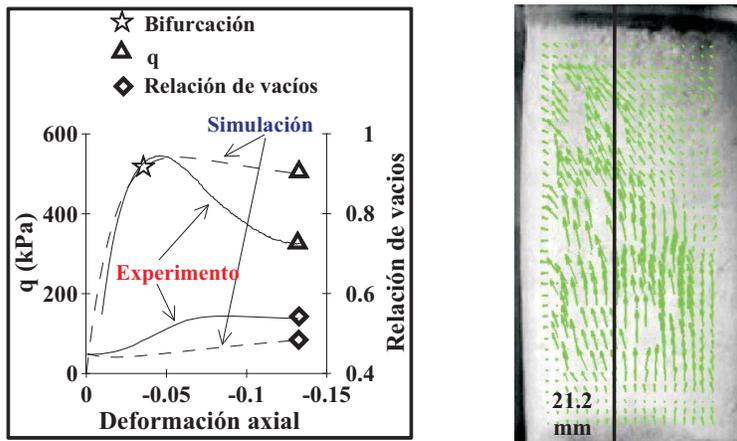


Figura 4. Ensayo triaxial drenado en la arena del Guamo. Experimento, modelación y punto de bifurcación. Vectores de desplazamiento para el ensayo triaxial drenado $\varepsilon_1=4.4\%$

ción del ensayo de la Figura 4, se utilizó la técnica de análisis de PIV (*Particle Image Velocimeter*) para obtener vectores de desplazamiento a lo largo del ensayo. Con los vectores de desplazamiento se puede calcular el tensor de deformaciones y se tiene la posibilidad de corroborar experimentalmente la validez de la hipótesis de la bifurcación continua (ec 7) establecida como que el salto del gradiente del campo de velocidades es cero en alguna parte de la muestra.

PIV es una herramienta poderosa para visualizar desplazamientos de un cuerpo granular. PIV fue desarrollado originalmente para visualizar campos de flujo de líquidos y gases [27, 28]. Nubel y Gudehus [29] y Nubel [30] fueron pioneros en utilizar esta técnica con aplicaciones en geomecánica. Esta técnica se basa en comparar dos imágenes en dos tiempos t_1 y t_2 para determinar el campo de desplazamiento y de velocidad de un área analizada mediante el principio de rastrear las partículas por su textura en la imagen. Debido a la exposición a la luz, cada área de interrogación tiene una matriz de intensidad que representa un patrón. Si la deformación del cuerpo granular entre dos imágenes consecutivas es suficientemente pequeña se puede suponer que las características de las matrices de intensidad en cada área interrogación no cambian substancialmente, únicamente la ubicación. Por lo que se puede determinar un vector local de desplazamiento entre dos imágenes consecutivas [30]. Las imágenes digitales se procesaron con el programa de computador URAPIV, desarrollado por Gurka *et al.* [31].

La Figura 4 presenta los vectores de desplazamiento en el momento de la bifurcación. Con base en los vectores de desplazamiento se puede reconstruir el tensor gradiente de desplazamiento para diferentes intervalos de tiempo. El tensor gradiente de desplazamiento que se obtiene es en la descripción Euleriana. En un corte vertical de la muestra triaxial a 21,2 mm (Figura 4) se calculó la norma del gradiente de U ($\|\nabla U\|$) para cada área de interrogación y se graficó en función de la altura de la muestra para diferentes niveles de deformación axial del ensayo triaxial (Figura 5).

En la Figura 5 se observa que para deformaciones axiales cercanas al punto donde se cumplió el criterio de bifurcación, ($\varepsilon_1=4.4\%$, Figura 4) se presenta un comportamiento anómalo en la norma del gradiente de U ($\|\nabla U\|$) a una altura de la muestra entre 80 y 90 mm. Aproximadamente a esta altura afloró la banda de corte en el ensayo triaxial. Estos resultados permiten inferir que se presenta un comportamiento en términos de gradiente de desplazamiento muy diferente al que se tiene a otras alturas de la muestra. Según la hipótesis matemática para la bifurcación continua en una discontinuidad débil, existe un salto en el gradiente de desplazamientos en el momento en que se cumple el criterio de bifurcación (ec 15). Este salto se ve reflejado como una anomalía fuerte en el análisis del campo vectorial obtenido con el PIV. De los resultados anteriores se podría inferir que la técnica de seguimiento del campo de desplazamiento (PIV) entrega la posibilidad de corroborar experimentalmente las hipó-

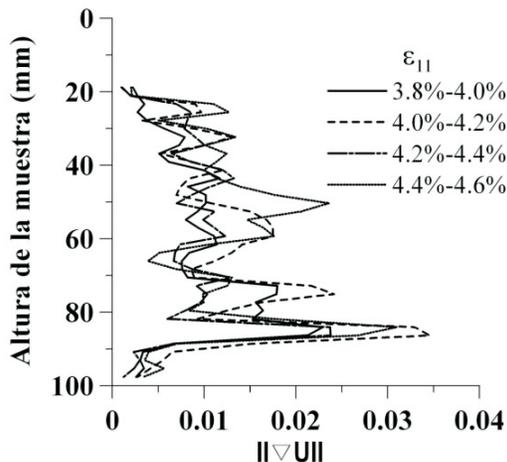


Figura 5. Norma del tensor gradiente del campo vectorial de desplazamientos para un corte a 21,2 mm para diferentes niveles de deformación axial en el triaxial drenado de la Figura 4.

tesis básicas de la teoría de la bifurcación aplicada a geomateriales.

7. Conclusiones

La inclinación de las bandas de corte obtenidas por la teoría de la bifurcación aplicada a un modelo constitutivo hipoplástico muestra una buena concordancia con los experimentos en ensayos biaxiales. Se observa alguna discrepancia en la inclinación de la banda de corte en el ensayo triaxial. Lo anterior se puede deber a que en el triaxial se observan dos inclinaciones de la banda de corte, contrario a la suposición de un único plano que establece la teoría de la bifurcación.

El análisis de los resultados que entrega el PIV muestra que se puede confirmar la hipótesis de la teoría de la bifurcación aplicada a geomateriales, es decir que existe un salto en el gradiente del campo vectorial de desplazamiento en el momento en que el criterio de bifurcación se satisface.

Agradecimientos

El primer autor expresa sus agradecimientos a Colciencias-Icetex, a CEiBA Complejidad - Centro de excelencia en Investigación Básica y Aplicada por el soporte económico para el desarrollo del presente trabajo.

Referencias bibliográficas

1. Wu, W., Sikora, W. "Localized bifurcation in hypoplasticity", *International Journal of Engineering Science*. Vol 29. No 2. (1991) pp.195-201
2. Hill, R. "Acceleration waves in solids", *Journal of Mechanics Physic Solids*. Vol 10. (1962). pp.1-16.
3. Rice, J., Rudnick, J. "A note on some features on the theory of localization of deformation", *International Journal of Solids and Structures*. Vol 16. (1980). pp 597-605.
4. Bauer, E. "Analysis of shear band bifurcation with a hypoplastic model for a pressure and density sensitive granular material", *Mechanics of materials*. Vol 31. (1999). pp. 597-609.
5. Yoshida, T., Tatsuoka, F., Siddiquee, M., Kamagai, Y., Park, C. "Shear banding in sands observed in plane strain compression", *Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*. Eds. R. Chambon, J. Desrues, I. Vardoulakis (1994) Balkema, pp. 165-179.
6. Von Wolfersdorff, P., "A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface", *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*. Vol 1 No 3. (1996). pp. 251-271.
7. Herle, I., Gudehus, G. "Determination of parameters of a hypoplastic constitutive model from properties of grain assemblies", *Mechanics of cohesive frictional matter* Vol 4. (1999). pp. 461-486.
8. Bauer, E., "Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials", *Soils and Foundations*. Vol 36. No 1. (1996). pp. 13-26.
9. Barrow, J., Tipler, J. "The anthropic cosmological principle", (1988). Oxford University Press.
10. Dixon, D. "Non-Deterministic Chaos", *Institute for Geophysics and Planetary Physics*. (1993). University of California.
11. Lizcano, A., Vardoulakis, I., Goldsheider, M. "Biaxial test on normally, anisotropically consolidated kaolin clay", *Deformation and progressive failure in geomechanics*. Eds A.

- Asaoka, T. Odachi, F. Oda, Pergamon. (1997). pp. 223-228.
12. Zicora, Z. "Hypoplastic flow of granular materials: A numerical approach", Publication series of the Institute of Soils mechanics and Rock Mechanics, Karlsruhe University, (1992). Alemania.
 13. Vardoulakis, I., Sulem, J. "Bifurcation analysis in geomechanics", Blackie academic & professional. (1995). Chapman y Hall.
 14. Vardoulakis, I. "Scherfugenbildung in Sandkorpen als Verzweigungsproblem", Publication series of the Institute of Soils mechanics and Rock Mechanics, Karlsruhe University, (1977). Alemania.
 15. Herle, I. "A relation between parameters of a hypoplastic constitutive model and grain properties", Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rocks. Eds A. Asaoka, T. Odachi, F. Oda, Pergamon. (1998). pp. 91-98.
 16. Bauer, E., Huang, W. "The dependence of shear banding on pressure and density in hypoplasticity", Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rocks. Eds A. Asaoka, T. Odachi, F. Oda, Pergamon. (1998). pp. 81-90.
 17. Cosserat, E., Cosserat, F. "Theorie des Corps Deformables", Ed. Hermann, Paris.
 18. Eringen, A. "Fracture", Volumen II Mathematical fundamentals. Theory of micropolar elasticity. Londres, (1968). Academic Press.
 19. Iwashita, K., Oda, M. "Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element method" Powder Technology. Vol 109 N° 1. (2000). pp. 192-205.
 20. Desrues, J., Chambon, R., Mokni, M., Mazerolle, F. "Void ratio evolution inside shear bands in triaxial sand experiments studied by computed tomography", Géotechnique, Vol 46. No 3. (1996). pp. 529-546.
 21. Okubo, S., Fukui, K., Hashiba, K. "Development of a transparent triaxial cell and observation of rock deformation in compression and creep test" International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 45. No 3. (2008). pp 351-361.
 22. Finno, R., Harris, W., Money, M., Viggiani, G. "Shear bands in plane strain compression of loose sand" Géotechnique, Vol 47. No 1. (1997). pp 149-165.
 23. Besuelle, P., Desrues, J., Raynaud, S. "Experimental characterisation of the localisation phenomenon inside a Vosges sandstone in a triaxial cell" International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 37. No 8. (2000). pp. 1223-1237.
 24. Desrues, J., Viggiani, G. "Strain localization in sand: overview of the experiments in Grenoble using stereo photogrammetry" International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol 28. No 4. (2004). pp. 279-321.
 25. Arias, P. "Modelo de comportamiento de suelos granulares: Estudio y determinación de sus parámetros", Tesis de Maestría en Ingeniería. Universidad de Los Andes. (2006). Bogotá.
 26. Patiño, J. "Parámetros hipoplásticos de la Arena del Guamo, Colombia", Tesis de Maestría en Ingeniería. Universidad de Los Andes. (2006). Bogotá.
 27. Adrian, R. "Scattering particle characteristics and their effect on pulsed laser measurements of fluid flow: speckle velocimetry vs particle image velocimetry", Applied Optics, Vol 23. No 11. (1984). pp.1690-1691.
 28. Adrian, R. "Particle-Imaging Techniques for Experimental Fluid Mechanics", Annual reviews in fluid mechanics, Vol 23. No 1. (1991). pp. 261-304.
 29. Nubel, K., Gudehus, G. "Evolution of localized shearing; dilation and polarization in grain skeletons", Powders and grains. Eds. Kishino.(2001). Balkema.
 30. Nubel, K. "Experimental and numerical investigation of shear localization in granular material", Publication series of the Institute of Soils Mechanics and Rock Mechanics, Karlsruhe University, (2002). Alemania.
 31. Gurka, R. Liberzon, A., Hefetz, D., Rubinstein, D., Shavit, U. "Computation of Pressure Distribution Using PIV Velocity Data", Proceedings of the 3rd International Workshop on Particle Image Velocimetry. (1999). Santa Barbara. California.

Recibido el 26 de Junio de 2010

En forma revisada el 2 de Mayo de 2011