Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 19, No. 1, 31-36, 1996

Integrals involving generalized hypergeometric and Kampé de Fériet function

Ana Isolina Prieto y Leda Galué

Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A.) Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia, Apartado 526, Maracaibo, Venezuela

Abstract

Integrals involving hypergeometric functions have diverse applications in analysis, statistics, physics and engineering.

In this work we evaluate integrals involving the generalized hypergeometric function and the Kampé de Fériet function. The results obtained are general and include some known integrals as particular cases.

Key words: Definite integral, hypergeometric function, Kampé de Fériet function.

Integrales que involucran la función hipergeométrica generalizada y la función Kampé de Fériet

Resumen

Integrales que involucran funciones hipergeométricas tienen gran variedad de aplicaciones en análisis, estadística, física e ingeniería.

En este trabajo evaluamos integrales que contienen la función hipergeométrica generalizada y la función Kampé de Fériet. Los resultados obtenidos son generales e incluyen como casos particulares algunas integrales conocidas.

Palabras claves: Integral definida, función hipergeométrica, función Kampé de Fériet.

Introducción

Integrales que involucran la función hipergeométrica de una o más variables, se encuentran naturalmente en una gran variedad de problemas en análisis, estadística, ciencias físicas e ingeniería [1].

De aquí la necesidad de trabajar con integrales de esta clase.

La función hipergeométrica generalizada pFq se representa por:

$$ {}_pF_q(z) = {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p;\\ \beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q;\end{matrix} z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p}(\alpha_j)_k}{\prod_{j=1}^{p}(\beta_j)_k}\frac{z^k}{k!} \tag{1}$$

donde

$(\alpha)_k = \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha)$; $\beta_j \neq 0,-1,-2,\ldots; j = 1,2,\ldots q$. (Ver [2]).

La serie ${}_pF_q$ converge para

$$\begin{cases} |z| < \infty \ si \ p \leq q, \\ |z| < 1 \ si \ p = q+1, \end{cases} \tag{2}$$

diverge para todo $z \neq 0$ si $p > q+1$.

La serie ${}_pF_q$ para $|z| = 1$ es: absolutamente convergente si $\mathrm{Re}(\eta) < 0$, condicionalmente convergente ($z \neq 1$) si

$$0 \leq \mathrm{Re}(\eta) < 1, \tag{3}$$

divergente si $1 \leq \mathrm{Re}(\eta)$, donde

$$\eta = \sum_{h=1}^{p} \alpha_h - \sum_{h=1}^{q} \beta_h .$$

En 1966 Lucy Slater [3] evalúa la integral con la función hipergeométrica ${}_pF_q\,[(a); (b); zt]$ y los factores $t^{c-1}\,(1-t)^{d-c-1}$ sobre $[0,1]$. Por otro lado, en 1970, Saxena [4] calculó algunas integrales con funciones hipergeométricas entre las cuales está:

$$\int_o^1 t^{\rho-1}\,(1-t)^{\nu-1}\,{}_2F_1[\lambda,\mu;\nu;1-t]\ .$$

$$F^{\alpha,\beta}_{\gamma,\delta}\left[\begin{matrix} a_\alpha\!:b_\beta;b'_\beta\,; \\ c_\gamma\!:d_\delta;d'_\delta\,; \end{matrix}\ xt^n,\ yt^n\right] dt \tag{4}$$

$$= L\,F^{\alpha+2n,\beta}_{\gamma+2n,\delta}\left[\begin{matrix} a_\alpha,\ \Delta(n;\rho),\ \Delta(n;\nu-\lambda-\mu+\rho) : b_\beta, b'_\beta\,; \\ c_\gamma,\ \Delta(n;\nu+\rho-\lambda),\ \Delta(n;\nu+\rho-\mu) : d_\delta, d'_\delta\,; \end{matrix}\ x,y\right]$$

$$\mathrm{Re}(\rho),\ \mathrm{Re}(\nu),\ \mathrm{Re}(\rho+\nu-\lambda-\mu)>0,\ L=\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)\Gamma(\rho+\nu-\lambda-\mu)}{\Gamma(\nu+\rho-\lambda)\Gamma(\nu+\rho-\mu)}$$

donde $\Delta(n,\alpha)$ denota la secuencia de los n parámetros

$$\alpha/n,\ (\alpha+1)/n, \ldots,\ (\alpha+n-1)/n, \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{5}$$

y $F^{\alpha,\beta}_{\gamma,\delta}$ denota la función Kampé de Fériet con $q=k=\beta$ y $m=n=\delta$.

Saxena obtuvo los siguientes casos particulares de (4):

i) Cuando $\alpha = \gamma = 0$

$$\int_o^1 t^{\rho-1}\,(1-t)^{\nu-1}\,{}_2F_1[\lambda,\mu;\nu;1-t]\ .$$

$${}_\beta F_\delta\,[b_\beta;\ d_\delta;\ xt^n]\ {}_{\beta'}F_{\delta'}\,[b'_\beta;\ d'_\delta;\ yt^n]\ dt \tag{6}$$

$$= L\,F^{2n,\beta}_{2n,\delta}\left[\begin{matrix} \Delta(n;\rho),\ \Delta(n;\rho+\nu-\lambda-\mu) : b_\beta, b'_\beta\,; \\ \Delta(n;\rho+\nu-\lambda),\ \Delta(n;\nu+\rho-\mu) : d_\delta, d'_\delta\,; \end{matrix}\ x,y\right]$$

donde $\mathrm{Re}(\rho)$, $\mathrm{Re}(\nu)$, $\mathrm{Re}(\rho+\nu-\lambda-\mu)>0$.

ii) Para $\beta = \delta = 0$

$$\int_o^1 t^{\rho-1}\,(1-t)^{\nu-1}\,{}_2F_1[\lambda,\mu;\nu;1-t]\ .$$

$${}_\alpha F_\gamma\,[a_\alpha;\ c_\gamma;\ (x+y)t^n]\ dt$$

$$= L_{\alpha+2n}F_{\gamma+2n}\left[\begin{matrix} a_\alpha,\ \Delta(n;\rho),\ \Delta(n;\rho+\nu-\lambda-\mu)\,; \\ c_\gamma,\ \Delta(n;\nu+\rho-\lambda),\ \Delta(n;\rho+\nu-\mu)\,; \end{matrix}\ x+y\right] \tag{7}$$

donde, $\mathrm{Re}(\rho)$, $\mathrm{Re}(\nu)$, $\mathrm{Re}(\rho+\nu-\lambda-\mu)>0$.

En este trabajo se evalúan integrales con la función hipergeométrica generalizada e integrales que involucran algunas combinaciones de esta con la función Kampé de Fériet. Como casos particulares se obtienen algunos resultados ya conocidos.

Algunas de estas integrales están estrechamente relacionadas con operadores de cálculo fraccional, como por ejemplo con la integral fraccional generalizada estudiada por Srivastava and Saigo [5] y la muy conocida integral fraccional de Riemann-Liouville de orden ν.

Integrales que involucran la Función Hipergeométrica Generalizada y la Función Kampé de Fériet

Consideremos las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (1+t)^{2\rho-1}\,(1-t)^{2\nu-1}\,(1+t^2)^{-\rho-\nu}$$

$${}_fF_g\left[\begin{matrix} \lambda_1,\ldots,\lambda_f\,; \\ \mu_1,\ldots,\mu_g\,; \end{matrix}\ \frac{(1-t^2)^{2i}}{(1+t^2)^{2i}}\right] dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)}\ . \tag{8}$$

$${}_{f+2i}F_{g+2i}\left[\begin{matrix} \lambda_1,\ldots,\lambda_f,\frac{\rho}{i},\ldots,\frac{\rho+i-1}{i},\frac{\nu}{i},\ldots,\frac{\nu+i-1}{i}\,; \\ \mu_1,\ldots,\mu_g,\frac{\rho+\nu}{2i},\ldots,\frac{\rho+\nu+2(i-1)}{2i},\frac{\rho+\nu+1}{2i},\ldots,\frac{\rho+\nu-1+2i}{2i}\,; \end{matrix}\ 1\right]$$

donde, $i \in N$, $\mathrm{Re}(\rho)$, $\mathrm{Re}(\nu) > 0$, $\mu_i \neq 0,-1,-2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,g$.

$$I_2 = \int_o^z t^{\rho-1}(z-t)^{\nu-1}\,{}_2F_1\,[\lambda,\mu;\nu;1-\frac{t}{z}]\ .$$

$$F^{p:q;k}_{d:m;n}\left[\begin{matrix} (a_p):(b_q);(c_k)\,; \\ (\alpha_d):(\beta_m);(\gamma_n)\,; \end{matrix}\ xt^h, yt^h\right] dt = \tag{9}$$

$$=D\, F^{p+2h:q;k}_{d+2h:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p),\Delta(h,\rho),\Delta(h,\nu-\lambda-\mu+\rho):(b_q);(c_k);\\(\alpha_d),\Delta(h,\nu-\lambda+\rho),\Delta(h,\nu-\mu+\rho):(\beta_m);(\gamma_n);\end{matrix}\, xz^h, yz^h\right]dt$$

donde, z, Re(ρ), Re(ν), Re(ν−λ−μ+ρ) > 0, $h \in \mathbb{N}$;

$$D=\frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu-\lambda-\mu+\rho)}{\Gamma(\nu-\lambda+\rho)\,\Gamma(\nu-\mu+\rho)}\, z^{\nu+\rho-1} \tag{10}$$

y $\Delta(h,\rho)$ como se definió en (5).

$$I_3=\int_0^z t^{\rho-1}(z-t)^{\nu-1}(1-wt)^{\lambda-\rho-\nu}\, {}_2F_1\,[\lambda,\mu;\rho;wt]\,.$$

$$F^{p:q;k}_{d:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k)\ ;\\(\alpha_d):(\beta_m);(\gamma_n)\ ;\end{matrix}\ x\left(\frac{z-t}{1-wt}\right), y\left(\frac{z-t}{1-wt}\right)\right]dt$$

$$=z^{\rho+\nu-1}\frac{(1+wz)^{\lambda}}{(1-wz)^{\rho}}\,B(\rho,\nu)\ .$$

$$F^{(3)}\left[\begin{matrix}\mu+\nu:\ :(a_p),\nu;-;-:(b_q);(c_k);\lambda;\\\rho+\nu:\ :(\alpha_d),\mu+\nu;-;-:(\beta_m);(\gamma_n);-;\end{matrix}\ xz,\ yz,\ wz\right] \tag{11}$$

z, Re(ρ), Re(ν) > 0, $|arg(1-wz)| < \pi$.

$$I_4=\int_{-1}^{1}(1+t)^{2\rho-1}\,(1-t)^{2\nu-1}\,(1+t^2)^{-\rho-\nu}\,.$$

$${}_fF_g\left[\begin{matrix}\lambda_1,\ldots,\lambda_f\ ;\\\mu_1,\ldots,\mu_g\ ;\end{matrix}\ \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\right].$$

$$F^{p:q;k}_{d:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k)\ ;\\(\alpha_d):(\beta_m);(\gamma_n)\ ;\end{matrix}\ x\frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2},\ y\frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}\right]dt$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)}\ .$$

$$F^{(3)}\left[\begin{matrix}\rho,\nu:\ :(a_p);-;-:(b_q);(c_k);(\lambda_f);\\\frac{\rho+\nu}{2},\frac{\rho+\nu+1}{2}:\ :(\alpha_d);-;-:(\beta_m);(\gamma_n);(\mu_g);\end{matrix}\ x,\ y,\ 1\right] \tag{12}$$

donde,

Re(ρ), Re(ν) > 0, $\mu_i \neq 0,-1,-2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,g$.

Demostración de la igualdad (8)

Sustituyendo la función hipergeométrica generalizada por su expresión en serie e intercambiando el orden de la suma y la integral, posible ya que la serie converge uniformemente en [-1,1] [6, teorema 14-31, p.430], se tiene

$$I_1=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\prod_{h=1}^{f}(\lambda_h)_j}{\prod_{h=1}^{g}(\mu_h)_j\, j!}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{2\rho+2j-1}\,(1-t)^{2\nu+2j-1}}{(1+t^2)^{\rho+\nu+2j}}\,dt$$

evaluando la integral por medio del resultado [7, (2.2.7.2), p.304]

$$\int_{-a}^{a}\frac{(a+x)^{\alpha-1}\,(a-x)^{\beta-1}}{(a^2+x^2)^{(\alpha+\beta)/2}}\,dx=2^{(\alpha+\beta)/2-2}\,B\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right) \tag{13}$$

a, Re(α), Re(β) > 0

resulta,

$$I_1=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\prod_{h=1}^{f}(\lambda_h)_j\, 2^{\rho+\nu+2j-2}\,\Gamma(\rho+j)\,\Gamma(\nu+j)}{\prod_{h=1}^{g}(\mu_h)_j\, j!\ \Gamma(\rho+\nu+2j)}\,,$$

$Re(\nu)$, $Re(\rho) > 0$

usando la fórmula de duplicación de la función gamma [8, (1.2.3), p.3] se obtiene,

$$I_1=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu)}{2\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)}\ .$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\prod_{h=1}^{f}(\lambda_h)_j\,(\rho)_j\,(\nu)_j}{\prod_{h=1}^{g}(\mu_h)_j\, j!\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)_j\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)_j}$$

aplicando el teorema de multiplicación de Gauss [2, (1.2.15), p. 17]

$$(\lambda)_{mn}=m^{mn}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\lambda+j-1}{m}\right)_n,\quad n=0,1,2,\ldots\ m\in \mathbb{Z}^{+} \tag{14}$$

queda,

$$I_1=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu)}{2\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)}\ .$$

$$\sum_{j=o}^{\infty} \frac{\prod_{h=1}^{f} (\lambda_h)_j \prod_{r=1}^{i} \left(\frac{\rho+r-1}{1}\right)_j \prod_{r=1}^{i} \left(\frac{\nu+r-1}{i}\right)_j}{\prod_{h=1}^{g} (\mu_h)_j \prod_{r=1}^{i} \left(\frac{\rho+\nu-2+2r}{2i}\right)_j \prod_{r=1}^{i} \left(\frac{\rho+\nu-1+2r}{2i}\right)_j j!}$$

de (1):

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu)}{2\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)} \cdot$$

$${}_{f+2i}F_{g+2i}\left[\begin{matrix}\lambda_1,\ldots,\lambda_f, \frac{\rho}{i},\ldots,\frac{\rho+i-1}{i}, \frac{\nu}{i},\ldots,\frac{\nu+i-1}{i}\,; \\ \mu_1,\ldots,\mu_g, \frac{\rho+\nu}{2i},\ldots,\frac{\rho+\nu+2(i-1)}{2i}, \frac{\rho+\nu+1}{2i},\ldots,\frac{\rho+\nu-1+2i}{2i}\,;\end{matrix}\; 1\right]$$

$\mathrm{Re}(\rho)$, $\mathrm{Re}(\nu) > 0$, $\mu_i \neq 0,-1,-2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,g$.

Demostración de la igualdad (9)

Expresando la función Kampé de Fériet en términos de su desarrollo en serie e intercambiando el orden de la suma y la integral (donde asumimos que la serie es uniformemente convergente en la región de integración), resulta

$$I_2 = \sum_{r,s=o}^{\infty} A_{r,s}\, x^r y^s \int_o^z t^{\rho+h(r+s)-1}(z-t)^{\nu-1}\; {}_2F_1[\lambda,\mu;\nu;1-\frac{t}{z}]\,dt$$

donde $A_{r,s}$ está dada por

$$A_{r,s} = \frac{(a_1)_{r+s}\cdots(a_p)_{r+s}(b_1)_r\cdots(b_q)_r(c_1)_s\cdots(c_k)_s}{(\alpha_1)_{r+s}\cdots(\alpha_d)_{r+s}(\beta_1)_r\cdots(\beta_m)_r\cdots(\gamma_1)_s\cdots(\gamma_n)_s\; r!\; s!} \tag{15}$$

Evaluando la integral por medio de la fórmula [9, (2.21.1.11), p.315]

$$\int_o^y x^{\alpha-1}(y-x)^{c-1}\; {}_2F_1\left[a,b;c;1-\frac{x}{y}\right] dx =$$

$$y^{c+\alpha-1}\,\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(c-a-b+\alpha)}{\Gamma(c-a+\alpha)\,\Gamma(c-b+\alpha)} \tag{16}$$

y, $\mathrm{Re}(\alpha)$, $\mathrm{Re}(c)$, $\mathrm{Re}(c-a-b+\alpha) > 0$.

se obtiene,

$$I_2 = z^{\nu+\rho-1}\,\frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu-\lambda-\mu+\rho)}{\Gamma(\nu-\lambda+\rho)\,\Gamma(\nu-\mu+\rho)} \sum_{r,s=o}^{\infty} A_{r,s}\, x^r y^s z^{h(r+s)} \cdot$$

$$\frac{(\rho)_{h(r+s)}\,(\nu-\lambda-\mu+\rho)_{h(r+s)}}{(\nu-\lambda+\rho)_{h(r+s)}\,(\nu-\mu+\rho)_{h(r+s)}}$$

z, $\mathrm{Re}(\rho)$, $\mathrm{Re}(\nu)$, $\mathrm{Re}(\nu-\lambda-\mu+\rho) > 0$.

De (14):

$$I_2 = \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu-\lambda-\mu+\rho)}{\Gamma(\nu-\lambda+\rho)\,\Gamma(\nu-\mu+\rho)}\; z^{\nu+\rho-1}\sum_{r,s=o}^{\infty} A_{r,s}(xz^h)^r(yz^h)^s.$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{h}\left(\frac{\rho+i-1}{h}\right)_{r+s} \prod_{i=1}^{h}\left(\frac{\nu-\lambda-\mu+\rho+i-1}{i}\right)_{r+s}}{\prod_{i=1}^{h}\left(\frac{\nu-\lambda+\rho+i-1}{h}\right)_{r+s} \prod_{i=1}^{h}\left(\frac{\nu-\mu+\rho+i-1}{h}\right)_{r+s}}$$

usando (15), (5) y la definición de la función Kampé de Fériet [2, (1.3.28), p.27]:

$$I_2 = D\, F^{p+2h:q;k}_{d+2h:m;n}$$

$$\left[\begin{matrix}(a_p),\Delta(h,\rho),\Delta(h,\nu-\lambda-\mu+\rho):(b_q);(c_k); \\ (\alpha_d),\Delta(h,\nu-\lambda+\rho),\Delta(h,\nu-\mu+\rho):(\beta_m);(\gamma_n);\end{matrix}\; xz^h,\, yz^h\right] dt$$

z, $\mathrm{Re}(\rho)$, $\mathrm{Re}(\nu)$, $\mathrm{Re}(\nu-\lambda-\mu+\rho) > 0$, $h \in \mathbb{N}$ y D como se definió en (10).

Siguiendo un procedimiento similar y con la ayuda del resultado [9, (2.21.1.21), p.316] se demuestra la integral dada por la expresión (11).

Demostración de la fórmula (12)

Sustituyendo la función Kampé de Fériet por su expresión en serie, e intercambiando el orden de la suma y la integral (asumiendo la convergencia uniforme de la serie en la región de integración), resulta

$$I_4 = \sum_{r,s=o}^{\infty} A_{r,s}\, x^r y^s \int_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{2\rho+2(r+s)-1}\,(1-t)^{2\nu+2(r+s)-1)}}{(1+t^2)^{\rho+\nu+2(r+s)}} \cdot$$

$${}_fF_g\left[\begin{matrix}\lambda_1,\ldots,\lambda_f\,; \\ \mu_1,\ldots,\mu_f\,;\end{matrix}\; \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\right] dt.$$

Usando el resultado (8) con i=1.

$$I_4=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)}\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{A_{r,s}\,x^r y^s(\rho)_{r+s}\,(\nu)_{r+s}}{\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)_{r+s}\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)_{r+s}}\,.$$

$${}_{f+2}F_{g+2}\left[\begin{matrix}\lambda_1,\ldots,\lambda_f,\ \rho+r+s,\ \nu+r+s\ ;\\ \mu_1,\ldots,\mu_g,\ \frac{\rho+\nu}{2}+r+s,\ \frac{\rho+\nu+1}{2}+r+s\ ;\end{matrix}\ 1\right].$$

De (1) y usando [2, (1.2.9), p.17]

$$(\lambda)_{m+n}=(\lambda)_m\,(\lambda+m)_n \qquad (17)$$

$$I_4=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)}\,.$$

$$\sum_{r,s,j=0}^{\infty}A_{r,s}\,x^r y^s\,\frac{\prod_{h=1}^{f}(\lambda_h)_j\,(\rho)_{r+s+j}\,(\nu)_{r+s+j}}{\prod_{h=1}^{g}(\mu_h)_j\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)_{r+s+j}\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)_{r+s+j}}\,.$$

De (15) y la definición de la serie hipergeométrica triple general [2, (1.5.14), p.44], se tiene

$$I_4=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)}\,. \qquad (18)$$

$$F^{(3)}\left[\begin{matrix}\rho,\nu:\ :(a_p);-;-:(b_q);(c_k);(\lambda_f)\ ;\\ \frac{\rho+\nu}{2},\frac{\rho+\nu+1}{2}:\ :(\alpha_d);-;-:(\beta_m);(\gamma_n);(\mu_g)\ ;\end{matrix}\ x,y,1\right]$$

$Re(\rho)$, $Re(\nu)>0$, $\mu_i\neq 0,-1,-2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,g$,

bajo las condiciones requeridas para la convergencia de la función hipergeométrica generalizada, la función Kampé de Fériet y la serie hipergeométrica triple general.

Casos Particulares

a) Para $f=2$, $g=i=1$, la integral (8) reduce a

$$\int_{-1}^{1}(1+t)^{2\rho-1}(1-t)^{2\nu-1}(1+t^2)^{-\rho-\nu}{}_2F_1\left[\lambda_1,\lambda_2;\mu_1;\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\right]dt$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\lambda_1,\lambda_2,\rho,\nu\ ;\\ \mu_1,\frac{\rho+\nu}{2},\frac{\rho+\nu+1}{2}\ ;\end{matrix}\ 1\right], \qquad (19)$$

$Re(\rho)$, $Re(\nu)>0$, $\mu_1\neq 0,-1,-2,\ldots$

b) De (9) con $\lambda=\nu$

$$\int_o^z t^{\rho-\mu-1}(z-t)^{\nu-1}\,F^{p:q;k}_{d:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k)\ ;\\ (\alpha_d):(\beta_m);(\gamma_n)\ ;\end{matrix}\ xt^h,yt^h\right]dt=$$

$$z^{\nu+\rho-\mu-1}B(\nu,\rho-\mu)\,F^{p+h:q;k}_{d+h:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p),\Delta(h,\rho-\mu):(b_q);(c_k)\ ;\\ (\alpha_d),\Delta(h,\nu-\mu+\rho):(\beta_m);(\gamma_n);\end{matrix}\ xz^h,yz^h\right]$$

z, $Re(\rho)$, $Re(\nu)$, $Re(\rho-\mu)>0$, $h\in\mathbb{N}$. (20)

c) De (9) con $p=d=o$ y el resultado [2, (1.3.31), p. 28], se tiene

$$\int_o^z t^{\rho-1}(z-t)^{\nu-1}{}_2F_1\left[\lambda,\mu;\nu;1-\frac{t}{z}\right]{}_qF_m\left[\begin{matrix}b_1,\ldots,b_q\ ;\\ \beta_1,\ldots,\beta_m\ ;\end{matrix}\ xt^h\right].$$

$${}_kF_n\left[\begin{matrix}c_1,\ldots,c_k\ ;\\ \gamma_1,\ldots,\gamma_n\ ;\end{matrix}\ yt^h\right]dt= \qquad (21)$$

$$=D\,F^{2h:q;k}_{2h:m;n}\left[\begin{matrix}\Delta(h,\rho),\Delta(h,\nu-\lambda-\mu+\rho):(b_q);(c_k)\ ;\\ \Delta(h,\nu-\lambda+\rho),\Delta(h,\nu-\mu+\rho):(\beta_m);(\gamma_n)\ ;\end{matrix}\ xz^h,yz^h\right]$$

z, $Re(\rho)$, $Re(\nu)$, $Re(\nu-\lambda-\mu+\rho)>0$, $h\in\mathbb{N}$ y D como se definió en (10).

d) De (9) para $q=k=m=n=0$ y usando [2, (1.3.30), p. 28]

$$\int_o^z t^{\rho-1}(z-t)^{\nu-1}{}_2F_1\left[\lambda,\mu;\nu;1-\frac{t}{z}\right].$$

$${}_pF_d\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\ ;\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_d\ ;\end{matrix}\ (x+y)z^h\right]dt= \qquad (22)$$

$$=D_{p+2h}\,F_{d+2h}\left[\begin{matrix}(a_p),\Delta(h,\rho),\Delta(h,\nu-\lambda-\mu+\rho)\ ;\\ (\alpha_d),\Delta(h,\nu-\lambda+\rho),\Delta(h,\nu-\mu+\rho)\ ;\end{matrix}\ (x+y)z^h\right]$$

z, $Re(\rho)$, $Re(\nu)$, $Re(\nu-\lambda-\mu+\rho)>0$, $h\in\mathbb{N}$ y D como se definió en (10).

e) De (11) con $\lambda=\rho$ y el resultado [8, (9.14), p.275)],

$$\int_o^z t^{\rho-1}(z-t)^{\nu-1}(1-wt)^{-\mu-\gamma}$$

$$F^{p:q;k}_{d:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k)\ ;\\ (\alpha_d):(\beta_m);(\gamma_n)\ ;\end{matrix}\ \frac{x(z-t)}{(1-wt)},\frac{y(z-t)}{(1-wt)}\right]dt=$$

$$=z^{\rho+\nu-1}\frac{(1+wz)^{\rho}}{(1-wz)^{\rho}}B(\rho,\nu)\ .$$

$$F^{(3)}\left[\begin{matrix}\mu+\nu:\ :(a_p),\nu;-;-:(b_q);(c_k);\rho;\\ \rho+\nu:\ :(\alpha_d),\mu+\nu;-;-:(\beta_m);(\gamma_n);-;\end{matrix}\ xz,\ yz,\ wz\right] \quad (23)$$

z, $Re(\rho)$, $Re(\nu) > 0$, $|arg(1-wz)| < \pi$.

f) De (11) con $\mu = \rho$ [8, (9.14), p.275],

$$\int_o^z t^{\rho-1}(z-t)^{\nu-1}(1-wt)^{-\rho-\nu}\ .$$

$$F^{p:q;k}_{d:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k)\ ;\\ (\alpha_d):(\beta_m);(\gamma_n)\ ;\end{matrix}\ \frac{x(z-t)}{(1-wt)},\frac{y(z-t)}{(1-wt)}\right]dt=$$

$$=z^{\rho+\nu-1}\frac{(1+wz)^{\lambda}}{(1-wz)^{\rho}}B(\rho,\nu)\ .$$

$$F^{(3)}\left[\begin{matrix}-:\ :(a_p),\nu;-;-:(b_q);(c_k);\lambda;\\ -:\ :(\alpha_d),\rho+\nu;-;-:(\beta_m);(\gamma_n);-;\end{matrix}\ xz,\ yz,\ wz\right] \quad (24)$$

z, $Re(\rho)$, $Re(\nu) > 0$, $|arg(1-wz)| < \pi$.

g) De (12) con $f=2$ y $g=1$,

$$\int_{-1}^{1}(1+t)^{2\rho-1}(1-t)^{2\nu-1}(1+t^2)^{-\rho-\nu}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\lambda_1,\lambda_2;\\ \mu_1\end{matrix};\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\right].$$

$$F^{p:q;k}_{d:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k)\ ;\\ (\alpha_d):(\beta_m);(\gamma_n)\ ;\end{matrix}\ \frac{x(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2},\frac{y(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\right]dt=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)}\ .$$

$$F^{(3)}\left[\begin{matrix}\rho,\nu:\ :(a_p);-;-:(b_q);(c_k);\lambda_1,\lambda_2\ ;\\ \frac{\rho+\nu}{2},\frac{\rho+\nu+1}{2}:\ :(\alpha_d);-;-:(\beta_m);(\gamma_n);\mu_1\ ;\end{matrix}\ x,y,1\right]$$

$Re(\rho)$, $Re(\nu) > 0$, $\mu_l \neq 0,-1,-2,\ldots,$ (25)

Los resultados (4), (6) y (7) dados por Saxena [4] se obtienen haciendo $z=1$, $q=k=\beta$, $m=n=\delta$ y $h=n$ en las integrales (9), (21) y (22) respectivamente.

Agradecimiento

Los autores agradecen al CONDES - Universidad del Zulia por el financiamiento parcial de este trabajo.

Referencias Bibliográficas

1. Exton, H.: Handbook of hypergeometric Integrals. John Wiley & Sons, New York, 1978.
2. Srivastava, H.M. and Karlsson, Per W.: Multiple Gaussian Hypergeometric Series. John Wiley & Sons, New York, 1985.
3. Slater, L.J.: Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge Univ. Press., London, 1966.
4. Saxena, R.K.: Integrals involving Kampé de Fériet function and Gauss's hypergeometric function. Ricerca (Napoli). No. 2 1(1970), 21-27.
5. Srivastava, H.M. and Saigo, M.: Multiplication of Fractional Calculus Operators and Boundary Value Problems Involving the Euler-Darboux Equation. J. Math. Anal. Appl. 121 (1987), 325-369.
6. Apostol, Tom M.: Análisis Matemático. Editorial Reverté, S.A. México, 1a. edición, 1940.
7. Prudnikov, A. P.; Brychkov, Yu. A. and Marichev, O.I.: Integrals and Series. Vol. I. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986.
8. Lebedev, N.N.: Special Functions and Their Applications. Prentice-Hall, New York, 1965.
9. Prudnikov, A.P.; Brychkov, Yu. A. and Marichev, O.I.: Integrals and Series: More Special Functions. Vol. III. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1990.

Recibido el 2 de Mayo de 1995

En forma revisada el 30 de Octubre de 1995