

An stiffness coefficients proposal for thin walled open beams

Alejandro Ruiz Sibaja y Oscar Bonilla Manterola

Facultad de Ingeniería, Campus I. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas 29000, México.
Universidad Autónoma de Chiapas, Boulevard Belisario Domínguez Km 1081.
Telf. 00 52 961.61.505.27

Abstract

According to the conventional formulation it is considered that the warping of a beam under torsion is free and constant among a section and the other. This consideration is unacceptable for thin walled open elements since has been shown that in these the warping is variable and originates a different state of stress of which that considers the traditional approach. Therefore, it is necessary to include these effects when it analyses restricted torsion in this structural type of elements. This paper shows a method to obtain stiffness coefficients in thin walled open beams by using the differential equations and the matrix of initial parameters presented by V. Z. Vlasov. Some initial results are presented obtained with the model proposed.

Key words: Restricted torsion, stiffness, and matrix.

Una propuesta para coeficientes de rigidez en vigas de pared delgada

Resumen

De acuerdo con la formulación convencional, se considera que el alabeo de una viga sometida a torsión es libre y constante entre una sección y la otra. Esta consideración es inaceptable para elementos abiertos de pared delgada ya que se ha demostrado que en estos últimos el alabeo es variable y origina un estado de esfuerzos distinto del que considera el planteamiento tradicional. Por lo tanto, es necesario incluir estos efectos cuando se estudie la torsión restringida en este tipo de elementos estructurales. En este artículo se presenta una metodología para obtener coeficientes de rigidez para vigas de pared delgada utilizando las ecuaciones diferenciales y la matriz de parámetros iniciales deducidas por V. Z. Vlasov. Se presentan algunos resultados iniciales obtenidos con el modelo propuesto.

Palabras clave: Torsión restringida, rigidez, matriz.

Introducción

En la práctica de la ingeniería estructural, se emplean con cierta frecuencia las vigas de pared delgada que garantizan alta rigidez y resistencia y tienen al mismo tiempo un espesor relativamente pequeño. El análisis del comportamiento de estas estructuras posee características especiales, lo cual constituye un esquema especial de cálculo, el esquema de vigas de pared

delgada. Los fundamentos básicos fueron elaborados por S. P. Timoshenko. El desarrollo general y completo de esta teoría pertenece a V. Z. Vlasov y se denomina teoría de Vlasov [1].

Conceptos Generales

Considérese inicialmente, una viga de perfil abierto y pared delgada como la que se muestra en la Figura 1.

La ecuación diferencial que gobierna el giro de una viga de pared delgada es [1]:

$$\theta^{IV} - \frac{K^2}{L^2} \theta'' - f(z) = 0. \tag{1}$$

La solución de la ecuación (1) es [1]:

$$\theta(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh \frac{K}{L} z + C_4 \cosh \frac{K}{L} z + \bar{\theta}(z), \tag{2}$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes que dependen de las condiciones de frontera y $\bar{\theta}(z)$ representa la solución particular de la ecuación. Por otra parte, la ecuación homogénea es [1]:

$$\theta^{IV} - \frac{K^2}{L^2} \theta'' = 0. \tag{3}$$

Cuya solución conduce a siguiente sistema de ecuaciones [1]:

$$\theta(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh \frac{K}{L} z + C_4 \cosh \frac{K}{L} z. \tag{4}$$

$$\theta'(z) = C_2 + C_3 \frac{K}{L} \cosh \frac{K}{L} z + C_4 \frac{K}{L} \sinh \frac{K}{L} z. \tag{5}$$

$$B(z) = -GI_z \left(C_3 \sinh \frac{K}{L} z + C_4 \cosh \frac{K}{L} z \right). \tag{6}$$

$$M(z) = GI_z C_2. \tag{7}$$

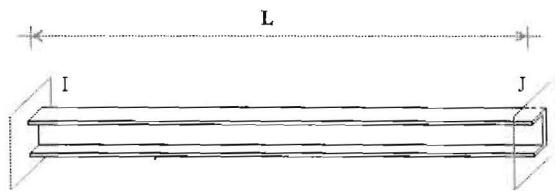


Figura 1. Viga de perfil abierto y pared delgada.

Obtención de la matriz de rigidez considerando la torsión restringida

En la Tabla 1 se especifican las condiciones de frontera que se definen como I, II, III y IV, en los extremos "I" y "J" de una viga de pared delgada y perfil abierto sometida a torsión restringida (Figura 2). En esta tabla el cero indica que hay restricción al desplazamiento y el 1 indica desplazamiento unitario.

Para obtener los coeficientes de rigidez por torsión restringida en el nodo I, se aplican elementos mecánicos en este nodo, de forma tal que se genere en el mismo un giro unitario. Sustituyendo el valor de la coordenada "z" en ambos extremos y considerando exclusivamente el giro y el alabeo, las ecuaciones que rigen el problema llegan a la forma siguiente [2]:

$$\theta_{(0)} = C_1 + C_4. \tag{8}$$

$$\theta'_{(0)} = C_2 + C_3 \frac{K}{L}. \tag{9}$$

$$\theta_{(L)} = C_1 + C_2 L + C_3 \sinh K + C_4 \cosh K. \tag{10}$$

$$\theta'_{(L)} = C_2 + C_3 \frac{K}{L} \cosh K + C_4 \frac{K}{L} \sinh K. \tag{11}$$

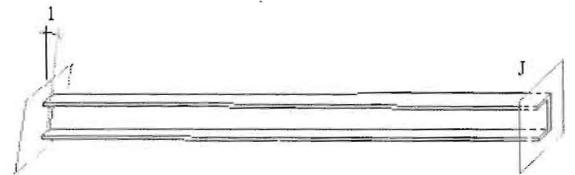


Figura 2. Viga sometida a la condición de frontera I.

Tabla 1
Resumen de condiciones de frontera en los nodos I y J

Condición de frontera	Nodo inicial "I"		Nodo final "J"	
	Giro θ	Alabeo θ'	Giro θ	Alabeo θ'
I	1	0	0	0
II	0	1	0	0
III	0	0	1	0
IV	0	0	0	1

Al ordenar matricialmente las ecuaciones (8), (9), (10) y (11) e imponer en ellas las condiciones de frontera resulta la siguiente relación [2]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & K/L & 0 \\ 1 & L & \sinh K & \cosh K \\ 0 & 1 & (K/L)\cosh K & (K/L)\sinh K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ \theta'_0 \\ \theta_L \\ \theta'_L \end{Bmatrix} \tag{12}$$

Puede definirse como [A] a la matriz de coeficientes y como {C} al vector de constantes, de forma tal que

$$[A]\{C\} = \{\theta_0, \theta'_0, \theta_L, \theta'_L\}^t \tag{13}$$

Y en consecuencia

$$\{C\} = [A]^{-1}\{\theta_0, \theta'_0, \theta_L, \theta'_L\}^t \tag{14}$$

Por lo tanto, para encontrar el vector de constantes {C} asociado a las condiciones de frontera establecidas anteriormente es necesario invertir la matriz [A]. Al realizar las operaciones correspondientes se obtiene la matriz inversa de [A] que se muestra en la relación (15) (ver abajo).

En esta última expresión

$$2\{F\} = 2\left\{-\frac{K}{2}(\sinh K) + (\cosh K) - 1\right\} \tag{16}$$

Una vez obtenida la inversa de la matriz [A] puede encontrarse el vector {C} para cualquier condición de frontera [2, 4].

A continuación se muestra el cálculo del vector de constantes {C} considerando las cuatro condiciones de frontera definidas previamente.

Condición de frontera I

Se establece $\theta_0 = 1$ y todas las demás restricciones igual a cero, por lo tanto $\{C\} = [A]^{-1}\{1,0,0,0\}^t$.

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{(\cosh K - 1)}{2\{F\}} & \frac{1}{2\{F\}} \frac{(\sinh K) - K(\cosh K)}{K/L} & \frac{(\cosh K - 1)}{2\{F\}} & -\frac{1}{2\{F\}} \frac{L}{K(\sinh K - K)} \\ \frac{K/L(\sinh K)}{2\{F\}} & \frac{(\cosh K) - 1}{2\{F\}} & -\frac{K/L}{\sinh K - K} & \frac{1}{\left(\frac{K(\cosh K - 1)^2}{L}\right) \left(\frac{1}{\sinh K - K}\right)} \\ \frac{-(\sinh K)}{2\{F\}} & \frac{-K \sinh K + (\cosh K) - 1}{(K/L)2\{F\}} & \frac{1}{\sinh K - K} + \frac{(\cosh K - 1)^2}{2\{F\}} & \frac{1}{\left(\frac{(\cosh K - 1)^2}{2\{F\}}\right)} \\ \frac{(\cosh K - 1)}{2\{F\}} & \frac{-(\sinh K) - K(\cosh K)}{(K/L)2\{F\}} & -\frac{(\cosh K - 1)}{2\{F\}} & \frac{1}{\left(\frac{(\cosh K - 1)}{2\{F\}}\right) \frac{K/L}{K/L}} \end{bmatrix}$$

Ecuación (15).

La multiplicación matricial conduce a la primera columna de la matriz inversa de [A], en consecuencia:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{1,1}^{-1} \\ A_{2,1}^{-1} \\ A_{3,1}^{-1} \\ A_{4,1}^{-1} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

Después que se determina el vector de constantes {C}, mediante las ecuaciones (6) y (7) pueden obtenerse los elementos mecánicos que se presentan en los nodos inicial y final. Para esta condición de frontera resulta:

$$B_{(0)} = -GI_z[A_{4,1}]^{-1} \tag{18}$$

$$M_{(0)} = GI_z[A_{2,1}]^{-1} \tag{19}$$

$$B_{(L)} = -GI_z\left([A_{3,1}]^{-1} \sinh K + [A_{4,1}]^{-1} \cosh K\right) \tag{20}$$

$$M_{(L)} = GI_z[A_{2,1}]^{-1} \tag{21}$$

Condición de frontera II

Se establece $\theta'_0 = 1$ y todas las demás restricciones igual a cero, por lo tanto $\{C\} = [A]^{-1}\{0,1,0,0\}^t$. Al realizar las operaciones correspondientes se obtiene:

$$B_{(0)} = -GI_z[A_{4,2}]^{-1} \tag{22}$$

$$M_{(0)} = GI_z[A_{2,2}]^{-1} \tag{23}$$

$$B_{(L)} = -GI_z\left([A_{3,2}]^{-1} \sinh K + [A_{4,2}]^{-1} \cosh K\right) \tag{24}$$

$$M_{(L)} = GI_z[A_{2,2}]^{-1} \tag{25}$$

Condición de frontera III

Se establece $\theta_L = 1$ y todas las demás restricciones igual a cero, por lo tanto $\{C\} = [A]^{-1}\{0,0,1,0\}^t$. Al realizar las operaciones correspondientes se obtiene:

$$B_{(0)} = -GI_z[A_{4,3}]^{-1}. \quad (26)$$

$$M_{(0)} = GI_z[A_{2,3}]^{-1}. \quad (27)$$

$$B_{(L)} = -GI_z([A_{3,3}]^{-1} \sinh K + [A_{4,3}]^{-1} \cosh K). \quad (28)$$

$$M_{(L)} = GI_z[A_{2,3}]^{-1}. \quad (29)$$

Condición de frontera IV

Se establece $\theta_L = 1$ y todas las demás restricciones igual a cero, por lo tanto $\{C\} = [A]^{-1}\{0,0,0,1\}^t$. Al realizar las operaciones correspondientes se obtiene:

$$B_{(0)} = -GI_z[A_{4,4}]^{-1}. \quad (30)$$

$$M_{(0)} = GI_z[A_{2,4}]^{-1}. \quad (31)$$

$$B_{(L)} = -GI_z([A_{3,4}]^{-1} \sinh K + [A_{4,4}]^{-1} \cosh K). \quad (32)$$

$$M_{(L)} = GI_z[A_{2,4}]^{-1}. \quad (33)$$

Matriz de rigidez para torsión restringida

A partir de los resultados anteriores se determinan los elementos mecánicos en los nodos I , J producidos por desplazamientos unitarios (giro y alabeo) aplicados en los extremos de la viga. Por la definición de rigidez estos elementos mecáni-

cos representan los coeficientes de la matriz de rigidez, de manera tal que:

$$\{F\} = [KM]\{D\}. \quad (34)$$

Es decir [2, 4] (ver ecuación (35) abajo).

Para el arreglo de la matriz de rigidez de miembro primero se ha tomado en cuenta el giro y después el alabeo.

Secuencia de cálculo con el modelo desarrollado

Para obtener los elementos mecánicos en cualquier viga de pared delgada, debe recordarse que la ecuación que rige el problema es una ecuación diferencial ordinaria lineal por lo que es válido el principio de superposición de efectos. Por lo tanto, para aplicar el modelo desarrollado se considerará la superposición de dos estructuras: una estructura fija y otra bajo desplazamientos reales, esto es [3]:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Estructura} \\ \text{Real} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Estructura} \\ \text{Fija} \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{c} \text{Matriz de} \\ \text{Rigidez} \end{array} \right] \times \left\{ \begin{array}{c} \text{Desplazamientos} \\ \text{Reales} \end{array} \right\} \quad (36)$$

Por consiguiente el problema puede resolverse según la siguiente secuencia [3]:

1. Obtención del vector de fuerzas

$$\{P\} = \{A_R - A_F\}. \quad (37)$$

2. Obtención del vector de desplazamientos

$$\{D\} = [K]^{-1}\{P\}. \quad (38)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} M_I \\ B_I \\ M_J \\ B_J \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} GI_z \frac{K/L[(\sinh K)]}{2\{F\}} & GI_z \frac{(\cosh K) - 1}{2\{F\}} \\ -GI_z \frac{(\cosh K) - 1}{2\{F\}} & GI_z \frac{(\sinh K) - K(\cosh K)}{(K/L)2\{F\}} \\ GI_z \frac{K/L[(\sinh K)]}{2\{F\}} & GI_z \frac{(\cosh K) - 1}{2\{F\}} \\ -GI_z \frac{(1 - \cosh K)}{2\{F\}} & GI_z \frac{K + (\sinh K)}{(K/L)2\{F\}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} KM_{13} & KM_{14} \\ KM_{23} & KM_{24} \\ KM_{33} & KM_{34} \\ KM_{43} & KM_{44} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_I \\ \theta'_I \\ \theta_J \\ \theta'_J \end{array} \right\}.$$

Ecuación (35).

3. Obtención de las acciones de miembro

$$\{AM_R\} = \{AM_F\} + [KM]\{D\}. \tag{39}$$

Aplicación numérica del modelo desarrollado

Considérese para fines de ejemplo una viga con carga uniformemente distribuida, con articulación en el nodo inicial "I" y empotramiento en el extremo "J" (Figura 3). La condición de apoyo articulado en el nodo "I" permite libertad de alabeo de la sección, por lo que puede sufrir desplazamientos en dirección longitudinal pero conservando un giro igual a cero, mientras que el empotramiento en el nodo "J" indica ausencia de desplazamientos tanto angular como longitudinalmente. En resumen la viga de la Figura 3 representa un sólo desplazamiento en el nodo "I", es decir, un grado de libertad.

En la Figura 4 se muestran las características geométricas y de material de la sección transversal considerada.

Se tiene:

$$K \sqrt{\frac{L^2 G I_z}{E I_\beta}} = 1481 \text{ cm}^{-1}$$

$$2\{F\} = 2 \left\{ -\frac{K}{2} (\sinh K) + (\cosh K) - 1 \right\} = 0.464$$

$$m = q_y e_x + q_x e_y = 2178 \text{ kg-cm/cm}.$$

Obtención del vector de fuerzas

Para la obtención del vector de fuerzas {P} se utiliza la ecuación (37), $\{P\} = \{A_R - A_F\}$, en la cual, al no haber cargas en los nodos resulta, $\{A_R\} = 0$ y por lo tanto, $\{P\} = \{-A_F\}$.

Enseguida, es necesario resolver la viga fija con nodos restringidos bajo carga excéntrica (empotrada en ambos extremos, Figura 5).

La ecuación que gobierna el problema es:

$$\theta^{IV} - \frac{K^2}{L^2} \theta' - \frac{qe}{E I_\beta} = 0. \tag{40}$$

Con

$$K = L \sqrt{\frac{G I_z}{E I_\beta}}. \tag{41}$$

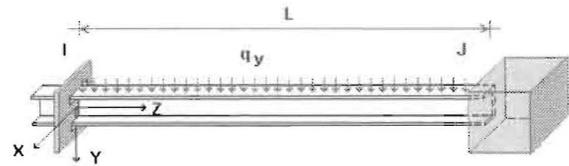
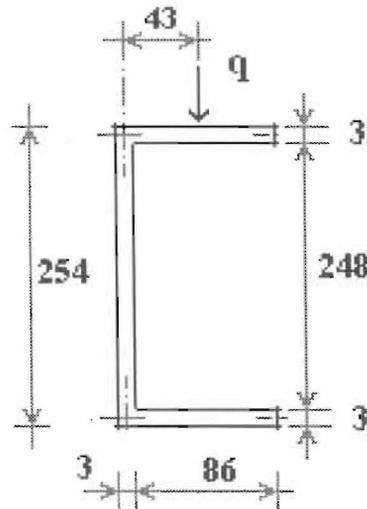


Figura 3. Viga articulada-empotrada con carga uniforme excéntrica.



- L = 400 cm
- E = 2,000,000 kg/cm²
- G = 850,000 kg/cm²
- A = 12.78 cm²
- I_x = 1,222.42 cm⁴
- I_y = 92.78 cm⁴
- I_z = 0.378 cm⁴
- I_β = 11,715.82 cm⁶
- q = 300 kg/cm
- $ax = \frac{I_\beta y}{I_x} = -2959 \text{ cm}$
- e = 7.26 cm

Figura 4. Características geométricas y de material de la sección abierta de pared delgada.

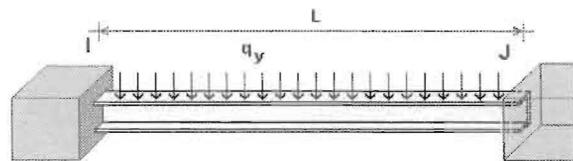


Figura 5. Viga doblemente empotrada con carga uniforme excéntrica.

La solución de la ecuación (40) es [1]:

$$\theta(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh \frac{K}{L} z + C_4 \cosh \frac{K}{L} z - \frac{qe}{2EI_\beta} \frac{L^2}{K^2} z^2. \quad (42)$$

$$\theta'(z) = C_2 + C_3 \frac{K}{L} \cosh \frac{K}{L} z + C_4 \frac{K}{L} \sinh \frac{K}{L} z - \frac{qe}{EI_\beta} \frac{L^2}{K^2} z. \quad (43)$$

$$B(z) = -GI_z \left(C_3 \sinh \frac{K}{L} z + C_4 \cosh \frac{K}{L} z - \frac{qe}{EI_\beta} \frac{L^4}{K^4} \right). \quad (44)$$

$$M(z) = GI_z \left(C_2 - \frac{qe}{EI_\beta} \frac{L^2}{K^2} z \right). \quad (45)$$

Al imponer las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{array}{ll} \text{En } z=0 & \text{en } z=L \\ \theta_0 = 0 & \theta_L = 0 \\ \theta'_0 = 0 & \theta'_L = 0 \end{array}$$

se determinan las constantes C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , cuyos valores son:

$$C_1 = -C_4. \quad (46)$$

$$C_2 = -C_3 \frac{K}{L}. \quad (47)$$

$$C_3 = \frac{\left(C_4 \sinh K - \frac{qe}{EI_\beta} \frac{L^4}{K^3} \right)}{(1 - \cosh K)}. \quad (48)$$

$$C_4 = - \frac{\left(\frac{qe}{EI_\beta} \frac{L^4}{K^3} \right) \left[\frac{K}{2} - \sinh K + \frac{K}{2} \cosh K \right]}{[-2 + 2 \cosh K - K \sinh K]}. \quad (49)$$

Los elementos mecánicos en los extremos de la viga se obtienen con las ecuaciones (44) y (45):

$$AM_{F1} = M_{(0)} = GI_z(C_2) = 419,71935 \text{ kg-cm}. \quad (50)$$

$$AM_{F2} = B_{(0)} = -GI_z \left(C_4 - \frac{qe}{EI_\beta} \frac{L^4}{K^4} \right) = -27,020,253.66 \text{ kg-cm}^2. \quad (51)$$

$$AM_{F3} = M_{(L)} = -GI_z \left(C_2 - \frac{qe}{EI_\beta} \frac{L^3}{K^2} \right) = -419,71935 \text{ kg-cm}. \quad (52)$$

$$AM_{F4} = B_{(L)} = -GI_z \left(C_3 \sinh K + C_4 \cosh K - \frac{qe}{EI_\beta} \frac{L^4}{K^4} \right) = -27,020,253.7 \text{ kg-cm}^2. \quad (53)$$

El vector de fuerza para la viga es el que corresponde al bimomento en el nodo inicial ($z=0$), esto es $\{P\} = -\{A_F\} = -B_{(z=0)}$, por lo tanto $\{P\} = 27,020,253.66 \text{ kg-cm}^2$.

Obtención del vector de desplazamientos

Al presentarse sólo un grado de libertad y siendo éste el alabeo en el nodo inicial, indica que la rigidez es el elemento $Km(2,2)$ de la matriz de rigideces de la ecuación (35).

$$\{D\} = [K]^{-1}\{P\}.$$

$$\{D_1\} = \left[GI_z \left(\frac{(\sinh K) - K(\cosh K)}{K/L2\{F\}} \right) \right] \{P\}$$

$$\theta = [253925880.1]^{-1} \times (27,020,253.66) = 0.106441.$$

Se puede verificar que se cumplen las condiciones de frontera, es decir, el bimomento en el nodo "I" es igual a cero.

$$\{AM_R\} = \{AM_F\} + [KM]\{D\}$$

$$\{AM_R\} = \{-27,020,253.66\} + [253925880.1][0.106410] = 0.00001 \approx 0 \text{ kg-cm}^2$$

Acciones de miembro

Al superponer efectos, ecuación (39), resulta

$$\{Am_R\} = \{Am_F\} + [Km]\{D\}$$

$$\begin{Bmatrix} M_I \\ B_I \\ M_J \\ B_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Am1_F \\ Am2_F \\ Am3_F \\ Am4_F \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} KM_{11} & GI_z \frac{(\cosh K) - 1}{2|F|} & KM_{13} & KM_{14} \\ KM_{21} & GI_z \frac{(\sinh K) - K(\cosh K)}{(K/L)2|F|} & KM_{23} & KM_{24} \\ KM_{31} & GI_z \frac{(\cosh K) - 1}{2|F|} & KM_{33} & KM_{34} \\ KM_{41} & GI_z \frac{(\sinh K) - K}{(K/L)2|F|} & KM_{43} & KM_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta'_i \\ \theta_j \\ \theta'_j \end{Bmatrix}$$

es decir

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ B_i \\ M_j \\ B_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 419,71935 \\ -27,020,25366 \\ -419,71935 \\ -27,020,25366 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} KM_{11} & -921350,05 & KM_{13} & KM_{14} \\ KM_{21} & 253925880,00 & KM_{23} & KM_{24} \\ KM_{31} & -9213500,06 & KM_{33} & KM_{34} \\ KM_{41} & -113148116,50 & KM_{43} & KM_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,106410_i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ B_i \\ M_j \\ B_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 419,71935 \\ -27,020,25366 \\ -419,71935 \\ -27,020,25366 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -98040,86 \\ 27,020,25366 \\ -98040,86 \\ -1204009,108 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 321,678,48 \\ 0,00 \\ -517,76021 \\ -39,060,34474 \end{Bmatrix}$$

Los resultados anteriores coinciden con los que se obtienen al utilizar la matriz de parámetros iniciales propuesta por V. Vlasov [1]. Estos resultados sólo muestran los elementos mecánicos que aparecen en los extremos de la viga, pero se pueden considerar nodos intermedios en la estructura de forma tal que puede graficarse la variación de estos elementos mecánicos a lo largo de la misma, tal como se presenta en la referencia [4].

Conclusiones

En el presente trabajo se recurre a la teoría de la torsión restringida para la obtención de coeficientes de rigidez en vigas de pared delgada y de sección abierta. El desarrollo considera la acción de un nuevo elemento mecánico, el bimomento, y su grado de libertad asociado dando como resultado una nueva matriz de rigidez.

La propuesta permite obtener los distintos elementos mecánicos, además del bimomento, que aparecen en vigas de pared delgada y de sección abierta, sometidas a cualquier condición de carga. Además hace posible un acoplamiento fá-

cil para encontrar la solución de un sistema compuesto por una o varias vigas continuas.

La metodología presentada se utilizó para encontrar la matriz de rigidez de una viga sometida a la acción de carga uniforme excéntrica. La solución del problema incluyó la determinación del vector de fuerza, del vector de desplazamientos y de las acciones de miembros.

Se puede observar que son 4 y no 3 las posibles condiciones de frontera para el problema de torsión restringida en este tipo de vigas. Esto conduce a trabajar con 7 grados de libertad por nodo, es decir se tienen 14 posibles elementos mecánicos en una viga de pared delgada, 7 en cada extremo de la misma.

En la referencia [4] se muestra una comparación entre los resultados obtenidos con esta metodología y los que resultan mediante otras técnicas tales como las ecuaciones diferenciales de V. Z. Vlasov, el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) y la teoría de la torsión pura. Estas comparaciones indican que la metodología presentada en este trabajo constituye una alternativa más económica en tiempo de cálculo si se le incluye dentro de un programa de análisis matricial de estructuras reticulares.

Referencias Bibliográficas

1. Vlasov, V. Z.: "Thin Walled Elastic Beams", National Technical Information Service, U.S. Department of Commerce, 1961.
2. Ruiz Sibaja, Alejandro y Bonilla Manterola, Oscar: "Coeficientes de rigidez para vigas de pared delgada", X Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, Mérida, Yucatán, México, 1996.
3. Weaver, William and Gere James: "Matrix analysis of framed structures", Van Nostrand Reinhold, USA, 1990.
4. Bonilla Manterola, Oscar: "Análisis de la influencia del alabeo en estructuras ensambladas con elementos de pared delgada", Tesis de Grado, Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Instituto Politécnico Nacional, México, 2003.

Recibido el 05 de Octubre de 2004
En forma revisada el 12 de Junio de 2006