

# Robust fault detection in uncertain polytopic linear systems

Addison Ríos-Bolívar<sup>1</sup> y Wilber Acuña-Bravo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Sistemas de Control. Tel. +58 274.240.28.47. ilych@ula.ve

<sup>2</sup>CEMISID, Tel. +58 274.240.29.14. wilber@ula.ve.

Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes. Mérida 5101, Venezuela. Fax 274.240.28.11

## Abstract

This paper presents a novel approach for robust fault detection and isolation filter design, based on modified  $\mathcal{H}_2$ - $\mathcal{H}_\infty$  performance conditions, which are described as LMIs. In order to synthesize the residual generation scheme, some theoretical results are shown for systems with perturbation signals and subjected to parametric uncertainty. The uncertainty parameters are supposed to belong to a polytope. The extended  $\mathcal{H}_2$ - $\mathcal{H}_\infty$  conditions are obtained by means of the well known projection lemma. Fault detection and isolation are done by using a filters bank (i.e. multifiltering) based on Luenberger's observer and one filter is obtained for each fault. Performance of the proposed synthesis technique is illustrated by a numerical example.

**Key words:** Fault diagnosis, robust control, linear matrix inequalities (LMI),  $\mathcal{H}_2$ - $\mathcal{H}_\infty$  norms.

## Detección robusta de fallas en sistemas lineales con incertidumbres politópicas

### Resumen

Considerando los sistemas lineales invariantes en el tiempo (*Linear Time-Invariant Systems*, LTI) continuos con incertidumbres politópicas, esta contribución presenta un método para la síntesis de filtros robustos de detección y diagnóstico de fallas. El método está basado en condiciones de desempeño modificadas, establecidas a partir de las normas  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$ , las cuales se describen como desigualdades matriciales lineales (*Linear Matrix Inequalities*, LMIs). La generación de los residuos, producto de los filtros robustos, se obtiene aplicando esas condiciones modificadas sobre los sistemas con perturbación desconocidas y sujetos a incertidumbres. Los parámetros inciertos se suponen que pertenecen a un politopo. Las condiciones de desempeño  $\mathcal{H}_2$ - $\mathcal{H}_\infty$  extendidas se obtienen por medio del lema de proyección. El diagnóstico de las fallas se alcanza en primer lugar, estableciendo condiciones, extendidas también, de detectabilidad y aislamiento. En segundo lugar, si esas condiciones se satisfacen, se diseña un banco de filtros, es decir, por multifiltraje, basado en observadores de Luenberger. Para cada falla objeto de separación, se diseña un filtro. Para ilustrar los resultados y el desempeño del multifiltraje, se presenta además, un ejemplo numérico.

**Palabras clave:** Diagnóstico de fallas, control robusto, desigualdades matriciales lineales (LMI), normas  $\mathcal{H}_2$ - $\mathcal{H}_\infty$ .

### 1. Introducción

Actualmente, los sistemas de detección y diagnóstico de fallas (*Fault Detection and Isolation*, FDI) han sido un campo de investigación

muy activo. Este hecho es reforzado por la complejidad de los procesos industriales que demandan condiciones de operación más seguras y confiables. Fundamentalmente, un sistema de FDI se compone de tres elementos: a) un mecanismo

de generación de residuos, b) un componente para la evaluación de los residuos y, c) un mecanismo de toma de decisiones. De esos tres elementos, el más crítico es el sistema de generación de residuos, ya que provee las bases para el diagnóstico y las tomas de decisiones correspondientes.

Un mecanismo de generación de residuos es la Redundancia Analítica (RA), que consiste en el uso de modelos para reproducir el comportamiento del componente o sistema bajo evaluación. Los residuos se generan por la diferencia entre señales del sistema real y las producidas por su contraparte redundante. En la RA, cuando el modelo de diagnóstico toma en consideración las señales de perturbación y las incertidumbres, entonces se trata de un problema de detección robusta de fallas (DRF). A partir de la RA, una técnica para la generación de residuos consiste en diseñar observadores de Luenberger [1, 2]. Esta técnica es muy útil en el marco de los sistemas LTI. Su principal inconveniente es lo determinístico del modelo, el cual no maneja señales de perturbación e incertidumbres. Sin embargo, se pueden hacer algunas modificaciones al observador original de tal manera de establecer condiciones de desempeño robusto a ser satisfechas. Así, algunos métodos han sido presentados en Frisk *et al.* [3], con el fin de sobrellevar el problema de robustez en la generación de los residuos. En ese mismo sentido, una técnica de tolerancia a fallas para esta clase de sistemas es presentada en Rodrigues *et al.* [4] y que se referencia como la detección de fallas en  $\mathcal{H}_2$ - $\mathcal{H}_\infty$ . De igual manera, el problema es tratado [5, 6] para los sistemas con incertidumbres politópicas. En todos estos casos, no se definen condiciones características para la detectabilidad y la separabilidad de las fallas. Por el contrario, en Bokor y Balas [7] se presenta una revisión y solución formal, considerando solamente el caso de los sistemas lineales variantes en parámetros (*Linear Parameter Varying*, LPV). Por otro lado, el problema de DRF está muy relacionado al problema de filtraje robusto. En ambos casos, se utiliza una estimación de estados para producir los residuos. En los años recientes se ha dedicado mucha investigación al filtraje robusto para sistemas politópicos, no así para la DRF [8]. Recientemente han sido presentados algunos resultados para la DRF en sistemas politópicos [9]. En Casavola *et al.* [10] se presenta un método de diseño de filtros

basado en deconvolución, donde se trata solamente el problema de detección. En esta contribución se presenta un método de diagnóstico robusto de fallas para los sistemas politópicos, basado en optimización convexa utilizando una representación afin mediante LMIs. Esto es, el diseño de los filtros de detección de fallas preserva condiciones de desempeño en  $\mathcal{H}_2$ - $\mathcal{H}_\infty$ , irrespectivamente de la incertidumbre en los parámetros del sistema. Estableciéndose condiciones de detectabilidad y separabilidad de fallas en sistemas politópicos. Todos estos resultados son complementarios a los mostrados [11].

El resto de la contribución está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 se presentan resultados preliminares para el diseño de filtros, proporcionándose versiones extendidas de la caracterización de las normas  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  como LMIs. En la Sección 3 se presenta una solución al problema de síntesis de sistemas de diagnóstico de fallas y en la Sección 4 se describe el método de FDI multiobjetivo. Finalmente se presentan un ejemplo numérico y los comentarios concluyentes.

*Notación:*  $\Re$  es el conjunto de números reales. Para una matriz  $A$ ,  $A^T$  denota su transpuesta.  $tr(A)$  es la traza de la matriz  $A$ . En las particiones de matrices simétricas,  $*$  denota cada uno de sus bloques simétricos.  $I$  define la matriz identidad de dimensión apropiada.

## 2. Preliminares

En esta sección se establecen algunos resultados preliminares a los fines de dar condiciones de desempeño adicionales en el análisis de los sistemas LTI continuos. Considérese el sistema LTI

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1}$$

donde  $x \in \Re$  son los estados,  $u \in \Re$  son los controles,  $y \in \Re$  son las salidas medidas.  $A, B, C, D$ , son matrices constantes conocidas y de dimensiones apropiadas. Para estudiar el desempeño de ese sistema se aplican criterios basados en la norma-2 y la norma- $\infty$ , para lo cual existen versiones mejoradas del *Lema Real Acotado* [12, 13]; y una versión para el caso de desempeño en  $\mathcal{H}_2$  [14].

**Lema 1. (Desempeño  $\mathcal{H}_2$  Relajado)**

Considérese el sistema (1) con  $D = 0$ . Para  $P = P^T > 0$ , entonces  $A$  es estable y  $\|C(sI - A)^{-1}B\|_2^2 < \mu$  si existen matrices  $P, Z$  y  $G$ , tales que

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P + G^T & G^T B \\ A^T G + P & -2P & 0 \\ B^T G & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0, \text{tr}(Z) < 1$$

*Prueba.* Las pruebas pueden ser evaluadas en Apkarian *et al.* [14] y Wei [15].

*Nota:* Cuando existen relaciones entre la matriz dinámica del sistema y la matriz de Lyapunov se obtienen resultados muy conservativos, tal como es el caso de sistemas con incertidumbres politópicas [16]. Esta situación se solventa, en cierto grado, desacoplando ambas matrices.

**Lema 2. (Desempeño  $\mathcal{H}_\infty$  Relajado)**

Considérese el sistema (1). Con  $P = P^T > 0$  y la matriz  $G$ , entonces  $A$  es estable y  $\|C(sI - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma$  si existen matrices  $P$  y  $G$  tales que, para  $\tau \gg 1$

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P + \tau G^T & 0 & G^T B \\ A^T G + P + \tau G & -2\tau P & C^T & 0 \\ 0 & C & -I & D \\ B^T G & 0 & D^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

*Prueba.* La demostración es la típica del *Lema Real Acotado*, que puede ser vista en Wei [15].

Estos resultados son aplicados para establecer mecanismos para el diagnóstico de fallas.

### 3. Filtros para el Diagnóstico Robusto de Fallas (RFDI)

La manera más común de generación de residuos es a través de un observador. Bajo la presencia de fallas, se producen residuos ya que la dinámica del error de estimación no tenderá asintóticamente a cero. Esto es cierto en el contexto de un conocimiento perfecto del sistema y de un escenario libre de perturbaciones. Cuando cualquier tipo de ruido o perturbación está presente dentro del sistema, es necesario considerar

una cota o umbral para los residuos, a partir del cual se considera que se ha producido una falla. Sin embargo, esto es otro marco hipotético para los sistemas donde los parámetros cambian rápidamente o existen parámetros desconocidos. Esto constituye el problema de diagnóstico robusto de fallas. Así, generando una extensión al método de Luenberger clásico y considerando perturbaciones e incertidumbre politópicas, enseguida se presenta un mecanismo para la DRF. Considérese el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_1(\alpha)w(t) + B_2(\alpha)u(t) + \sum_{k=1}^M L_k v_k(t) \\ z(t) &= C_1(\alpha)x(t) \\ y(t) &= C_2(\alpha)x(t) \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $w(t) \in \mathfrak{R}^q$  son perturbaciones desconocidas,  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  son las salidas medidas y  $z(t) \in \mathfrak{R}^s$  son las salidas controladas. El sistema es incierto perteneciente a un politopo convexo:

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \begin{array}{l} (A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C_1(\alpha), C_2(\alpha)) \\ (A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C_1(\alpha), C_2(\alpha)) \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i (A^{(i)}, B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, C_1^{(i)}, C_2^{(i)}), \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Para el diagnóstico, el modelo de falla se define a partir de  $n_k(t) \in \mathfrak{R}^f$ , que corresponde a los *modos de fallas* (señales desconocidas), y  $L_k$  son las *direcciones de fallas*, que se suponen conocidas. Así, para la detección de fallas se considera un filtro observador:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A^{(i)}\hat{x}(t) + B_2^{(i)}u(t) + \mathcal{D}(y(t) - C_2^{(i)}\hat{x}(t)) \\ \hat{z}(t) &= C_1^{(i)}\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $\hat{x}(t)$  y  $\hat{z}(t)$  representan los estimados de los estados y de las salidas controladas, respectivamente.  $\mathcal{D}$  es la ganancia del estimador a ser diseñada. Si se define  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  la dinámica del error de estimación es:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A^{(i)} - \mathcal{D}C_2^{(i)})e(t) + B_1^{(i)}w(t) + \\ &\quad \sum_{k=1}^M L_k v_k(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Adicionalmente, el error de predicción de la salida controlada está dado por

$$e_z(t) = C_1^{(i)}x(t) - C_1^{(i)}\hat{x}(t) = C_1^{(i)}e(t). \quad (8)$$

Para asegurar el diagnóstico de fallas es necesario establecer ciertas condiciones.

### 3.1. Condiciones para la detección y el diagnóstico robusto de fallas (RFDI)

Para el caso de sistemas LTI con modelos ciertos son bien conocidas las condiciones para el diagnóstico de fallas [17]. En el caso de sistemas con incertidumbres politópicas no se conocen resultados en esas direcciones. A continuación se presentan condiciones de detectabilidad y separabilidad de fallas para sistemas inciertos, como extensiones de las condiciones de diagnóstico en sistemas lineales variantes en el tiempo (LTV) [18]. Considérese el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + \sum_{i=1}^M L_i v_i(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + D(\alpha)u(t) \end{aligned} \quad (9)$$

donde las matrices inciertas pertenecen a un politopo  $\Omega$  como el definido en Casavola *et al.* (5).

#### 3.1.1. Condición de detectabilidad

La condición de detectabilidad se basa en el hecho de que las direcciones de fallas no deben estar en el sub-espacio inobservable del sistema, que está dado por

$$u_{os} := \bigcup_{i=1}^N \left[ \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker \left( C^{(i)} A^{i(k)} \right) \right] \quad (10)$$

En consecuencia, la condición de detectabilidad se establece como sigue:

#### Teorema 1

Sea  $\mathcal{W}_{L_i} = \text{Im}(L_i)$ ,  $i = 1, \dots, M$  el sub-espacio de las direcciones de fallas. Para el sistema (9), la falla  $i$ -ésima es detectable si

$$\mathcal{W}_{L_i} \cap u_{os} = \{0\}, i = 1, \dots, M \quad (11)$$

*Prueba.* La prueba es una generalización de los resultados mostrados en Massoumnia [17] y Ríos-Bolívar [18]. Si  $O(A^{(i)}, B^{(i)})$  es la *matriz de observabilidad* del sistema (9), tal como se define

en Angelis [19], entonces  $\mathfrak{R}^n = \text{Im}(O) \oplus u_{os}$ . Así,  $\text{Im}(L_i) = \text{Im}(OL_i) \oplus \ker(OL_i)$ . Si la condición (11) es satisfecha,  $\mathcal{W}_{L_i} = \text{Im}(OL_i)$ , y entonces las fallas se propagan sobre el sub-espacio de salida.

#### 3.1.2. Condición de separabilidad

La condición de separabilidad define el hecho de que cada sub-espacio generado por cada dirección de falla y proyectado sobre el sub-espacio de salida debe ser independiente. Esto es:

#### Teorema 2

Sean  $\mathcal{W}_{L_i} = \text{Im}(OL_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  los sub-espacios debido a las direcciones de fallas. Para el modelo de diagnóstico (9), sea  $O(A^{(i)T}, B^{(i)T})$  su matriz de observabilidad [19]. Las fallas son separables si cada una de las direcciones de ellas sobre la salida están aisladas:

$$O\mathcal{W}_{L_i} \cap \sum_{i \neq j}^M O\mathcal{W}_{L_i} = \{0\}, i, j = 1, \dots, k \quad (12)$$

*Prueba.* Al igual que para la condición de detectabilidad, la demostración es una extensión de los resultados en Massoumnia [17] y Ríos-Bolívar [18].

La condición de separabilidad establece que las fallas son mapeadas sobre el espacio de observabilidad, a partir de lo cual es factible su aislamiento. Así, las fallas pueden ser asignadas a direcciones particulares sobre las salidas estimadas. Con esta condición es posible definir un índice de desempeño para cada una de las fallas separables, entonces se pueden derivar condiciones multiobjetivos. Además, si se diseña un banco de filtros es posible establecer índices de desempeño según las características de las fallas, flexibilizándose la separación de las mismas.

### 3.2. Multifiltraje para RFDI

A los efectos de obtener la separación de fallas y al mismo tiempo atenuar el ruido exógeno, se aplica el multifiltraje usado en Ríos-Bolívar y Acuña [20], pero con algunas modificaciones. En este caso, cada filtro es diseñado para satisfacer diferentes requerimientos, produciéndose una señal residual aislada de las producidas por los otros filtros. A partir de (6), el banco de filtros está dado por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_j(t) &= A^{(i)}\hat{x}_j(t) + B_j^{(i)}u(t) + D_j(y(t) - C_2^{(i)}\hat{x}_j(t)) \\ \hat{z}_j(t) &= C_1^{(i)}\hat{x}_j(t)\end{aligned}\quad (13)$$

donde,  $\hat{x}_j(t)$  y  $\hat{z}_j(t)$  representan los estados estimados y las salidas controladas para el filtro  $j$ -ésimo, y  $D_j$  es la  $j$ -ésima ganancia. Entonces, la dinámica de estimación corresponde a

$$\begin{aligned}\dot{e}_j(t) &= \mathcal{A}_j^{(i)}e_j(t) + B_j^{(i)}\tilde{w}_j(t) + L_j\nu_j(t) \\ e_{z_j}(t) &= C_1^{(i)}e_j(t)\end{aligned}, j = 1, \dots, M \quad (14)$$

donde:  $\mathcal{A}_j^{(i)} = A^{(i)} - D_jC_2^{(i)}$ ,  $B_j^{(i)} = [B_1^{(i)} \ L_{j0}]$ ,  $\tilde{w}_j(t) = [w(t)^T \ \nu_{j0}^T(t)]^T$ . Además,  $\nu_j(t)$  y  $L_j$  son los modos y dirección de fallas para el filtro  $j$ -ésimo. El resto de los modos y direcciones de fallas, es decir,  $\nu_{j0}(t)$  y  $L_{j0}$ , son incluidas dentro del vector de perturbaciones extendido  $\tilde{w}_j(t) \times \mathfrak{R}^{n_j+q-1}$ , y  $B_j^{(i)}$  respectivamente. Así se minimizan los efectos de las otras fallas, junto con las perturbaciones externas. La solución para este problema se obtiene en términos de LMIs.

### Teorema 3

Considérese el sistema (4) sobre el politopo (5). Un filtro, para la  $j$ -ésima falla, de la forma (13), garantizando un desempeño sub-óptimo en  $\mathcal{H}_2$  para (14), es decir,  $\|C_1^{(i)}(sI - A)^{-1}B_j^{(i)}\|_2^2$ , se obtiene a partir de  $G_j, Q_j, Z_j, P_j^{(i)}$ , minimizando  $\text{tr}(Z_j)$  para  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ ; tal que:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} -G_j - G_j^{(i)} & G_j^T A_j^{(i)} - Q_j C_e^{(i)} + P_j^{(i)} + G_j^T & G_j^T B_j^{(i)T} \\ * & -2P_j^{(i)} & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0; \\ \begin{bmatrix} P_j^{(i)} & * \\ C_1^{(i)} & Z_j \end{bmatrix} > 0\end{aligned}\quad (15)$$

para  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ , donde  $G_j \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $Q_j \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ ,  $Z_j \in \mathfrak{R}^{s \times s}$  y  $P_j^{(i)} = P_j^{(i)T} > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ . Así, la ganancia del estimador está dada por  $D_j = (G_j^T)^{-1}Q_j$ .

*Prueba.* Asíumase que hay una solución factible para el problema de optimización formulado. Mediante el cambio de variable  $Q_j = G_j^T D_j$ , y por el Lema 1, se llega a la conclusión.

*Comentario 1.* En este caso se usa una función de Lyapunov dependiente del parámetro  $P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$ . Este hecho es una alternativa para reducir el conservatismo que se tiene cuando se usa una matriz de Lyapunov fija  $P^{(i)} = P$ . De esta manera, es posible obtener una función de Lyapunov para cada vértice del politopo, sin forzar una única matriz de Lyapunov para todo el sistema de diagnóstico.

## 4. Diagnóstico Robusto vía $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$

En esta sección se presenta un procedimiento de síntesis de filtros para el diagnóstico robusto de fallas considerando mediciones contaminadas por ruido y debilitando condiciones de independencia entre fallas y perturbaciones al definir índices de desempeño multiobjetivos, según las características de estas señales. El método es una extensión de los resultados presentados en la última sección. Considérese el modelo de diagnóstico dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_1(\alpha)w(t) + B_2(\alpha)u(t) + \sum_{k=1}^M L_k \nu_k(t) \\ z(t) &= C_1(\alpha)x(t) \\ y(t) &= C_2(\alpha)x(t) + D(\alpha)u(t)\end{aligned}\quad (16)$$

que pertenece al politopo

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ \left( A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C_1(\alpha), C_2(\alpha), D(\alpha) \right) \right. \\ &\quad \left. \left( A(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), C_1(\alpha), C_2(\alpha), D(\alpha) \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \left( A^{(i)}, B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, D^{(i)} \right), \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1\end{aligned}\quad (17)$$

Sea el sistema (14) un banco de filtros de FDI. Entonces, la dinámica de estimación es

$$\begin{aligned}\dot{e}_j(t) &= \mathcal{A}_j^{(i)}e_j(t) + B_j^{(i)}w(t) + \sum_{k=1}^{M-1} L_{k,j} \nu_{k,j}(t), j = 1, \dots, M \\ e_{z_j}(t) &= C_1^{(i)}e_j(t)\end{aligned}\quad (18)$$

donde,  $\mathcal{A}_j^{(i)} = A^{(i)} - D_j C_2^{(i)}$ ; y  $B_j^{(i)} = B_1^{(i)} - D_j D^{(i)}$ . Para alcanzar la separación de fallas, según las

condiciones dadas, y el rechazo al ruido simultáneamente, se propone el diseño de filtros definiendo dos canales para los índices de desempeño multiobjetivos:

1. El diagnóstico de fallas se obtiene minimizando la norma- $\infty$  del sistema

$$H_{v_{k,j} \rightarrow e_{zj}}(s) = C_1^{(i)}(sI - A_j^{(i)})^{-1}L_{k,j}, \text{ es decir,}$$

$$\|H_{v_{k,j} \rightarrow e_{zj}}(s)\|_{\infty} < \gamma_j.$$

2. El rechazo al ruido se obtiene minimizando la norma-2 del sistema  $H_{w \rightarrow e_{zj}}(s) = C_1^{(i)}(sI - A_j^{(i)})^{-1}B_j^{(i)}$ , con  $\|H_{w \rightarrow e_{zj}}(s)\|_2 < \mu_j$ .

En consecuencia, el siguiente resultado resume la técnica de multifiltrado para el diseño del banco de filtros.

#### Teorema 4

Sea el sistema (16) sobre el politopo (17). Un filtro de FDI, para la  $j$ -ésima falla (de la forma (13)), que garantiza un desempeño sub-óptimo  $\mathcal{H}_2$ - $\mathcal{H}_{\infty}$  para (18) satisfaciendo las condiciones formales, se obtiene a partir de  $G_j, K_j, Z_j, P_{2,j}^{(i)}, P_{\infty,j}^{(i)}, \gamma_j^2$ , minimizando  $tr(Z_j) + \gamma_j^2$ , para  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ ; tal que:

$$\begin{bmatrix} -G_j - G_j^t & \Psi_{2,j}^{(i)} & G_j^t B_1^{(i)} - K_j D^{(i)} \\ * & -2P_{2,j}^{(i)} & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} P_{2,j}^{(i)} & * \\ C_1^{(i)} & Z_j \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} -G_j - G_j^t & \Psi_{\infty,j}^{(i)} & 0 & G_j^t L_{k,j} \\ * & -2\tau_j P_{\infty,j}^{(i)} & C_1^{(i)T} & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\gamma_j^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

con,  $\Psi_{2,j} = G_j^t A^{(i)} - K_j C_2^{(i)} + P_{2,j}^{(i)} + G_j^t$  y  $\Psi_{\infty,j} = G_j^t A^{(i)} - K_j C_2^{(i)} + P_{\infty,j}^{(i)} + \tau_j G_j^t$ ; para,  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ ; donde  $G_j \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $K_j \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ ,  $Z_j \in \mathfrak{R}^{s \times s}$ ,  $P_{2,j}^{(i)} = P_{2,j}^{(i)T} > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  y  $P_{\infty,j}^{(i)} = P_{\infty,j}^{(i)T} > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  y  $\tau_j \gg 1$ . La ganancia del estimador está dada por  $\mathcal{D}_j = (G_j^t)^{-1}K_j$ .

*Prueba.* Asíumase que existe una solución factible para el problema de optimización según el Teorema 4, entonces de la relación

$\mathcal{D}_j = (G_j^t)^{-1}K_j$ , y por aplicación de los lemas 1 y 2 se llega a la conclusión presentada.

*Comentario 2.* En las técnicas multiobjetivos clásicas se tiene el problema del conservatismo, debido a que se tiene una única función de Lyapunov. En el caso presentado no se generan productos que involucren matrices de Lyapunov, y la matriz de diseño  $K_j$  no dependerá de ellas, evitándose la necesidad de usar la misma matriz de Lyapunov para todas las especificaciones. Así, este hecho es muy importante debido a que no solamente hay una matriz de Lyapunov dependiente de parámetros para cada filtro, sino que hay, además, una función de Lyapunov para cada especificación de desempeño, lo que permite reducir el conservatismo.

## 5. Evaluación Numérica

En esta sección, a partir de un ejemplo numérico, se evalúa el método de diseño antes descrito. Se considera un caso presentado en [7], donde se obtuvieron ciertos resultados satisfactorios para la detección de fallas solamente. En nuestro caso, el ejemplo nos permitirá validar el marco teórico tanto para el diagnóstico de fallas como el rechazo de perturbaciones, no considerado en ese trabajo. Considérese, entonces, el modelo de un avión dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho)x(t) + Bu(t) + L_1v_1(t) + L_2v_2(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

con  $A(\rho) = A_0 + \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2$ , con parámetros  $\rho_1 \in [-0.3, 0.3]$  y  $\rho_2 \in [-6.6, 0.6]$ , donde

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1.05 & -2.55 & & & 169.66 & -0.0091 \\ 2.55 & -1.05 & & & 57.09 & 0.0017 \\ & & -77.53 & 39.57 & & \\ & & & -20.20 & & \\ & & -8.8 & & -20.20 & \\ & & & & & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4.4944 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 3.55 & 2.41 \\ 0 & -0.55 & 8.04 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0.02 & 0.56 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.09 & 0.07 & 0 & 0 & 0 \\ -0.48 & -0.59 & 0 & 0 & -49.51 & -0.0026 \\ 0.03 & 0.09 & -0.06 & 0 & 0 & 0 \\ 0.26 & 0.07 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El modo de falla 1 está asociado a anomalías del actuador. El resto se refiere a fallas de sensores. Del Teorema 4, las ganancias de los filtros pueden verse en el cuadro abajo.

Los resultados de las simulaciones se obtuvieron sobre 150s. La Figura 1 muestra los modos de fallas usados: una señal escalón (falla

abrupta) para la falla de actuador, también como una señal tipo rampa. La falla de sensores se describe como una señal sinusoidal.

La Figura 2 muestra las señales residuales obtenidas para cada filtro. Es fácil observar, de los residuos, que las fallas son detectadas y separadas, dándole validez numérica a los resultados teóricos.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una técnica para el diagnóstico robusto de fallas en sistemas con incertidumbres politópicas. Se han establecido condiciones de detectabilidad y separabilidad de fallas para tales sistemas, derivadas de las condiciones para los sistemas LTV. El diagnóstico de fallas se obtiene a partir de las condiciones establecidas y definiendo índices de desempeño en  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$ , caracterizados como versiones extendidas de LMIs. La síntesis de los filtros de diagnóstico se obtiene por solución numérica de las LMIs, considerando especificaciones multiobjetivos, lo que permite extensiones según la naturaleza de las fallas y sus características como señales. En la separación de fallas por multifiltraje, se ha dise-

$$D_1 = \begin{bmatrix} 7,9202 \times 10^3 & 1,4613 & 10,2829 \times 10^3 & 6,2750 \times 10^3 \\ 26,5121 \times 10^3 & -8,6312 & 31,2625 \times 10^3 & 2,0303 \times 10^3 \\ -188,9130 & 1,3862 \times 10^{-3} & 168,2237 & -26,6698 \\ -19,5413 & -29,4202 \times 10^{-3} & 16,0173 & -2,7879 \\ 1,8123 \times 10^3 & -304,9410 \times 10^{-3} & 2,288 \times 10^3 & 164,6512 \\ 14,5322 \times 10^{-3} & -414,1610 \times 10^{-6} & -30,6261 \times 10^{-3} & 3,9382 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 6,8328 \times 10^3 & 1,5603 & 8,1124 \times 10^3 & 838,6807 \\ 22,8089 \times 10^3 & -7,3803 & 27,0615 \times 10^3 & 2,6842 \times 10^3 \\ -198,1137 & 5,6110 \times 10^{-3} & 176,5931 & -27,9677 \\ -19,3828 & -40,1466 \times 10^{-3} & 15,4912 & -2,7624 \\ 1,5112 \times 10^3 & -2,3025 & 1,9113 \times 10^3 & 174,4174 \\ -4,0871 \times 10^{-3} & -28,8270 \times 10^{-6} & 1,3228 \times 10^{-3} & 9,9957 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1,6425 \times 10^3 & 4,0330 & 6,1849 \times 10^{-3} & 25,5842 \times 10^3 \\ -218,0097 & -1,2495 & -915,0529 & -3,9550 \times 10^3 \\ -204,5759 & 5,1111 \times 10^{-3} & 181,9836 & -28,8785 \\ -19,7738 & 33,6379 \times 10^{-3} & 17,3074 & -2,7829 \\ -123,4192 & -16,3308 & -44,6861 & -167,4765 \\ -90,5205 \times 10^{-3} & -15,8914 \times 10^{-6} & -102,0880 \times 10^{-3} & -552,4328 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

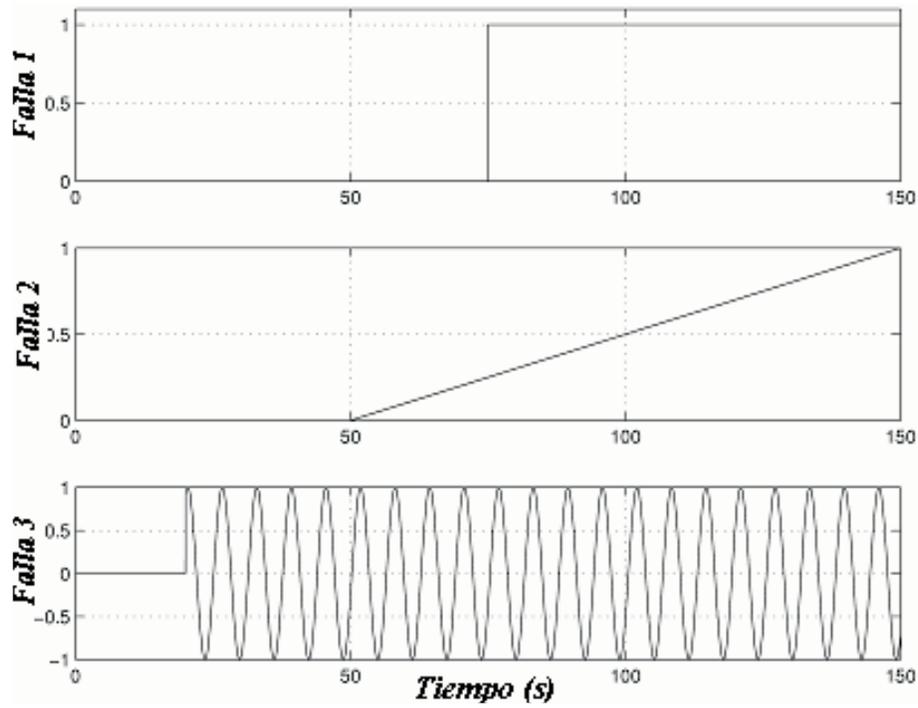


Figura 1. Modos de fallas.

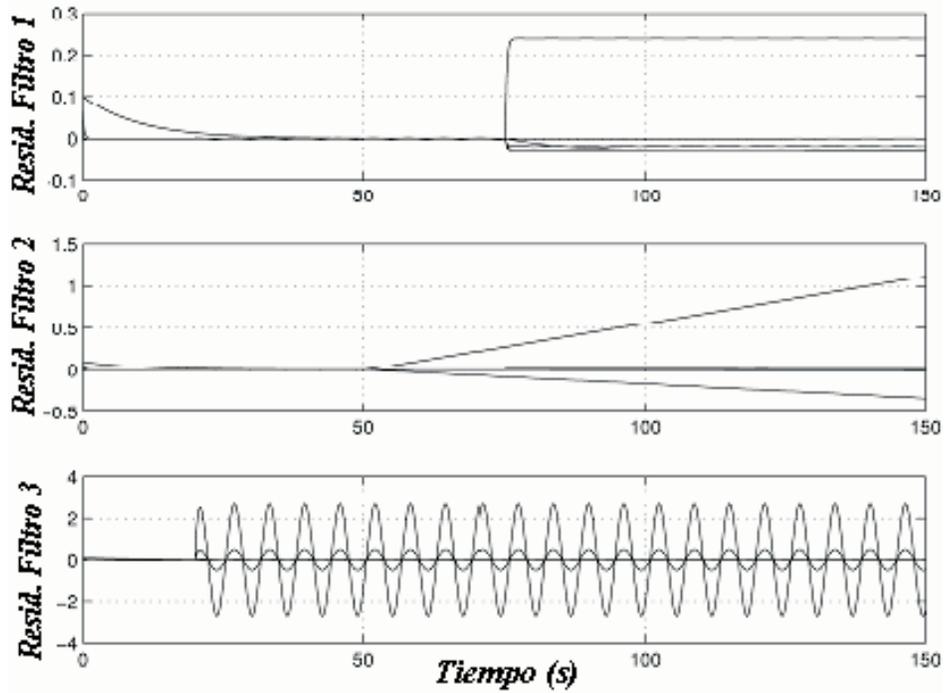


Figura 2. Señales residuales.

ñado un filtro para cada falla, tomando las fallas como perturbaciones y minimizando una medida de desempeño en  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$ . Para mejorar la separación y la atenuación del ruido, mediante la reducción del conservatismo de las técnicas tradicionales, se han considerado versiones extendidas de las caracterizaciones de las normas  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$ , además de funciones de Lyapunov dependientes de parámetros.

### Agradecimientos

Se agradece el financiamiento del FONACIT bajo el proyecto No. 2005000170, y del CDCHT de la Universidad de Los Andes, a través del proyecto No. I-1103-08-02-A.

### Referencias Bibliográficas

1. Bear, R., Failure accommodation in linear systems through self-reorganization, Ph.D. Thesis, Mass. Inst. Technol., 1971.
2. Jones, H., Failure detection in linear systems, Ph.D. thesis, Mass. Inst. Technol., 1973.
3. Frisk, E. and Nielsen, L., Robust residual generation for diagnosis including a reference model for residual behavior. *Automatica*, Vol. 42, No. 3, pp 437-445.
4. Rodrigues, M., Theilliol, D., Aberkane, S. and Sauter, D., Fault Tolerant control Design for Polytopic LPV Systems, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, Vol. 17, No. 1, pp. 27-37, 2007.
5. Casavola, A., Famularo, D., Franzé, G. and Sorbara, M., A Fault Detection, Filter-Design Method for Linear Parameter-Varying Systems, *Proc IMechE. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 221, pp. 865-873, 2007.
6. Weng, A., Patton, R. and Cui, P., Active fault-tolerant control of a double inverted pendulum, *Proc IMechE. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 221, pp. 895-904, 2007.
7. Bokor, J. and Balas, G., Detection Filter Design for LPV Systems: A Geometric Approach, *Automatica*, Vol. 40, pp. 511-518, 2004.
8. Duan, Z., Zhang, J., Zhang, C. and Mosca, E., Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Filtering for uncertain linear systems, *Automatica*, Vol. 42, pp. 1919-1926, 2006.
9. Mazars, E., I.M., J., Li, Z. and Zolotas, A., Fault Detection and Isolation Filter Design for Systems subject to Polytopic Uncertainties, *Proc. of the IEEE 15<sup>th</sup> Mediterranean Conf. on Control and Autom.*, CD-Rom, Athens, Grece, 2007.
10. Casavola, A., Famularo, D. and Franzé, A Robust Deconvolution Scheme for Fault Detection and Isolation of Uncertain Linear Systems: An LMI Approach, *Automatica*, Vol. 41, pp. 1463-1472, 2005.
11. Acuña, W. and Ríos-Bolívar, A.,  $\mathcal{H}_2$ - $\mathcal{H}_\infty$  Multiobjectives for Fault Detection in Uncertain Polytopic Systems, *Proc. of 17<sup>th</sup> IFAC World Congress*, pp 10015-10020. Seoul, Korea, 2008.
12. Shaked, U., Improved LMI Representations for the Analysis and the Design of Continuous-Time Systems with Polytopic Type Uncertainty, *IEEE Trans. on Autom. Control*, Vol. 46, No. 4, pp. 652-656, 2001.
13. He, Y., Wu, M. and She, J., Improved Bounded-Real-Lemma Representation and  $\mathcal{H}_\infty$  Control of Systems With Polytopic Uncertainties, *IEEE Trans. on Autom. Control*, Vol. 52, No. 7, pp. 380-383, 2005.
14. Apkarian, P., Tuan, H. and Bernussou, J., Continuous-Time Analysis, Eigenstructure Assignment, and  $\mathcal{H}_2$  Synthesis with Enhanced Linear Matrix Inequalities (LMI) Characterizations, *IEEE Trans. on Autom. Control*, Vol. 46, No. 12, pp. 1941-1946, 2001.
15. Wei, C., On Applications of the Projection Lemma to Analysis and Design of Continuous-Time Systems, Master's thesis, National Sun Yat-Set University, 2003.
16. Oliveira, M., Bernussou, J. and Geromel, J., A New Discrete-time Robust Stability Condition, *Systems & Control Letters*, Vol. 37, pp. 261-265, 1999.
17. Massoumnia, M.A., A Geometric Approach to the Synthesis of Failure Detection Filters,

- IEEE Trans. On Autom. Control, Vol. 31, No. 9, pp. 839-846, 1986.
18. Ríos-Bolívar, A., Sur la Synthèse de Filtres de Détection de Défaillances, Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2001.
19. Angelis, G., System Analysis, Modelling and Control with Polytopic Linear Models, Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2001.
20. Ríos-Bolívar, A. and Acuña, W., Implementation of AW Compensation Based-on Multi-filtering for Fault Diagnosis, Proc. of the IEEE 15<sup>th</sup> Mediterranean Conf. On Control and Autom., CDROM, Athens, Greece, 2007.

Recibido el 8 de Febrero de 2008

En forma revisada el 9 de Marzo de 2009