Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 21, N° 2, 146-150, 1998

The Saigo operator applied to some special functions

Josefina Matera and Beatriz González

Centro de Investigación de Matemática Aplicada (CIMA) Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia, Apartado 526. Maracaibo, Venezuela

Abstract

The Saigo fractional operators are defined using the Gauss hypergeometric functions as kernel. They generalize Riemann-Liouville, Erdélyi-Kober and Weyl operators. In this article, Saigo operators are applied to the following special functions: Generalized hypergeometric function, generalization of Hermite's polynomials and Laguerre's polynomials.

Key words: Fractional differentiation and integration operators, hypergeometric function.

El operador de Saigo aplicado a algunas funciones especiales

Resumen

Los operadores fraccionarios de Saigo se definen usando la función hipergeométrica de Gauss como núcleo. Estos generalizan los operadores de Riemann-Liouville, Erdélyi-Kober y Weyl.

En este artículo los operadores de Saigo son aplicados a las siguientes funciones especiales: Función hipergeométrica generalizada, generalización de los polinomios de Hermite y polinomios de Laguerre.

Palabras clave: Operadores de diferenciación e integración fraccionarios, función hipergeométrica.

Introducción

Los operadores de integración y diferenciación fraccionarios son una generalización de los operadores de diferenciación e integración clásicos donde el orden es un número real o complejo.

Los operadores de integración fraccionarios desempeñan un rol muy importante en el cálculo fraccionario. Son de gran importancia por sus aplicaciones en la solución de ecuaciones diferenciales, integrales e integro-diferenciales. Los operadores más conocidos son los de Riemann-Liouville [1], Weyl [2], Erdélyi [3], Saigo [4,5], entre otros.

Los operadores de Saigo [4,5] están definidos por

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}f(x)=\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{t}{x}\right)f(t)dt$$

$$\mathrm{Re}(\alpha)>0 \tag{1}$$

$$I_{x,\infty}^{\alpha,\beta,\eta}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{x}{t}\right)f(t)dt$$

$$\mathrm{Re}\,(\alpha)>0. \tag{2}$$

Estos operadores utilizan la función hipergeométrica de Gauss como núcleo y constituyen una generalización de los operadores de Riemann-Liouville y Weyl; además, los operadores de Erdélyi-Kober se pueden expresar como casos particulares de los mismos.

En el presente trabajo se aplica el operador de Saigo $I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}$ para calcular la integral fraccionaria de algunas funciones especiales tales como: La función hipergeométrica generalizada, los polinomios generalizados de Hermite, los polinomios de Laguerre, etc.

Operador de Saigo aplicado a la función hipergeométrica generalizada

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} x^p {}_mF_n\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m; \lambda x^r \\ b_1,\dots,b_n; \end{matrix}\right] = \Gamma\left[\begin{matrix} p+1, -\beta+\eta+p+1 \\ -\beta+p+1, \alpha+\eta+p+1 \end{matrix}\right] x^{p-\beta} \cdot$$

$${}_{m+2r}F_{n+2r}\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m, \Delta(r;p+1), \Delta(r;-\beta+\eta+p+1); \\ b_1,\dots,b_n, \Delta(r;-\beta+p+1), \Delta(r;\alpha+\eta+p+1); \end{matrix} \lambda x^r\right] \qquad (3)$$

en donde $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\mathrm{Re}(\eta-\beta)>-1$; $p=0,1,2,\dots$; $r=1,2,\dots$ y

$$\Delta(r,p) = \frac{p}{r}, \frac{p+1}{r}, \dots, \frac{p+r-1}{r}.$$

Demostración

Sea

$$f(x) = x^p {}_mF_n\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m; \lambda x^r \\ b_1,\dots,b_n; \end{matrix}\right]$$

al sustituir en (1), se tiene que:

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} x^p {}_mF_n\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m; \lambda x^r \\ b_1,\dots,b_n; \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} {}_2F_1\left[\begin{matrix} \alpha+\beta, -\eta; \\ \alpha; \end{matrix} 1-\frac{t}{x}\right] t^p \cdot$$

$$\cdot {}_mF_n\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m; \lambda t^r \\ b_1,\dots,b_n; \end{matrix}\right] dt.$$

Usando el desarrollo en serie de la función hipergeométrica generalizada e intercambiando el orden de la integral y de la suma, resulta:

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} x^p {}_mF_n\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m; \lambda x^r \\ b_1,\dots,b_n; \end{matrix}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_m)_k}{(b_1)_k \dots (b_n)_k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \cdot$$

$$\cdot \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} {}_2F_1\left[\begin{matrix} \alpha+\beta, -\eta; \\ \alpha \end{matrix} 1-\frac{t}{x}\right] \cdot t^{rk+p}\, dt$$

la cual podemos escribir al comparar con (1) como:

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} x^p {}_mF_n\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m; \lambda x^r \\ b_1,\dots,b_n; \end{matrix}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_m)_k}{(b_1)_k \dots (b_n)_k} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} x^{rk+p}$$

y usando [6, 10(2.10)]

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} x^p {}_mF_n\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m; \lambda x^r \\ b_1,\dots,b_n; \end{matrix}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_m)_k}{(b_1)_k \dots (b_n)_k} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot$$

$$\cdot \Gamma\left[\begin{matrix} rk+p+1, -\beta+\eta+rk+p+1 \\ -\beta+rk+p+1, \alpha+\eta+rk+p+1 \end{matrix}\right] x^{rk+p-\beta}$$

en donde $\mathrm{Re}(\alpha)>0$; $\mathrm{Re}(\eta-\beta)>-1$; $p=0, 1, 2, \dots$; $r=1, 2, \dots$

Multiplicando y dividiendo por $\Gamma(p+1)$, $\Gamma(-\beta+\eta+p+1)$, $\Gamma(-\beta+p+1)$ $\Gamma(\alpha+\eta+p+1)$, usando [7, 16(3)] y [7, 17(15)]

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} x^p {}_mF_n\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m; \lambda x^r \\ b_1,\dots,b_n; \end{matrix}\right] =$$

$$= x^{p-\beta} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(-\beta+\eta+p+1)}{\Gamma(-\beta+p+1)\Gamma(\alpha+\eta+p+1)} \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_m)_k \Delta_k[(r;p+1)] \Delta_k[(r;-\beta+\eta+p+1)]}{(b_1)_k \dots (b_n)_k\, k!\, \Delta_k[(r;-\beta+p+1)] \Delta_k[(r;\alpha+\eta+p+1)]} \lambda^k x^{rk}$$

donde $\Delta_k[(r;p)]$ denota

$$\Delta_k[(r;p)] = \left(\frac{p}{r}\right)_k \cdot \left(\frac{p+1}{r}\right)_k \dots \left(\frac{p+r-1}{r}\right)_k$$

el cual equivale al resultado (3).

Si en (3) hacemos $\beta=-\alpha$ obtenemos el caso particular correspondiente al operador de Riemann-Liouville [6, 5(1.5)]

$$R_{0,x}^{\alpha} x^p {}_mF_n\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m; \\ b_1,\dots,b_n; \end{matrix} \lambda x^r\right] = I_{0,x}^{\alpha,-\alpha,\eta} x^p {}_mF_n\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m; \\ b_1,\dots,b_n; \end{matrix} \lambda x^r\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} x^{p+\alpha} {}_{m+r}F_{n+r}\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_m; \Delta(r;p+1) \\ b_1,\dots,b_n; \Delta(r;\alpha+p+1); \end{matrix} \lambda x^r\right]$$

en donde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$; $\mathrm{Re}(\eta+\alpha) > -1$; $p = 0, 1, 2, \ldots$; $r = 1, 2, \ldots$ y $\Delta(r,p)$ denota

$$\Delta(r;p) = \frac{p}{r}, \frac{p+1}{r}, \ldots, \frac{p+r-1}{r}.$$

El operador de Saigo aplicado a una generalización de los polinomios de Hermite

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} H_{mm_1+m_2, m, v}(x) = \frac{(-1)^{m_1}(mm_1+m_2)!\, v^{m_2}}{m_1!\, m_2!}.$$

$$\cdot \Gamma\left[\begin{matrix} m_2+1, -\beta+\eta+m_2+1 \\ -\beta+m_2+1, \alpha+\eta+m_2+1 \end{matrix}\right] x^{m_2-\beta}.$$

$$\cdot {}_{m+2}F_{2m}\left[\begin{matrix} -m_1, 1, \Delta(m; -\beta+\eta+m_2+1); \\ \Delta(m; -\beta+m_2+1), \Delta(m; \alpha+\eta+m_2+1; \end{matrix} \left(\frac{vx}{m}\right)^m\right] \quad (4)$$

en donde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$; $\mathrm{Re}(\eta-\beta) > -1$, m, m_1 y m_2 son enteros positivos, $m_2 < m$ y $H mm_1 + m_2$, m, $v(x)$ es la generalización de los polinomios de Hermite definidos por Maya Lahiri[8].

Demostración

Sea $g(x) = H_{mm_1+m_2, m, v}(x)$.

En términos de la función hipergeométrica [8,118(4.1)]

$$g(x) = \frac{(-1)^{m_1}(mm_1+m_2)!(vx)^{m_2}}{m_1!\, m_2!}\, {}_2F_m\left[\begin{matrix} -m_1, 1; \\ \Delta(m; 1+m_2); \end{matrix} \left(\frac{vx}{m}\right)^m\right]$$

en donde m, m_1 y m_2 son enteros positivos, $m_2 < m$.

Al sustituir $g(x)$ en (1) tenemos que:

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} H_{mm_1+m_2, m, v}(x) = \frac{(-1)^{m_1}(mm_1+m_2)!\, v^{m_2}}{m_1!\, m_2!}.$$

$$\cdot I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} x^{m_2}\, {}_2F_m\left[\begin{matrix} -m_1, 1; \\ \Delta(m; 1+m_2); \end{matrix} \left(\frac{vx}{m}\right)^m\right] \quad (5)$$

aplicando (3) en (5), y expresando el resultado en términos de una función hipergeométrica, obtenemos el resultado (4).

Si $m = v = 2$, $m_2 = 0$ y $m_1 = n$, tenemos entonces

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!} \Gamma\left[\begin{matrix} 1, -\beta+\eta+1 \\ -\beta+1, \alpha+\eta+1 \end{matrix}\right] x^{-\beta}.$$

$$\cdot {}_4F_4\left[\begin{matrix} -n, 1, \frac{-\beta+\eta+1}{2}, \frac{-\beta+\eta+2}{2}; \\ \frac{-\beta+1}{2}, \frac{-\beta+2}{2}, \frac{\alpha+\eta+1}{2}, \frac{\alpha+\eta+2}{2}; \end{matrix} x^2\right] \quad (6)$$

en donde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$; $\mathrm{Re}(\eta-\beta) > -1$, n es un número entero positivo y $H_{2n}(x)$ son los polinomios de Hermite de grado par.

Si en (4) hacemos $\beta = -\alpha$ obtenemos el operador de Riemann-Liouville [6,5(1.5)] aplicado a $g(x)$

$$R_{0,x}^{\alpha} H_{mm_1+m_2, m, v}(x) = I_{0,x}^{\alpha,-\alpha,\eta} H_{mm_1+m_2, m, v}(x) =$$

$$= \frac{(-1)^{m_1}(mm_1+m_2)!\, v^{m_2}}{m_1!\, m_2!} \frac{\Gamma(m_2+1)}{\Gamma(\alpha+m_2+1)} x^{m_2+\alpha}$$

$${}_{m+2}F_{2m}\left[\begin{matrix} -m_1, 1; \\ \Delta(m; \alpha+m_2+1); \end{matrix} \left(\frac{vx}{m}\right)^m\right]$$

en donde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$; $\mathrm{Re}(\eta-\beta) > -1$; m, m_1 y m_2 son enteros positivos.

El operador de Saigo aplicado a los polinomios generalizados de Hermite, de González y Kalla

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} H_{2n+r,v}(x) = \frac{2^r(-1)^n(2n+r)!}{n!} \Gamma\left[\begin{matrix} r+1, -\beta+\eta+r+1 \\ -\beta+r+1, \alpha+\eta+r+1 \end{matrix}\right].$$

$$x^{r-\beta}\, {}_5F_5\left[\begin{matrix} -n, \frac{r+1}{2}, \frac{r+2}{2}, \frac{-\beta+\eta+r+1}{2}, \frac{-\beta+\eta+r+2}{2}; \\ v+1, \frac{-\beta+r+1}{2}, \frac{-\beta+r+2}{2}, \frac{\alpha+\eta+r+1}{2}, \frac{\alpha+\eta+r+2}{2}; \end{matrix} x^2\right] \quad (7)$$

en donde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$; $\mathrm{Re}(\eta-\beta) > -1$; $v > -1$, r y n son números enteros positivos.

Demostración

Sea $h(x) = H_{2n+r,v}(x)$ los polinomios generalizados de Hermite [9], definidos por:

$$h(x) = \frac{(1)^r(2n+r)!}{n!}(2x)^r\Phi(-n; \nu+1; x^2)$$

al sustituir $h(x)$ tenemos que:

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}H_{2n+r,\nu}(x) = \frac{(1)^r(2n+r)!}{n!}2^r I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}x^r\Phi(-n; \nu+1; x^2) \tag{8}$$

aplicando (3) en (8) y expresando el resultado en términos de una función hipergeométrica nos queda la fórmula (7).

Si $r = 0$ y $\nu = -1/2$ en (7) obtenemos el operador de Saigo aplicado al polinomio par de Hermite $H_{2n}(x)$ que corresponde al resultado (6).

Si en (7) $r = 1$ y $\nu = 1/2$ se obtiene el operador de Saigo aplicado a los polinomios de Hermite de grado impar $H_{2n+1}(x)$

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}H_{2n+1,1/2}(x) = \frac{2(-1)^n(2n+1)!}{n!}\Gamma\left[\begin{matrix}2, -\beta+\eta+2\\ -\beta+2, \alpha+\eta+2\end{matrix}\right]\cdot$$

$$\cdot x^{1-\beta}{}_4F_4\left[\begin{matrix}-n, 1, \frac{-\beta+\eta+2}{2}, \frac{-\beta+\eta+3}{2};\\ \frac{-\beta+2}{2}, \frac{-\beta+3}{2}, \frac{\alpha+\eta+2}{2}, \frac{\alpha+\eta+3}{2};\end{matrix}\, x^2\right]. \tag{9}$$

Si en (7) hacemos $\beta = -\alpha$ resulta el caso particular aplicando el operador de Riemann-Liouville [6,5(1.5)]

$$R_{0,x}^{\alpha}H_{2n+r,\nu}(x) = I_{0,x}^{\alpha,-\alpha,\eta}H_{2n+r,\nu}(x) =$$

$$= \frac{2^r(-1)^n(2n+r)!}{n!}\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)}x^{r+\alpha}\cdot$$

$$\cdot{}_3F_3\left[\begin{matrix}-n, \frac{r+1}{2}, \frac{r+2}{2},\\ \nu+1, \frac{\alpha+r+1}{2}, \frac{\alpha+r+2}{2};\end{matrix}\, x^2\right]. \tag{10}$$

El operador de Saigo aplicado a los polinomios de Laguerre

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}L_n^{\nu}(x) = \frac{(\nu+1)_n}{n!}\Gamma\left[\begin{matrix}1, -\beta+\eta+1\\ -\beta+1, \alpha+\eta+1\end{matrix}\right]x^{-\beta}\cdot$$

$$\cdot{}_3F_3\left[\begin{matrix}-n, 1, -\beta+\eta+1;\\ \nu+1, -\beta+1, \alpha+\eta+1;\end{matrix}\, x\right] \tag{11}$$

en donde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$; $\mathrm{Re}(\eta-\beta) > -1$; $\nu > -1$, n es un entero positivo.

Demostración

Consideremos los polinomios de Laguerre [10, 273(9.13.10)]

$$L_n^{\nu}(x) = \frac{(\nu+1)_n}{n!}\Phi(-n, \nu+1; x)$$

al sustituir $L_n^{\nu}(x)$ en (1) resulta

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}L_n^{\nu}(x) = \frac{(\nu+1)_n}{n!}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}\Phi(-n, \nu+1; x) \tag{12}$$

Comparando (12) con (3) y expresando en términos de una función hipergeométrica resulta (11).

Si en (11) hacemos $\beta = -\alpha$ obtenemos el caso particular aplicando el operador de Riemann-Liouville [6,5(1.5)]

$$R_{0,x}^{\alpha}L_n^{\nu}(x) = I_{0,x}^{\alpha,-\alpha,\eta}L_n^{\nu}(x) = \frac{(\nu+1)_n}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}{}_2F_2\left[\begin{matrix}-n, 1;\\ \nu+1, \alpha+1;\end{matrix}\, x\right] \tag{13}$$

en donde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$; $\mathrm{Re}(\eta-\beta) > -1$; $\nu > -1$, n es un entero positivo.

El operador de Saigo aplicado a las integrales de Fresnel

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}C(x) = \frac{1}{2}\Gamma\left[\begin{matrix}2, -\beta+\eta+2\\ -\beta+2, \alpha+\eta+2\end{matrix}\right]x^{1-\beta}\cdot$$

$$\cdot\left\{{}_4F_4\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, 1, \frac{-\beta+\eta+2}{2}, \frac{-\beta+\eta+3}{2};\\ \frac{-\beta+2}{2}, \frac{-\beta+3}{2}, \frac{\alpha+\eta+2}{2}, \frac{\alpha+\eta+3}{2};\end{matrix}\, \frac{\pi i x^2}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+{}_4F_4\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, 1, \frac{-\beta+\eta+2}{2}, \frac{-\beta+\eta+3}{2};\\ \frac{-\beta+2}{2}, \frac{-\beta+3}{2}, \frac{\alpha+\eta+2}{2}, \frac{\alpha+\eta+3}{2};\end{matrix}\, -\frac{\pi i x^2}{2}\right]\right\} \tag{14}$$

en donde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$; $\mathrm{Re}(\eta-\beta) > -1$; y $C(x)$ es una de las integrales de Fresnel, y

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} S(x) = \frac{1}{2i}\Gamma\left[\begin{matrix} 2, -\beta+\eta+2 \\ -\beta+2, \alpha+\eta+2 \end{matrix}\right] x^{1-\beta} \cdot$$

$$\cdot\left\{ {}_4F_4\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, \frac{-\beta+\eta+2}{2}, \frac{-\beta+\eta+3}{2}; \\ \frac{-\beta+2}{2}, \frac{-\beta+3}{2}, \frac{\alpha+\eta+2}{2}, \frac{\alpha+\eta+3}{2}; \end{matrix} \frac{\pi i x^2}{2}\right] - \right.$$

$$\left. - {}_4F_4\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, \frac{-\beta+\eta+2}{2}, \frac{-\beta+\eta+3}{2}; \\ \frac{-\beta+2}{2}, \frac{-\beta+3}{2}, \frac{\alpha+\eta+2}{2}, \frac{\alpha+\eta+3}{2}; \end{matrix} -\frac{\pi i x^2}{2}\right]\right\} \tag{15}$$

en donde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$; $\mathrm{Re}(\eta-\beta) > -1$; y $S(x)$ es la otra integral de Fresnel.

Demostración

Las integrales de Fresnel [10,272(9.13,4)] están dadas por

$$C(z) = \frac{z}{2}\left[\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\pi i z^2}{2}\right) + \Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{\pi i z^2}{2}\right)\right], \tag{16}$$

$$S(z) = \frac{z}{2i}\left[\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\pi i z^2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{\pi i z^2}{2}\right)\right]. \tag{17}$$

Sea $f(x) = C(x)$.

Al sustituir en (1) resulta,

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} C(z) = I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} \frac{x}{2}\left[\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\pi i x^2}{2}\right) + \Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{\pi i x^2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} x\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\pi i x^2}{2}\right) + \frac{1}{2} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} x\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{\pi i x^2}{2}\right) \tag{18}$$

Al comparar (18) con (3) y al expresar este resultado en términos de la función hipergeométrica, nos queda la fórmula (14).

Un procedimiento análogo sigue para la demostración del resultado (15).

Si hacemos $\beta = -\alpha$ en (14) y (15) respectivamente, se obtienen los casos particulares aplicando el operador de Riemann-Liouville [6,5(1.5)].

Agradecimiento

Las autoras agradecen al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CONDES), por el soporte financiero para la realización de este trabajo.

Referencias bibliográficas

1. Ross, B. (ed).: Fractional Calculus and its Applications. Springer-Verlag (1975).
2. Oldham, K.B. and Spanier, J.: The Fractional Calculus. Academic Press. New York, (1974).
3. Erdélyi, A. and Kober, H.: Some remarks on Hankel transforms. Quart. J. Math. Oxford 11, (1940), 212-221.
4. Mc Bride, A.C., Roach, G.F (Ed-S).: Fractional Calculus. Pitman Advanced Publishing Program, University of Stracthclide, (1985).
5. Saigo M.: A remark on integral operators involving the Gauss' hypergeometric functions. Kyushu Univ. Math. Reports of College of General Education. Vol. XI No. 2, (1978), 135-143.
6. Valera P.: El operador de Saigo aplicado a funciones elementales y especiales. Trabajo de Ascenso. L.U.Z. Facultad de Ingeniería, Maracaibo (1995).
7. Srivastava, H.M. and Karlsson, Per. W.: Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Ellis Horwood Limited Publishers. New York, 1985.
8. Maya Lahiri: On a generalization of Hermite Polinomials, American Matematicae Societe, Vol. 27, No. 1, January (1971), 117-121.
9. González B. y Kalla S.: Una generalización de los polinomios de Hermite. Rev. Téc. Ing. Univ. del Zulia. Vol. 15, No. 2, (1992), 118-124.
10. Lebedev, N.N.: Special Functions and Their Applications. Dover Publications Inc. New York, 1965.

Recibido el 12 de Enero de 1998
En forma revisada el 6 de Julio de 1998