

# Trajectory generation of differentially flat systems

**Atilio Morillo Piña**

*División de Postgrado, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia.  
Av. Universidad, Edificio Fobeca, Oficina 16. Maracaibo, Venezuela. E-mail: amorillo@luz.ve*

## Abstract

The aim of this work is to develop a method for trajectory generation of nonlinear control systems with the property of differential flatness. This property allows to reduce the problem of generating dynamically constrained trajectories in the state space, into the simpler problem of constructing curves constrained to satisfy some determined boundary conditions in the flat output space. The general problem have been restricted to the case of systems that can be transformed into a linear controllable system, via state feedback, as these systems enjoy a differential flatness property of 0 order and may be suitably handled by using well known algorithms.

**Key words:** Differential flatness, trajectory generation, state feedback, nonlinear control systems.

# Generación de trayectorias en sistemas diferencialmente planos

## Resumen

El objeto de este trabajo es desarrollar un método para generar trayectorias en sistemas de control no lineales que tengan la propiedad de planitud diferencial. Esta propiedad permite trasladar el problema de generar trayectorias sujetas a las dinámicas definidas en el espacio de estados, al problema más simple de construir curvas en el espacio de salidas planas, constreñidas tan sólo a satisfacer determinadas condiciones de borde. Se ha restringido el estudio al caso de los sistemas linealizables por realimentación estática, ya que éstos poseen la ventaja de exhibir planitud diferencial de orden 0, y se dispone además, de criterios algorítmicos para su manejo.

**Palabras clave:** Planitud diferencial, generación de trayectorias, linealización exacta por realimentación, sistemas de control no lineales.

## Introducción

Los sistemas de control que gozan de la propiedad de planitud, llamados también sistemas diferencialmente planos, fueron introducidos por M. Flies y sus colaboradores en el contexto del álgebra diferencial [1]. Posteriormente, los mismos autores desarrollaron un enfoque en términos de transformaciones de Lie-Backlund y distribuciones de Cartan [2], (lo que se conoce como "prolongaciones infinitas").

En principio, el concepto surgió asociado al problema de la equivalencia de un sistema no li-

neal con un sistema lineal, especialmente vinculado a las denominaciones linealizaciones por realimentación estática y dinámica. Sin embargo, muy pronto, basándose en la estrecha relación con el problema de planeamiento de trayectorias, algunos autores lograron desarrollar aplicaciones interesante a los sistemas mecánicos [3, 4].

La planitud diferencial de un sistema no lineal involucra la existencia de un conjunto de salidas diferencialmente independientes, en número igual a la dimensión del espacio de entradas, de tal suerte que todas las variables del sistema

(estados y entradas) pueden expresarse como funciones de estas salidas y de un número finito de su derivada. Esta relación es invertible, de modo que, a su vez, las salidas planas pueden expresarse como funciones del estado, las entradas, y un número finitos de sus derivadas.

En este escenario, problema típicos de control, tales como estabilización asintótica hacia un punto de equilibrio, transición entre dos puntos estacionarios, seguimiento de trayectorias, y otros, se trasladan al espacio de salidas planas, donde, por no estar estas salidas sujetas a dinámica alguna, son teóricamente más fáciles de resolver. Estas soluciones se proyectan finalmente desde el espacio de salidas hacia el espacio de estados y de entradas, a fin de obtener la solución, en las variables originales, del problema de control planteado.

El objetivo del presente trabajo consiste en desarrollar un método para generar trayectorias que conecten dos puntos estacionarios de un sistema diferencialmente plano, restringido al caso de la clase sistemas linealizables por realimentación estática. Una justificación para esta limitación es que para estos sistemas se dispone de criterios algorítmicos para su manejo, y, adicionalmente, constituyen el caso más simple de planitud diferencial, razón por la cual su estudio se facilita considerablemente.

### Planitud Diferencial

Considérese el sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ z &= h(x)\end{aligned}\quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^m$ ,  $f, g_i, i=1, \dots, m$ , son campos vectoriales de clase  $C^\infty$  definidos en un abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ , y  $h: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una función de clase  $C^\infty$ .

Supóngase que el sistema (1) posee la propiedad de planitud diferencial (o, en términos similares, que es diferencialmente plano). En este caso la propiedad que distingue a (1) (Fliess [1]) es la existencia de un conjunto diferencialmente in-

dependiente (esto es, sin dinámica) de salidas  $y = [y_1, \dots, y_m]^T$ , igual en número a la dimensión del espacio de entradas, y funciones  $A, B, C$  de clase  $C^\infty$  tales que:

$$\begin{aligned}y &= A(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\beta)}) & x &= B(y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha+1)}) \\ u &= C(y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha+1)})\end{aligned}\quad (2)$$

con  $\alpha < \infty$ ,  $\beta < \infty$ .

### Notas

- (i) Decir que las salidas  $y_1, \dots, y_m$  (es decir, las salidas planas) son diferencialmente independientes, significa que no satisfacen ecuación diferencial alguna.
- (ii) No se establece la unicidad de las salidas planas, lo cual conduce a una gran libertad en su escogencia, aunque hay situaciones donde conviene elegir las de modo que tengan un significado físico asociado al problema.
- (iii) No se dispone de un criterio algorítmico general para determinar la planitud diferencial de un sistema dado; sin embargo, la clase de sistemas diferencialmente plano es bastante amplia [4-6].

### Interpretación Geométrica

Una interpretación geométrica del concepto de planitud diferencial, adecuada al objetivo de generar trayectorias para los sistemas es la siguiente: las funciones  $A, B$  y  $C$ , de las relaciones (2), constituyen un difeomorfismo local entre el espacio de estados y de entradas por un lado, y el espacio de salidas planas por otro. En este difeomorfismo se establece una correspondencia entre curvas  $(x(t), u(t))$  que constituyen trayectorias del sistema y curvas arbitrarias  $y(t)$  en el espacio de menor dimensión de las salidas planas (Figura 1).

Las condiciones iniciales establecidas para las trayectorias  $(x(t), u(t))$  conducen a condiciones de bordes que deben ser satisfechas por las curvas  $y(t)$ . En el espacio de salidas planas el problema de encontrar estas curvas  $y(t)$  es teóricamente fácil de resolver, por lo que, una vez parametrizadas estas  $y(t)$  de alguna manera, bastará

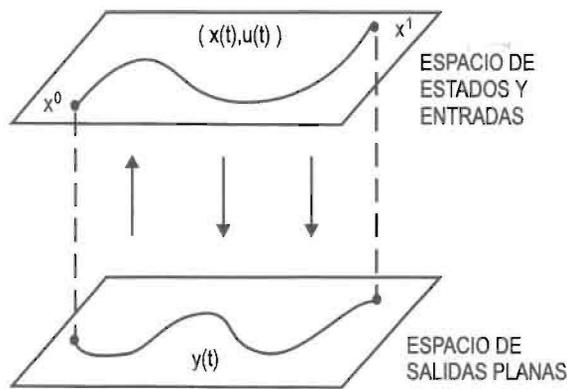


Figura 1. Correspondencia entre trayectorias y curvas arbitrarias.

proyectarlas hacia el espacio de estados y de entradas para obtener las trayectorias  $(x(t), u(t))$  deseadas.

### Planitud Diferencial de Sistemas Linealizables por Realimentación Estática

Considerese el sistema (1) con  $m = 1, k = 1$ , es decir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ z &= h(x) \end{aligned} \tag{3}$$

El sistema (3) se dice linealizable por realimentación estática alrededor el punto  $x_0$  si en un entorno  $\mathcal{U}$  de  $x_0$  existen:

- (i) una transformación de coordenadas de  $\mathcal{R}^n: y = \Phi(x)$ ,
- (ii) una realimentación estática  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , donde  $v \in \mathcal{R}^m$  es una nueva variable de entrada,

de tal forma que en las nuevas coordenadas  $y = \Phi(x)$ , el sistema que le corresponde en lazo cerrado es lineal y controlable. Más precisamente, el sistema aludido es de la forma:

$$\dot{y} = Ay + bv$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

y rango  $[b \ Ab \ A^2b \ \dots \ A^{n-1}b] = n$ .

Una noción estrechamente ligada al concepto de linealización es la de grado relativo. Específicamente, un entero  $\sigma$  es el grado relativo del sistema (3) si en un entorno de  $x_0$

$$\sigma = \inf \{k / L_g L_f^{k-1}(h) \neq 0\} \tag{5}$$

donde  $L_f(\cdot), L_g(\cdot)$ , denotan las derivadas de Lie con respecto a los campos vectoriales  $f, g$ , respectivamente.

La condición de tener grado relativo igual a la dimensión del espacio de estados para el sistema (3) es necesaria y suficiente para que el sistema sea linealizable por realimentación estática [7]. Esta condición no provee, sin embargo, un criterio algorítmico, mientras que sí lo hace el teorema siguiente, cuya demostración puede verse en Marino y Tomei [8].

### Teorema 1

El sistema (3) es linealizable por realimentación estática si y sólo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

- (i) la matriz  $[g(x) \ ad_f g(x) \ \dots \ ad_f^{n-2} g(x) \ ad_f^{n-1} g(x)]$  posee rango  $n$  en un entorno de  $x_0$ ,
- (ii) la distribución  $D = span\{g \ ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$  es involutiva en un entorno de  $x_0$ , donde  $ad_f g$  es el corchete de Lie  $[f, g]$ , y  $ad_f^k g = [f, ad_f^{k-1} g]$ .

**Comentarios sobre la demostración:** La demostración del teorema anterior, es constructiva, por lo que permite determinar un sistema de coordenadas  $y = \Phi(x)$ , con:

$$\begin{aligned} y &= (y_1, y_2, \dots, y_n) = (\lambda(x), L_f \lambda(x), \dots, L_f^{n-1} \lambda(x)) \\ &= \Phi(x) \end{aligned} \tag{6}$$

donde  $\lambda(x)$  es una función definida en un entorno de  $x_0$  que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \langle d\lambda, g \rangle, \langle d\lambda, ad_f g \rangle, \dots, \langle d\lambda, ad_f^{n-2} g \rangle &= 0 \\ \langle d\lambda, ad_f^{n-1} g \rangle &\neq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $\langle d\lambda, ad_f^k g \rangle$  denota la derivada en la dirección del campo vectorial  $ad_f^k g$  de la función  $\lambda$ . De tal manera que, en la construcción del sistema de coordenadas  $\Phi$ , las dificultades se reducen al cálculo de  $\lambda(x)$ . ■

La siguiente proposición establece la conexión entre planitud diferencial y linealización estática.

### Proposición 1

Si el sistema (3) es linealizable por realimentación estática en  $x_0$ , entonces es diferencialmente plano en un entorno de  $x_0$ .

**Demostración:** Sea  $\lambda(x)$  la función que en la demostración del teorema 1 satisface las ecuaciones (7). De acuerdo al mismo teorema, la transformación:

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda(x) \\ y_2 &= \dot{y}_1 = L_f \lambda(x) \\ y_3 &= \dot{y}_2 = \dot{y}_1 = L_f^2 \lambda(x) \\ &\vdots \\ y_n &= \dot{y}_{n-1} = y_1^{(n-1)} = L_f^{n-1} \lambda(x) \end{aligned} \quad (8)$$

define una transformación de coordenada de  $\mathbb{R}^n$ , y por lo tanto es un difeomorfismo alrededor de  $x_0$ . Esto significa que es posible invertir localmente las relaciones (8) para obtener  $x_1, x_2, \dots, x_n$  como funciones de  $y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(n-1)}$ . Adicionalmente, puesto que el sistema (3), con salida  $y = \lambda(x)$ , posee grado relativo igual a  $n$  en  $x_0$ ,

$$y_1^{(n)} = L_f^n \lambda(x) + L_g L_f^{n-1} \lambda(x) u \quad (9)$$

con  $L_g L_f^{n-1} \lambda(x) \neq 0$  en un entorno de  $x_0$ .

En consecuencia, las relaciones (8) y su inversa constituyen las funciones  $A$  y  $B$  de las relaciones (2), mientras que, despejando  $u$  de (9), se obtiene la función  $C$  de las relaciones (2). Por lo tanto, el sistema (3) es diferencialmente plano con salida plana  $y = \lambda(x)$ . ■

### Observaciones:

- (i) En un sistema linealizable por realimentación estática se requieren  $(n - 1)$  derivadas de la salida plana  $y$ , para obtener las variables de estado, y  $n$  derivadas de  $y$ , para expresar las variables de control  $u$ .
- (ii) La no unicidad de las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales (7) implica la no unicidad de las salidas planas, y
- (iii) La planitud diferencial de un sistema linealizable por realimentación estática es de orden 0, en el sentido que la función

$$y = A(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(a)})$$

de las relaciones (2) sólo depende de  $x$ , y no depende de  $u$  y sus derivadas. Así que se trata del caso más simple de planitud. ■

### Transición entre dos Puntos Críticos de un Sistema

Considérese nuevamente el sistema (3), el cual se supone linealizable por realimentación estática, y denótese  $y = \lambda(x)$  a la salida plana establecida en la demostración del teorema 2.

Sean  $p, q$  puntos críticos del sistema (3), esto es:

$$f(p) + g(p)u = 0$$

$$f(q) + g(q)u = 0$$

y supóngase que se desea transferir el sistema desde  $p$  hasta  $q$  en un lapso de tiempo prefijado  $T$ . Es decir, el objetivo planteado es determinar una trayectoria del sistema  $(x(t), u(t))$  tal que:

$$(x(0), u(0)) = p, \quad (x(T), u(T)) = q \quad (10)$$

Expresando las relaciones (8) y (9) en función de  $t$ , se tiene:

$$\begin{aligned} y(t) &= \lambda(x(t)) \\ \dot{y}(t) &= L_f \lambda(x(t)) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t) &= L_f^{n-1} \lambda(x(t)) \\ y^{(n)}(t) &= L_f^n \lambda(x(t)) + L_g L_f^{n-1} \lambda(x(t)) u \end{aligned} \quad (11)$$

Usando (10) para calcular las expresiones de la izquierda de (13) en  $t = 0$  y  $t = T$ , resulta:

$$\begin{aligned} y(0) &= \lambda(p) & y(T) &= \lambda(q) \\ \dot{y}(0) &= 0 & \dot{y}(T) &= 0 \\ \ddot{y}(0) &= 0 & \ddot{y}(T) &= 0 \\ & \vdots & & \\ y^{(n-1)}(0) &= 0 & y^{(n-1)}(T) &= 0 \\ y^{(n)}(0) &= 0 & y^{(n)}(T) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

donde la anulación de todos los renglones es debida a que todas las derivadas contienen el factor nulo  $\dot{x}(t)$  en  $t = 0$  o  $t = T$ , en todos sus términos.

La transición planteada entre  $p$  y  $q$  puede alcanzarse construyendo una curva parametrizada arbitraria  $t \rightarrow y(t)$  con  $t \in [0, T]$  sin más restricciones que las condiciones (12). Una vía para lograrlo es recurriendo a los llamados polinomios *spline*. En este caso se requiere una función  $\gamma(t)$  que satisfaga

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \leq 0 \\ \text{polinomio en } t, & \text{para } 0 < t < 1 \\ 1, & \text{para } t \geq 1 \end{cases} \tag{13}$$

y tal que:

$$\dot{\gamma}(0) = \ddot{\gamma}(0) = \dots = \gamma^{(n)}(0) = 0 \tag{14}$$

$$\dot{\gamma}(T) = \ddot{\gamma}(T) = \dots = \gamma^{(n)}(T) = 0 \tag{15}$$

Sea  $p(t)$  el polinomio de la definición (13), entonces las condiciones (14) implican que  $p(t)$  es de la forma:

$$p(t) = a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + \dots + a_k t^{n+k} \tag{16}$$

mientras que para poder plantear un sistema lineal cuadrado debemos elegir:

$$p(t) = a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + \dots + a_{n+1} t^{2n+1} \tag{17}$$

Derivando  $p(t)$   $n$  veces y exigiendo que  $p(1) = 1, \dot{p}(1) = \dots = p^{(n)}(1) = 0$ , se obtiene el sistema lineal:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = 1 \\ (n+1)a_1 + \dots + (2n+1)a_{n+1} = 0 \\ n(n+1)a_1 + \dots + 2n(2n+1)a_{n+1} = 0 \\ \dots \\ 2.3 \dots n(n+1)a_1 + \dots + (n+2)(n+3) \dots 2n(2n+1)a_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{18}$$

La independencia lineal de los polinomios  $p(t), \dot{p}(t), \dots, p^{(n)}(t)$  implica la existencia de una solución única  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ . Con lo cual se completa la definición de  $\gamma(t)$ .

Finalmente puede definirse la parametrización:

$$y(t) = \lambda(p) + (\lambda(q) - \lambda(p))\gamma\left(\frac{t}{T}\right) \tag{19}$$

y un cálculo directo permite dilucidar que  $y(t)$  así definida satisface las condiciones (12) requeridas.

**Ejemplo**

Considérese el sistema con 3 estados y un control

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 - x_2 u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_1 + 2x_2(u - x_2) \end{cases} \tag{20}$$

Un fácil cálculo muestra que la función:

$$y = \lambda(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 \tag{21}$$

satisface las ecuaciones (7) y por la proposición 1 es una salida plana en un entorno del origen.

Las correspondientes relaciones (11) son en este caso:

$$\begin{aligned} y &= x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 \\ \dot{y} &= x_3 - x_2^2 \\ \ddot{y} &= x_2 - x_1 \\ y^{(3)} &= -x_3 + (1 + x_2)u - x_2 \end{aligned} \tag{22}$$

Ya se sabe que las relaciones (22) constituyen un difeomorfismo, cuya inversa, fácilmente puede verse, viene dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &= -(1 + \dot{y}) + \sqrt{1 + 2(y + \dot{y})} \\ x_2 &= -1 + \sqrt{1 + 2(y + \dot{y})} \\ x_3 &= \dot{y} + (-1 + \sqrt{1 + 2(y + \dot{y})})^2 \\ u &= \frac{y^{(3)} + \dot{y} + (-1 + \sqrt{1 + 2(y + \dot{y})})^2 + (-1 + \sqrt{1 + 2(y + \dot{y})})}{\sqrt{1 + 2(y + \dot{y})}} \end{aligned} \tag{23}$$

Se eligió el signo positivo de la raíz a fin de optar por el valor más grande de  $x_2$ ; mientras que

se advierte que el término  $1 + 2(y + \ddot{y})$  debe mantenerse mayor a 0.

Volviendo al sistema (20), se observa que sus puntos críticos, es decir las soluciones de las ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} x_3 - x_2 u &= 0 \\ -x_2 + u &= 0 \\ x_2 - x_1 + 2x_2(u - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

están dados en forma paramétricas, con parámetro  $u \in \mathbb{R}$ , mediante

$$x_1 = u, \quad x_2 = u, \quad x_3 = u^2 \quad (25)$$

Sean  $p = (a, a, a^2)$  y  $q = (b, b, b^2)$  los puntos críticos del sistema correspondientes a los valores  $u = a, u = b$ , y sea  $T$  un valor para el tiempo  $t$ .

Un cálculo directo muestra que los valores de la salida plana y sus derivadas en  $t = 0$  y  $t = T$  son:

$$\begin{aligned} y(0) = \lambda(p) &= a + \frac{a^2}{2} & y(T) = \lambda(q) &= b + \frac{b^2}{2} \\ \dot{y}(0) &= 0 & \dot{y}(T) &= 0 \\ \ddot{y}(0) &= 0 & \ddot{y}(T) &= 0 \\ y^{(3)}(0) &= 0 & y^{(3)}(T) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

el polinomio  $p(t)$  de la fórmula (17) viene dado en este caso por:

$$p(t) = a_1 t^4 + a_2 t^5 + a_3 t^6 + a_4 t^7 \quad (27)$$

y el sistema corresponde al sistema (18) es:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \\ 4a_1 + 5a_2 + 6a_3 + 7a_4 = 0 \\ 3.4a_1 + 4.5a_2 + 5.6a_3 + 6.7a_4 = 0 \\ 2.3.4a_1 + 3.4.5a_2 + 4.5.6a_3 + 5.6.7a_4 = 0 \end{cases} \quad (28)$$

cuya solución es:

$$a_1 = 35, \quad a_2 = -84, \quad a_3 = 70, \quad a_4 = -20.$$

Por lo tanto la función  $\gamma(t)$  de la definición (13) resulta ser:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0 \\ 35t^4 - 84t^5 + 70t^6 - 20t^7, & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1, & \text{para } t \geq 1 \end{cases} \quad (29)$$

Y la parametrización  $y(t)$  en términos de  $\gamma(t)$  viene dada por:

$$y(t) = \left( a + \frac{a^2}{2} \right) + \left( b + \frac{b^2}{2} - a - \frac{a^2}{2} \right) \gamma\left(\frac{t}{T}\right) \quad (30)$$

En este caso el tiempo  $T$  debe escogerse suficientemente grande para garantizar:

$$\begin{aligned} 1 + 2(y + \ddot{y}) &= \\ = 1 + 2 \left[ y + \frac{1}{T^2} \left( b + \frac{b^2}{2} - a - \frac{a^2}{2} \right) \dot{\gamma}\left(\frac{t}{T}\right) \right] &> 0 \end{aligned}$$

Finalmente, empleado las relaciones (23), que no son otra cosa sino las funciones  $B$  y  $C$  de las relaciones (2), se obtiene la trayectoria  $(x(t), u(t))$  deseada.

### Aplicación a un Convertidor de Potencia CD a CD

La regulación CD a CD es el modo de operación más común de los convertidores conmutados de potencia, los cuales se alimentan con tensión no regulada a la entrada del convertidor y producen una tensión continua prefijada en su salida. Existen diversos métodos de control para lograr la regulación deseada, destacándose, por su importancia, el método de control mediante modulaciones de anchura de pulso (PWM).

La Figura 2 muestra un esquema que permite obtener un modelo dinámico del comportamiento de un circuito convertidor de potencia modulado por anchura de pulso, el cual puede expresarse mediante las ecuaciones [9]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{L} u x_2 + \frac{E}{L} \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C} u x_1 + \frac{1}{RC} x_2 \\ z &= x_1 \end{aligned} \quad (31)$$

donde  $x_1$  es la corriente inductora promedio,  $x_2$  es el voltaje promedio de salida del capacitor y  $u$  es la función de razón de trabajo, la cual toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ , y actúa como una variable de control de entrada. Los parámetros  $E, L, R$  y  $C$  representan el voltaje, la inductancia, la resistencia y la capacitancia del circuito.

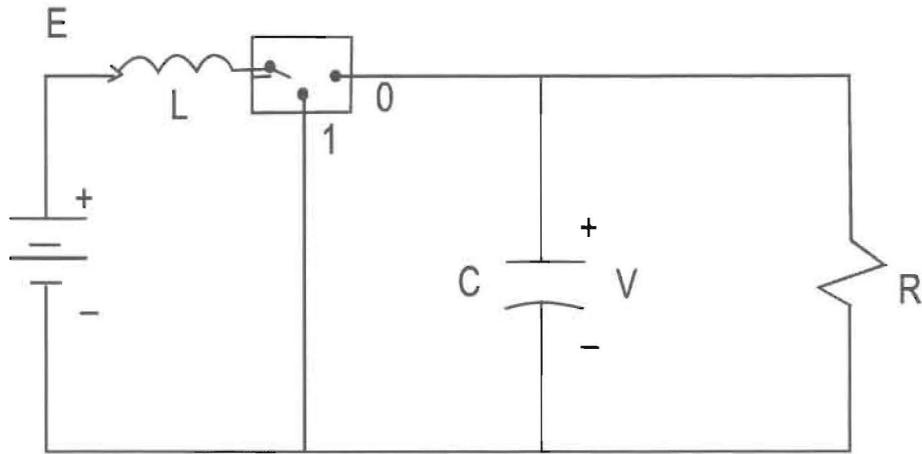


Figura 2. Circuito CD a CD.

Si denotamos

$$f(x) = \begin{bmatrix} E \\ L \end{bmatrix} - \frac{R}{C} x_2, \quad g(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} x_2 \\ \frac{1}{C} x_1 \end{bmatrix}^T,$$

el sistema (31) se reduce a la única ecuación  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ . Mediante un fácil cálculo se obtiene  $ad_f g(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{LRC} \\ \frac{E}{LC} + \frac{x_1}{RC^2} \end{bmatrix}$ , mientras que la matriz:

$$[g(x)ad_f g(x)] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} x_2 & \frac{x_2}{LRC} \\ \frac{1}{C} x_1 & \frac{E}{LC} + \frac{x_1}{RC^2} \end{bmatrix}$$

posee rango 2 si y sólo si  $x_2 \neq 0$ . Adicionalmente, la distribución  $\mathfrak{S} = \text{span}\{g\}$  es involutiva por ser de dimensión 1. Por lo tanto, de acuerdo al Teorema 1, el sistema (31) es linealizable por realimentación estática alrededor de cualquier punto  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $x_2 \neq 0$ .

Una solución de las ecuaciones (7) asociadas a este sistema viene dada por la función  $y = \lambda(x) = \frac{1}{2} Lx_1^2 + \frac{1}{2} Cx_2^2$ . Esta función posee un significado físico importante: representa la energía promedio almacenada por el circuito durante el proceso de conversión de potencia.

Usando la proposición 1 se obtiene que una salida plana del sistema (31), junto con sus derivadas respecto al tiempo, viene dada por:

$$\begin{aligned} y &= \lambda(x) = \frac{1}{2} Lx_1^2 + \frac{1}{2} Cx_2^2 \\ \dot{y} &= Ex_1 - \frac{x_2^2}{R} \\ \ddot{y} &= \frac{2}{R^2C} x_2^2 + \frac{E^2}{L} - \left( \frac{E}{L} x_2 + 2 \frac{x_1 x_2}{RC} u \right) \end{aligned} \tag{32}$$

Puesto que el sistema en cuestión es diferencialmente plano, las relaciones (32) constituyen un difeomorfismo local, cuya inversa viene dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{ERC}{2L} + \left[ \left( \frac{ERC}{2L} \right)^2 + \left( \frac{2y + RC\dot{y}}{L} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ x_2 &= \left\{ -R\dot{y} - \frac{R^2CE^2}{2L} + \left[ \left( \frac{ERC}{L} \right)^2 + \frac{R^2E^2}{L} (2y + RC\dot{y}) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ u &= \frac{LRC}{[2Lx_1(y, \dot{y}) + ERC]x_2(y, \dot{y})} \left[ \frac{E^2}{2} + \frac{2}{R^2C} x_2(y, \dot{y}) - \ddot{y} \right] \end{aligned} \tag{33}$$

para determinar la cual se ha utilizado el signo positivo de las variables  $x_1$  y  $x_2$ , y donde las expresiones  $x_1(y, \dot{y})$ ,  $x_2(y, \dot{y})$  denotan la dependencia funcional de estas variables respecto de  $y, \dot{y}$ .

Los puntos de equilibrio  $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$  conducen a las relaciones  $u = \frac{E}{x_2}$  y  $x_1 = \frac{x_2^2}{RE}$ , de manera que en un punto de equilibrio  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  donde  $\bar{x}_2 = V_d$  se obtendrán también las relaciones:

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left( \frac{V_d^2}{RE}, V_d \right); \quad \bar{y} = \frac{1}{2} L \left( \frac{V_d^2}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} CV_d^2;$$

$$\dot{y} = 0, \ddot{y} = 0, u = \frac{E}{V_d} \quad (34)$$

El objetivo de control planteado, que consiste en transferir el voltaje de salida  $x_2$  desde un valor de equilibrio  $x_2(T_1) = \bar{x}_2(T_1) = V_{d1}$ , hasta un segundo valor de equilibrio  $\bar{x}_2(T_2) = V_{d2}$ , en un lapso de tiempo  $\Delta T = T_2 - T_1$ , puede ser reducido a la transferencia correspondiente de la salida plana y desde el valor de equilibrio  $y(T_1) = \bar{y}_1$  hacia el valor de equilibrio  $y(T_2) = \bar{y}_2$ , donde:

$$y(T_1) = \bar{y}_1 = \frac{1}{2} L \left( \frac{V_{d1}^2}{R} \right) + \frac{1}{2} C V_{d1}^2$$

$$y(T_2) = \bar{y}_2 = \frac{1}{2} L \left( \frac{V_{d2}^2}{R} \right) + \frac{1}{2} C V_{d2}^2 \quad (35)$$

Un cálculo directo muestra que el polinomio  $\gamma(t)$  de la fórmula (13) es:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \leq T_1 \\ 10t^3 - 15t^4 + 6t^5, & \text{para } T_1 \leq t \leq T_2 \\ 1, & \text{para } t \geq T_2 \end{cases}$$

por lo que la parametrización deseada, de acuerdo a la fórmula (16), es:

$$y(t) = \bar{y}_1 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \gamma \left( \frac{t - T_1}{T_2 - T_1} \right) \quad (36)$$

## Conclusiones y Recomendaciones

Se ha desarrollado en este trabajo una técnica para generar trayectorias en sistemas de control no lineales con la propiedades de planitud diferencial. El procedimiento utilizado, de carácter algebraico, es teóricamente simple, aunque en la práctica los cálculos pueden resultar bastante engorrosos. Se mostró que el procedimiento funciona adecuadamente en el caso de sistemas linealizables por realimentación estática con una sola entrada, por lo tanto un paso siguiente puede ser extenderlo al caso de los sistemas con múltiples entradas y salidas. Adicionalmente, dado que los sistemas linealizables por realimentación dinámica son también diferencialmente planos [7], ha de ser posible aplicar la técnica desarrollada a este caso más general.

El problema de generar trayectorias en presencia de obstáculos, y un diseño que permita evitarlos, amerita atención, pero es de mayor complejidad, por lo que constituye un excelente tema para un nuevo artículo.

## Agradecimiento

El autor desea agradecer sinceramente al Dr. Hebert Sira-Ramírez sus valiosos comentarios y su constante apoyo.

## Referencias Bibliográficas

1. M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin, P. Rouchon. On Differentially Flat Nonlinear Systems. Proc. IFAC-Symposium NOLCOS '92 Bordeaux, (1992), 408-412.
2. M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin, P. Rouchon. Nonlinear Control and Lie-Backlund Transformations. Proc. 33<sup>th</sup> IEEE Control Decision Conf. Orlando, (1994), 223-230.
3. Ph. Martin. Contribution a l'Etude des Systemes Differentiellement Plats. PhD Thesis, Ecole des Mines de Paris, (1992).
4. R. Murray, R. Rahinam, W. Sluis. Differential Flatness of Mechanical Control Systems. Proceedings of the 1995 ASME Int. Congress, (1995), 277-283.
5. M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin, P. Rouchon. Flatness and Defect of Nonlinear Systems: Introductory Theory and Examples. Int. Journal of Cont, 61(6), (1995), 1327-1361.
6. H. Sira. On the Sliding Mode Control of Differentially Flat Systems. Control Theory and Advanced Technology, Vol. 10, N° 4, Part 2 (1995), 1093-1113.
7. A. Isidori. Nonlinear Control Systems. 3<sup>rd</sup> Edition. Springer-Verlag, New York (1995).
8. R. Marino, P. Tomei. Nonlinear Control Design. Prentice Hall, London, (1992).
9. H. Sira-Ramírez, M. Ilic-Spong. Exact Linearization in Switched-mode Dc-to-Dc Power Converters. Int. J. Control, Vol. 50, N° 2, 511-524 (1989).

Recibido el 04 de Octubre de 1999

En forma revisada el 24 de Enero de 2001