Rev. Téc. Univ. Zulia, Vol. 16, No. 3, 163-176, 1993

Operadores de Integración Fraccional que involucran la función Di-Bessel

Susana Salinas de Romero

Universidad del Zulia Facultad de Ingeniería División de Postgrado

Resumen

En el presente trabajo, se hace un estudio de la función Di Bessel o de Exton $A_\nu(x)$. Se obtiene así para esta función: Determinadas propiedades, una representación integral y el Cálculo de Integrales que contienen $A_\nu(x)$. Por otra parte, mediante la evaluación numérica de esta función se logra: la construcción de una Tabla de Valores, elaboración de las Gráficas y Cálculo de los Ceros para diferentes valores de ν. En cuanto a la Transformada Integral E_ν: se da su definición, se deducen las propiedades de esta transformada y se obtiene la transformada de algunas funciones. Finalmente, se definen nuevos Operadores de Integración Fraccional que involucran la Función Di Bessel, y, se hace una demostración de las propiedades de los referidos Operadores.

Palabras Claves: Función Di-Bessel, Operadores de Integración Fraccional.

Fractional Integration Operators involving the Di-Bessel function

Abstract

The purpose of this research work is to study the Di Bessel or Exton function $A_\nu(x)$. Thus, for this function, are obtained: certain properties, an integral representation, and the evaluation of integrals containing $A_\nu(x)$. On the other hand, by the numerical evaluation of this function, it is accomplished: the construccion of Tables; the elaboration of Graphs and the Calculation of the Zeroes of A for different values of v.In relation to the Integral Transform En: we define the transform, its properties have been deduced, and Transform of some functions are obtained. Finally, news Fractional Integration Operators Involving the Di Bessel function are define and some properties of these operators are established.

Key Words: Di Bessel Function, Fractional Integration Operators.

Introducción

La función Di-Bessel definida por Exton [1, p.856]

$$A_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{[\Gamma(\nu+r+1)]^2 (r!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2r} \qquad (1.1)$$

Mediante la función hipergeométrica $A_\nu(x)$ puede ser expresada como:

$$A_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{\Gamma(\nu+1)\right\}^{-2} {}_0F_3\left(-\,;\ \nu+1,\ \nu+1,\ 1;\ -\frac{x^2}{4}\right) \qquad (1.2)$$

La serie que define la función es absolutamente convergente y analítica en C -{ (x,0): x≤0 }.

Para valores pequeños de x:

$$A_\nu(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{\Gamma(\nu+1)\right\}^{-2} \quad x \to 0 \tag{1.3}$$

Representación Integral de la Funcion Di-bessel

Una representación integral para $A_\nu(x)$ se encuentra en [1, p. 857].

Otra representación integral de $A_\nu(x)$, $\nu>0$, se obtiene de (1.2) usando la representación de B(x,y) [2, p.13]

$$A_\nu(x) = \frac{\left[\frac{x}{2}\right]^\nu}{\Gamma(\nu)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^r}{r!\,\Gamma(\nu+1+r)[\Gamma(1+r)]^2} \int_0^1 t^r(1-t)^{\nu-1}\,dt \tag{2.1}$$

Por la convergencia absoluta cambiando el orden de la integral y la serie:

$$A_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\nu\,\{\Gamma(\nu)\}^2} \int_0^1 (1-t)^{\nu-1} \, {}_0F_3\left(-\,;\,\nu+1,\,1,\,1:-\frac{x^2}{4}t\right)dt \tag{2.2}$$

Una representacion de la función Di-Bessel usando la diferintegracion fraccional

La función Di-Bessel, de acuerdo a [3, p.67], $\nu>0$

$$A_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2\pi i\,\Gamma(\nu+1)2^\nu} \int_{\mathbb{C}} e^s s^{-(\nu+1)} \, {}_0F_2\left(-\,;\,\nu+1,1:-\frac{z^2}{4s}\right)ds \tag{3.1}$$

$\mathbb{C}$ es un contorno de integración simple, cerrado y contiene el origen. Sustituyendo la función ${}_0F_2$ por su representación en serie, intercambiando la integral y la serie, justificado por la convergencia absoluta.

$$A_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left(-\frac{z^2}{4}\right)^r}{\Gamma(\nu+1)\,(\nu+1)_r\,(1)_r\,r!} \int_{\mathbb{C}} e^s s^{-(\nu+1)-r}\,ds \tag{3.2}$$

Con el cambio de variable: $s=\xi-z$, $|\arg(\xi-z)|<\pi$ la integral se expresa como:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\,Im(z)}^{0+} e^{\xi-z}(\xi-z)^{-(\nu+1+r)}d\xi \tag{3.3}$$

luego,

$$A_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2r} e^{-z}}{[\Gamma(\nu+r+1)]^2[\Gamma(1+r)]^2}. \ \frac{\Gamma(\nu+r+1)}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{e^\xi}{(\xi-z)^{\nu+r+1}}\,d\xi \tag{3.4}$$

Finalmente para $\nu>-1$, según la diferintegral ${}_z(e^{az})_\nu$ dada por Nishimoto [4,p.172]

$$A_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{[\Gamma(\nu+r+1)]^2[\Gamma(1+r)]^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2r} (e^{-z})_0\,(e^z)_{\nu+r}$$

$$|arg\ z|<\pi/2 \tag{3.5}$$

Otra representación diferintegral de $A_\nu(z)$ se obtiene de (1.1) y de ${}_z(e^{az})_\nu$ [4, p.172]

$$_z\left(e^{az}\right)_\nu = a^\nu e^{az}, \; a \neq 0 \quad \text{Si } a = \frac{z}{2} \tag{3.6}$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2r} = e^{-(z/2)t} \; _t\left(e^{(z/2)t}\right)_{\nu+2r} \tag{3.7}$$

Sustituyendo (3.7) en (1.1)

$$A_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\{r!\}^2\{\Gamma(\nu+r+1)\}^2}$$

$$_t\left(e^{-(z/2)t}\right)_0 \; _t\left(e^{(z/2)t}\right)_{\nu+2r} \tag{3.8}$$

Funcion Di-Bessel de orden $\nu=\pm\ 1/2$

De [3, p.70] se obtienen las relaciones para $A_{\pm1/2}(x)$ y las Funciones de Kelvin.

$$A_{-1/2}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$ber(2\sqrt{2x}); \quad \text{para } x>0 \tag{4.1}$$

$$A_{1/2}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$bei(2\sqrt{2x}) \quad \text{para } x>0 \tag{4.2}$$

Para $\nu=0$, $x>0$, utilizando la fórmula de [5, p.379]

$$ber(x) + i\,bei(x) = J_0\left(xe^{3\pi i/4}\right) \tag{4.3}$$

De (4.1) y (4.2) sustituyendo en (4.3)

$$A_{1/2}(x) + iA_{-1/2}(x) =$$

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\; J_0\left(2\sqrt{2x}\; e^{3\pi i/4}\right) \tag{4.4}$$

Para $\nu=0$ y $x>0$ de [5, p.381]

$$ber^2x + bei^2x =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\;\Gamma(2k+1)} \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^{2k}}{k!} \tag{4.5}$$

De (4.1) y (4.2) sustituyendo en (4.5)

$$A^2_{-1/2}(x) + A^2_{1/2}(x) =$$

$$\frac{2}{x\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2k}}{(k!)^2\;\Gamma(2k+1)} \tag{4.6}$$

Para $\nu=0$, $x>0$ en la fórmula de expansión en serie de las funciones de Kelvin [5,p. 381]

$$ber\left(x\sqrt{2}\right) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k\, J_{2k}(x)\; I_{2k}(x) \tag{4.7}$$

$$bei\left(x\sqrt{2}\right) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k\, J_{2k+1}(x)\; I_{2k+1}(x) \tag{4.8}$$

De (4.7) y (4.8) se obtienen las fórmulas de expansión de $A_{\pm1/2}$ en términos de J_ν e I_ν sustituyendo en (4.1) y (4.2)

$$A_{-1/2}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k\, J_{2k}(2\sqrt{x})\; I_{2k}(2\sqrt{x}) \tag{4.9}$$

$$A_{1/2}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k\, J_{2k+1}(2\sqrt{x})\; I_{2k+1}(2\sqrt{x}) \tag{4.10}$$

Integrales que contienen funciones Di-Bessel

5.1 $$I_1 = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} A_\nu(bx)x^{\nu+1}dx$$

$$a\neq 0,\ b>0,\ Re(\nu)>-1 \qquad (5.1.1)$$

Usando la definición (1.1), por la convergencia absoluta, cambiamos el orden de la integral y la serie,

$$I_1 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{b}{2}\right)^\nu \left(\frac{b}{2a}\right)^{2r}}{[\Gamma(\nu+r+1)]^2 (r!)^2\ 2a^{2\nu+2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu+r}\, dt \qquad (5.1.2)$$

La integral de (5.1.2) es $\Gamma(\nu+1+r)$, cancelando términos:

$$I_1 = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}\ \Gamma(\nu+1)}$$

$${}_0F_2\left[-\ ;\ 1, \nu+1:\ -\frac{b^2}{4a^2}\right] \qquad (5.1.3)$$

5.2 $$I_2 = \int_0^\infty \frac{x^{\nu+1}\ A_\nu(bx)}{(x^2+a^2)^{\mu+1}}\, dx \qquad (5.2.1)$$

$$a>0,\ b>0,$$

$$-1 < Re(\nu) < 2Re(\mu) + \frac{1}{2} \qquad (5.2.2)$$

Usando la integral:

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^{\mu+1}} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^\infty e^{-(x^2+a^2)t}\ t^\mu\, dt\ ,$$

$$Re(\mu)>-1 \qquad (5.2.3)$$

Sustituyendo (5.1.3) en (5.2.3), utilizando

$$\frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n};$$

expresando el resultado en términos de ${}_0F_3$.

$$I_2 = \frac{(ba^2)^\nu\ \Gamma(\mu-\nu)}{a^{2\mu}\ 2^{\nu+1}\ \Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}$$

$${}_0F_3\left[-; 1-\mu+\nu, 1, \nu+1: -\frac{(ba)^2}{4}\right] \qquad (5.2.4)$$

5.3 $$I_3 = \int_0^z A_\nu(t)dt,\quad Re(\nu)>0 \qquad (5.3.1)$$

De (1.1) y las propiedades de la función Gamma,

$$I_3 = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)}{[\Gamma(\nu+1)]^2\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2}\right)}\ {}_1F_4\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2};\ \nu+1,\ \nu+1,\ 1,\ \frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2}: \frac{-z^2}{4}\right) \qquad (5.3.2)$$

5.4 $$I_4 = \int_0^\infty e^{-ax} A_o(bx)dx \qquad (5.4.1)$$

$$a>0,\ b>0$$

De (1.1) y la fórmula integral de la función Gamma

$$I_4 = \frac{1}{a}\ {}_1F_2\left[\frac{1}{2};\ 1,\ 1:\ -\frac{b^2}{a^2}\right] \qquad (5.4.2)$$

5.5 $$I_5 =$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\ x^{\mu-1}\ A_\nu(b^2x^2/2)\ dx \qquad (5.5.1)$$

De (1.1) y aplicando dos veces la fórmula de duplicación de la función Gamma.

$$I_5 = \left(\frac{1}{a}\right)^\mu \left(\frac{b}{2a}\right)^{2\nu} \frac{\Gamma(\mu+2\nu)}{[\Gamma(\nu+1)]^2}$$

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{4}\mu + \frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{4} \\ \nu+1,\ \nu+1,\ 1; \end{matrix}\ \left(\frac{2b}{a}\right)^4\right] \qquad (5.5.2)$$

5.6 $$I_6 = \int_0^{\pi/2} A_\mu(z\,sen\theta)\, sen^{\mu+1}\theta\, cos^{2\nu+1}\theta\, d\theta, \qquad \mu > -\frac{1}{2} \quad (5.6.1)$$

Esta integral es una extensión de la primera integral de Sonine.

De (1.1) y [2, p.14]:

$$I_6 = \frac{\beta(\nu+1,\mu+1)}{2^{\mu+1}\,[\Gamma(\mu+1)]^2}\, z^\mu \; {}_0F_3\left(-,\ \mu+1,\ \mu+\nu+2,\ 1, -\frac{z^2}{4}\right) \quad (5.6.2)$$

5.7 $$I_7 = \int_0^t (t-x)^{\alpha-1}\, x^{\beta-1}\, A_\nu(bx)\, dx \quad (5.7.1)$$

con $\nu>0$, $Re(\alpha) > 0$, $Re(\alpha+\beta) > 0$, $b > 0$.

Según (1.1), con el cambio de variable $x=ut$, y utilizando la fórmula de duplicación de la función Gamma.

$$I_7 = \frac{B(\alpha,\beta+\nu)}{[\Gamma(\nu+1)]^2}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu t^{\alpha+\beta+\nu-1}\; {}_2F_5\left[\begin{matrix}\frac{\nu+\beta}{2},\ \frac{\nu+\beta+1}{2} \\ \frac{\alpha+\nu+\beta}{2},\ \frac{\alpha+\nu+\beta+1}{2},\ \nu+1,\ \nu+1,\ 1\end{matrix};\ -\frac{b^2t^2}{4}\right] \quad (5.7.2)$$

Un caso particular de esta integral es el resultado de la integral [3, p.72] con t=1, dado por Sarabia.

Evaluación numérica de la funcion Di-Bessel

Mediante la evaluación numérica de $A_\nu(x)$, definida en (1.1), e construye una tabla de valores para $\nu=0, \pm1/2, 1$; de (1.1) se calcula mediante el método de regula falsi, con precisión doble [6], los ceros de $A_\nu(x)$ los cuales difieren de los obtenidos por Exton [1].

Tabla Parcial 1.
Valores de la Función Di-Bessel

X	$A_{-1/2}(X)$	$A_{1/2}(X)$	$A_0(X)$	$A_1(X)$
.0	0.00000000	0.00000000	1.00000000	0.00000000
.1	1.40929380	0.28438871	0.99750039	0.04996876
.2	0.96636560	0.40084493	0.99000624	0.09975009
.3	0.74808891	0.48819676	0.97753162	0.14915681
.4	0.59838632	0.55930338	0.96009993	0.19800227
.5	0.47856884	0.61898007	0.93774392	0.24610059
.6	0.37402588	0.66958708	0.91050565	0.29326693
.7	0.27798200	0.71244865	0.87843642	0.33931777
.8	0.18689523	0.74836989	0.84159677	0.38407112
.9	0.98773403E-01	0.77786620	0.80005639	0.42734681
1.0	0.12448889E-01	0.80127925	0.75389421	0.46896664

Tabla Parcial 2.
Ceros de la Función Di-Bessel, X ∈ [0,100]

Para v = .0

2.06950020481369	8.84345967235958	20.55925694057148
37.21209479165309		

Para v = .5

.0	3.15786590189196	11.1755885450062
24.12862558899948	42.01686866957676	

Para v = 1.0

.0	4.2705329751776	13.54913835565426
27.74462675063635	46.87100900431484	

Para v = 2.0

.0	6.54456735794909	18.40934354338878
35.11097386080865	56.72410120782205	

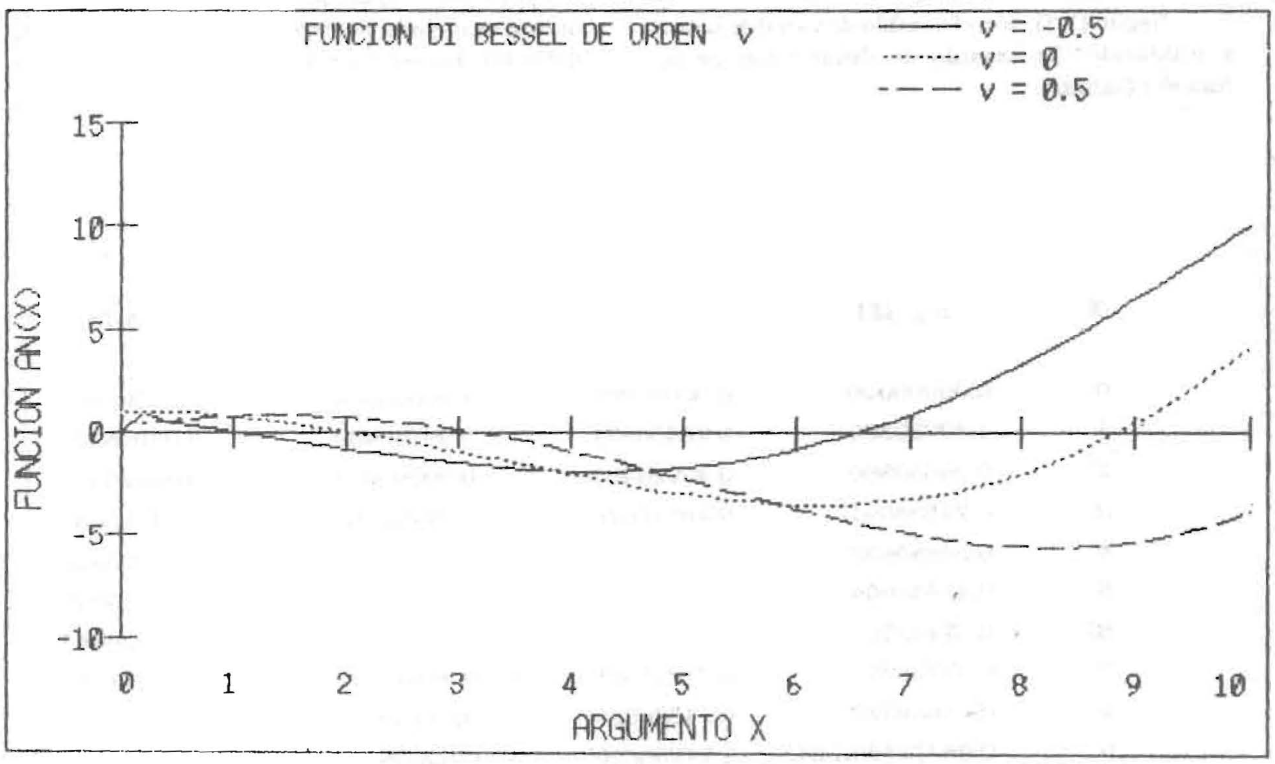

Fig. 1.- Función $A_v(x)$; $v = \pm 1/2, 0$

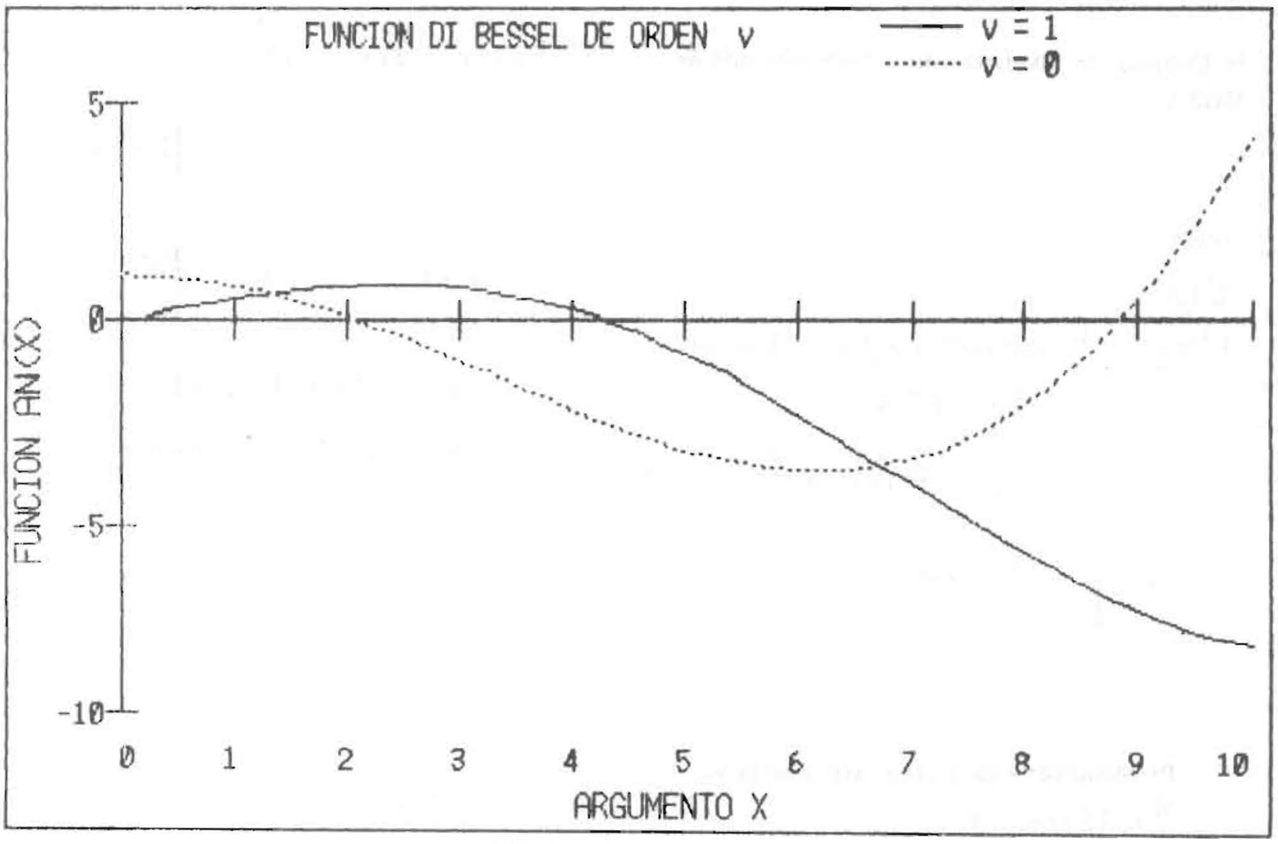

Fig. 2.- $A_\nu(x)$; $\nu = 0$, $\nu = 1$

Transformada Integral Di-Bessel

La Transformada integral cuyo núcleo es la función Di-Bessel definida por [3, p.71]

$$E_\nu[f(x);\ t] = \int_0^\infty x\ A_\nu(tx)\ f(x)dx \quad (7.1)$$

si f es seccionalmente continua en $[0,\infty)$ y de orden $e^{-\alpha\sqrt{x}}$.

En este trabajo encontramos la fórmula de inversión para la transformada Di-Bessel.

Teorema:

Si f(x) es seccionalmente continua en $[0,\infty)$ y de orden $e^{-\alpha\sqrt{x}}$.

$$\bar{f}(t) = E_\nu[f(x);\ t] =$$

$$\int_0^\infty x\ f(x)\ A_\nu(tx)dx \quad (7.2)$$

entonces:

$$f(x) = \int_0^\infty t\ \ \bar{f}(t)$$

$$G^{3,0}_{0,4}\left(\frac{(xt)^2}{4}\ \middle|\ \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}\right) dt \quad (7.3)$$

Demostración:

Aplicando la transformada de Mellin a (7.2) con

$$f^*(s) = M[f(x);\ x \leftrightarrow s],$$

$$k^*(s) = M[A_\nu(x);\ x \leftrightarrow s] \quad (7.4)$$

se obtiene,

$$f^*(2-s)\ k^*(s) = \bar{f}^*(s) \quad (7.5)$$

En (7.5), reemplazando s por (2-s), despejando $f^*(s)$, al sustituir $L^*(s) = \dfrac{1}{k^*(2-s)}$, y aplicar la fórmula de inversión de la transformada de Mellin, se obtiene,

$$f(x)=\int_0^{\infty} t\ \bar{f}(t)\ L(xt)dt$$

donde

$$L^{*}(s) = \frac{2^{-1}(1/4)^{-(s/2)}\ \Gamma(\nu/2+s/2)\ \Gamma(\nu/2+s/2)\ \Gamma(-\nu/2+s/2)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{s}{2}+1\right)}$$

$$Re\left(\frac{\nu}{2}\right) < Re\left(1-\frac{s}{2}\right) < 1$$

$$L(x)=M^{-1}\left[\frac{1}{k^{*}(2-s)};s\leftrightarrow x\right]= G^{3,0}_{0,4}\left(\frac{x^2}{4}\middle|\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\ \frac{-\nu}{2}\ \frac{-\nu}{2}\right)$$

Propiedades de la transformada E_ν

(i) $E_\nu[f(ax);\ t] =$

$$\frac{1}{a^2}E_\nu[f(x);\ t/a] \quad (a>0) \qquad (8.1)$$

(ii) Si f es una función que satisface (7.1) y $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$ existe entonces :

$$E_\nu[f'(x),t]= -\left\{E_\nu\left[\frac{f(x)}{x};t\right]+\frac{t}{2\nu}E_{\nu-1}[f(x);t]+\frac{t}{2\nu}E_{\nu+1}[f(x);t]\right\} \qquad (8.2)$$

(iii) $$E_\nu\left[e^{-px}f(x);\ t\right] = \mathcal{L}\left[x\ A_\nu(tx)\ f(x);\ P\right]. \qquad (8.3)$$

(iv) $$E_\nu\left[x^{-1}f(x);t\right]= -\frac{1}{\gamma}\left\{(\nu-1)t^2\ E_{\nu+2}\left[xf(x);\ t\right]+\alpha t\ E_{\nu+1}\left[f(x);\ t\right] +2\nu t^2\ E_\nu\left[x\ f(x);\ t\right]+\beta t E_{\nu-1}\left[f(x);t\right]+ (\nu+1)t^2E_{\nu-2}\left[x\ f(x);\ t\right]\right\} \quad Re(\nu)>2$$

Si $\alpha=2(\nu-1)(\nu+1)(2\nu+1)$,

$\beta = 2(\nu-1)(\nu+1)(1-2\nu)$

$$\gamma = 4\nu^3(\nu-1)(\nu+1) \qquad (8.4)$$

(v) $$E_\nu\left[x^{t-2}\ f(x);\ t\right] = M\left[A_\nu(tx)\ f(x);\ t\right] \qquad (8.5)$$

Las propiedades (8.1) - (8.5) se deducen de (1.1) y las propiedades de $A_\nu(x)$ [3, p.67].

Transformada Di Bessel de funciones

(i)

$$E_\nu\left[x^\nu\ H(a-x);\ t\right] = \frac{t^\nu a^{2\nu+2}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+2)}\ {}_0F_3\left(-;\ \nu+2,\ \nu+1;\ 1:\ -\frac{a^2t^2}{4}\right), \quad \nu>0 \qquad (9.1)$$

donde H(a-x) es la función de Heaviside.

(ii) Usando la integral (5.1.3)

$$E_\nu\left[x^\nu e^{-a^2x^2};\ t\right]=\frac{t^\nu}{\left(2a^2\right)^{\nu+1}\ \Gamma(\nu+1)}\ {}_0F_2\left(-\ ;\ 1,\ \nu+1;-\ \frac{t^2}{4a^2}\right)$$

$$a>0,\ b>0, Re(\nu)>-1 \qquad (9.2)$$

(iii)

$$E_\nu\left[e^{-ax};\ t\right]= a^{-2}\left(\frac{t}{2a}\right)^{\nu}\frac{(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}$$

$$ {}_2F_3\left(\begin{matrix}\frac{\nu}{2}+1,\ \frac{\nu}{2}+\frac{3}{2} \\ \nu+1, \nu+1,\ 1\end{matrix};\ -\frac{t^2}{a^2}\right)$$

$$Re(2+\nu)>0 \qquad (9.3)$$

(iv)

$$E_0\left[x^{-1}\ e^{-ax},\ t\right] =$$

$$\frac{1}{a}\ {}_1F_2\left[1/2,\ 1,\ 1:\ -\frac{t^2}{a^2}\right],\quad a>0 \qquad (9.4)$$

Un operador Di Bessel modificado

Sea f(x) una función que satisface (7.1) se define:

$$D_{\eta,\alpha}[f(t);\ x] =$$

$$2^{\alpha}x^{-\alpha}\int_0^{\infty} t^{-\alpha+1}\ f(t)\ A_{2\eta+\alpha}(tx)dt \qquad (10.1)$$

el cual puede escribirse como:

$$D_{\eta,\alpha}[f(t);\ x] =$$

$$2^{\alpha}\ x^{-\alpha}\ E_{2\eta+\alpha}\left[t^{-\alpha}f(t);\ x\right],$$

despejando $E_{2\eta+\alpha}$ y denotando,

$$D_{\eta,\alpha}[f(t);\ x] = \bar{f}_{\eta,\alpha}(x)$$

Aplicando la fórmula de inversión de la transformada Di-Bessel,

$$f(t) = 2^{-\alpha}t^{\alpha}\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}\ \bar{f}_{\eta,\alpha}(x)$$

$$G^{3,0}_{0,4}\left(\frac{x^2\ t^2}{4}\ \middle|\ \overline{\qquad\qquad} \atop \frac{2\eta+\alpha}{2},\ \frac{2\eta+\alpha}{2},-\frac{2\eta+\alpha}{2},-\frac{2\eta+\alpha}{2}\right)dx \qquad (10.2)$$

Operadores de integración fraccional simétricos que involucran Funciones Di-bessel como núcleo

Varias definiciones de operadores de integración fraccional han sido dadas por muchos autores entre ellos: Kober, Erdelyi, Kalla [7,8,9,10], Lowndes [11]. Los cuales son muy utilizados en Matemáticas Aplicadas.

En este trabajo se han definido otros operadores de integración fraccional que tienen como núcleo la Función Di-Bessel $A_\nu(x)$, para una función f(x) tal que las integrales tengan sentido.

$$\mathcal{J}_k(\eta,\alpha)\ f(x) = 2^{\alpha}\ x^{-2\eta-2\alpha}\ k^{1-\alpha}$$

$$\int_0^{x} u^{1+2\eta}\ (x^2-u^2)^{(\alpha-1)/2}$$

$$A_{\alpha-1}\left\{k\ \sqrt{x^2-u^2}\right\}\ f(u)du \qquad (11.1)$$

$$\mathcal{G}_k(\eta,\alpha)\ f(x) = 2^{\alpha}\ x^{2\eta}\ k^{1-\alpha}$$

$$\int_x^{\infty} u^{1-2(\alpha+\eta)}(u^2-x^2)^{(\alpha-1)/2}$$

$$A_{\alpha-1}\left\{k\ \sqrt{u^2-x^2}\right\}\ f(u)\ du,$$

$$\alpha>0,\ k\geq 0,\ \eta> -\frac{1}{2} \qquad (11.2)$$

Algunas propiedades básicas de estos operadores son:

(i) $$\mathcal{I}_0(\eta,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ I_{\eta,\alpha}\ ;$$

$$\mathcal{G}_0(\eta,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}K_{\eta,\alpha} \qquad (11.3)$$

donde $I_{\eta,\alpha}$ y $K_{\eta,\alpha}$ son los operadores de Erdélyi-Kober.

Estas propiedades se demuestran tomando límite cuando $k\to 0$ en (11.1) y (11.2).

$\mathcal{I}_0(\eta,0)=\mathcal{G}_0(\eta,0)=I$ donde I es el Operador Identidad.

(ii) Si $\mathcal{I}_k(\eta,\alpha)\ \{f(x)\}=g_{k,\eta,\alpha}(x)$ entonces

$$\mathcal{I}_k(\eta,\alpha)\ \{f(ax)\} =$$

$$g_{k/a,\eta,\alpha}(ax),\quad k/a\geq 0 \qquad (11.4)$$

Demostración:

$$\mathcal{I}_k(\eta,\alpha)\{f(ax)\}=2^{\alpha}\ x^{-2\eta-2\alpha}\ k^{1-\alpha}$$

$$\int_0^x u^{1+2\eta}(x^2-u^2)^{(\alpha-1)/2}$$

$$A_{\alpha-1}\left\{k\ \sqrt{x^2-u^2}\right\}\ f(au)\ du \qquad (11.5)$$

$$= 2^{\alpha}\ (ax)^{-2\eta-2\alpha}\left(\frac{k}{a}\right)^{1-\alpha}$$

$$\int_0^{ax} t^{1+2\eta}\ \left[(ax)^2-t^2\right]^{(\alpha-1)/2}$$

$$A_{\alpha-1}\left\{\frac{k}{a}\ \sqrt{(ax)^2-t^2}\right\}f(t)\ dt \qquad (11.6)$$

(iii) Si $\mathcal{G}_k(\eta,\alpha)\ \{f(x)\}=h_{k,\eta,\alpha}(x)$ entonces

$$\mathcal{G}_k(\eta,\alpha)\ \{f(ax)\}=h_{(k/a),\eta,\alpha}(ax),$$

$$k/a\ \geq 0 \qquad (11.7)$$

(iv) $$\mathcal{I}_k(\eta,\alpha)\left\{x^{\sigma}\ f(x)\right\}=$$

$$x^{\sigma}\ \mathcal{I}_k(\eta+\sigma/2,\alpha)\ \{f(x)\} \qquad (11.8)$$

Demostración:

$$\mathcal{I}_k(\eta,\alpha)\left\{x^{\sigma}\ f(x)\right\}=$$

$$2^{\alpha}\ k^{1-\alpha}\ x^{-2\eta-2\alpha}\int_0^x u^{1+2\eta}(x^2-u^2)^{(\alpha-1)/2}$$

$$A_{\alpha-1}\left\{k\ \sqrt{x^2-u^2}\right\}u^{\sigma}\ f(u)\ du \qquad (11.9)$$

$$=x^{\sigma}\ 2^{\alpha}\ k^{1-\alpha}\ x^{-2(\eta+\sigma/2)}$$

$$\int_0^x u^{1+2(\eta+\sigma/2)}(x^2-u^2)^{(\alpha-1)/2}$$

$$A_{\alpha-1}\left\{k\sqrt{x^2-u^2}\right\} f(u)\,du \qquad (11.10)$$

(v) $$\mathcal{G}_k(\eta,\alpha)\left\{x^{\sigma} f(x)\right\} =$$

$$x^{\sigma}\,\mathcal{G}_k(\eta-\sigma/2,\alpha)\, f(x) \qquad (11.11)$$

La demostración es similar a la anterior.

(vi) $$\int_0^{\infty} x\, g(x)\, \mathcal{F}_k(\eta,\alpha)\, f(x)dx =$$

$$\int_0^{\infty} x\, f(x)\, \mathcal{G}_k(\eta,\alpha)\, g(x)\, dx \qquad (11.12)$$

La demostración de esta propiedad se obtiene con un cambio en el orden de integración.

(vii) Los operadores $\mathcal{F}_k(\eta,\alpha)$ y $\mathcal{G}_k(\eta,\alpha)$ pueden expresarse a través de la función $G^{m,n}_{p,q}$ de Meijer.

$$\mathcal{F}_k(\eta,\alpha)\, f(x) =$$

$$2^{2\alpha-1} x^{-2\eta-2\alpha}\, k^{2-2\alpha} \int_0^{x} u^{1+2\eta}$$

$$G^{1,0}_{0,4}\left(\frac{k^2}{4}(x^2-u^2)\,\middle|\,\overline{\alpha-1,\ 0,\ 0,\ \alpha-1}\right)$$

$$f(u)\,du \qquad (11.13)$$

$$\mathcal{G}_k(\eta,\alpha)\, f(x) =$$

$$2^{2\alpha-1}\, k^{2-2\alpha}\, x^{2\eta} \int_x^{\infty} u^{1-2\eta-2\alpha}$$

$$G^{1,0}_{0,4}\left(\frac{k^2}{4}(u^2-x^2)\,\middle|\,\overline{\alpha-1,\ 0,\ 0,\ \alpha-1}\right)$$

$$f(u)\,du \qquad (11.14)$$

Operadores de integración fraccional no simétricos

Si reemplazamos $k=\lambda x$, $\lambda \geq 0$ en (11.1) y (11.2) encontramos, después de un cambio de variable los operadores de integración fraccional definidos por

$$R_{\lambda}(\eta,\alpha)\, f(x) =$$

$$2^{\alpha-1}\,\lambda^{1-\alpha}\, x^{-(\alpha+\eta)} \int_0^{x} u^{\eta} \left[\frac{x-u}{x}\right]^{(\alpha-1)/2}$$

$$A_{\alpha-1}\left\{\lambda\sqrt{x^2-xu}\right\} f(u)\,du \qquad (12.1)$$

$$Q_{\lambda}(\eta,\alpha)\, f(x) = 2^{\alpha-1}\,\lambda^{1-\alpha}\, x^{\eta}$$

$$\int_x^{\infty} u^{-(\alpha+\eta)} \left[\frac{u-x}{x}\right]^{(\alpha-1)/2}$$

$$A_{\alpha-1}\left\{\lambda\sqrt{xu-x^2}\right\} f(u)\,du \qquad (12.2)$$

$\alpha > 0$, $\eta > 1/2$, $\lambda \geq 0$ y $A_{\alpha-1}(x)$ es la función Di-Bessel de orden $\alpha-1$.

Cuando $\lambda \to 0$ los operadores antes definidos se reducen a las siguientes expresiones que involucran a los operadores de integración fraccional de Erdélyi-Kober.

$$R_0(\eta,\alpha)\ f(x) = \frac{x^{-(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\ I_x^{\alpha}\ x^{\eta}\ f(x) \quad (12.3)$$

$$Q_0(\eta,\alpha)\ f(x) = \frac{x^{\eta}}{\Gamma(\alpha)}\ K_x^{\alpha}\ x^{-(\alpha+\eta)}\ f(x) \quad (12.4)$$

Algunas propiedades de estos operadores son:

(i) $R_\lambda(\eta,\alpha)\ \{x^{\sigma}\ f(x)\} =$

$$x^{\sigma}\ R_\lambda(\eta+\sigma,\alpha)\ f(x) \quad (12.5)$$

(ii) $Q_\lambda(\eta,\alpha)\ \{x^{\sigma}\ f(x)\} =$

$$x^{\sigma}\ Q_\lambda(\eta-\sigma,\alpha)\ f(x) \quad (12.6)$$

Demostración:

(i) $R_\lambda(\eta,\alpha)\{x^{\sigma}\ f(x)\} =$

$$2^{\alpha-1}\ \lambda^{1-\alpha}\ x^{-(\alpha+\eta)} \int_0^x u^{\eta} \left[\frac{x-u}{x}\right]^{(\alpha-1)/2} A_{\alpha-1}\left\{\lambda\sqrt{x^2-xu}\right\} u^{\sigma}\ f(u)\ du \quad (12.7)$$

$R_\lambda(\eta,\alpha)\{x^{\sigma}\ f(x)\} =$

$$x^{\sigma}\ 2^{\alpha-1}\ \lambda^{1-\alpha}\ x^{-(\alpha+\eta+\sigma)} \int_0^x u^{\eta+\sigma} \left[\frac{x-u}{x}\right]^{(\alpha-1)/2} A_{\alpha-1}\left\{\lambda\sqrt{x^2-xu}\right\} f(u)\ du \quad (12.8)$$

(ii) En forma análoga a (i).

(iii)

$$R_\lambda(\eta,\alpha) f(ax) = 2^{\alpha-1}\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1-\alpha} (ax)^{-(\alpha+\eta)} \int_0^{ax} t^{\eta}\left[\frac{ax-t}{ax}\right]^{(\alpha-1)/2} A_{\alpha-1}\left\{\frac{\lambda}{a}\sqrt{a^2x^2-axt}\right\} f(t)\ dt \quad (12.9)$$

Demostración:

$R_\lambda(\eta,\alpha)\ f(ax) =$

$$2^{\alpha-1}\ \lambda^{1-\alpha}\ x^{-(\alpha+\eta)} \int_0^x u^{\eta}\left[\frac{x-u}{x}\right]^{(\alpha-1)/2} A_{\alpha-1}\left\{\lambda\sqrt{x^2-xu}\right\} f(au)\ du \quad (12.10)$$

$$R_\lambda(\eta,\alpha) f(ax) = 2^{\alpha-1}\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1-\alpha} (ax)^{-(\alpha+\eta)} \int_0^{ax} t^{\eta}\left[\frac{ax-t}{ax}\right]^{(\alpha-1)/2} A_{\alpha-1}\left\{\frac{\lambda}{a}\sqrt{(ax)^2-axt}\right\} f(t)\ dt \quad (12.11)$$

(iv)

$$Q_\lambda(\eta,\alpha)\ f(ax) = 2^{\alpha-1}\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1-\alpha} (ax)^{\eta} \int_{ax}^{\infty} t^{-(\alpha+\eta)}\left[\frac{t-ax}{ax}\right]^{(\alpha-1)/2} A_{\alpha-1}\left\{\frac{\lambda}{a}\sqrt{axt-(ax)^2}\right\} f(t)\ dt \quad (12.12)$$

Referencias Bibliográficas

1. EXTON, HAROLD.: "The Di-Bessel Funtion". Indian J.Pure Appl. Math. 11(7), 1980, 856 - 862.
2. LEBEDEV, N. N. : "Special Functions and their Applications". Dover Publications Inc., New York, 1965.
3. SARABIA, J.: "Sobre la función de Exton(Di-Bessel)". Rev. Tec. Fac. Ingeniería. L.U.Z. Vol 10, 1987.
4. NISHIMOTO, K.: "Fractional Calculus", Descartes Press, Koriyama, Japan , Vol I 1984, Vol. II, 1987.
5. ABRAMOWITZ AND SEGUN: "Handbook of Mathematical Functions". Dover Publications, Inc. New York, 1972.
6. SALINAS, S.A.: "Operadores de Integración Fraccional que involucran la Función Di-Bessel". Tesis de Magister. Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería. División de Postgrado, 1991, p. 136.
7. KALLA, S.L.: "Fractional Operators involving Fox's H-Function". Acta Mexicana Cie.Tecn. 3, 1969, 117 - 122.
8. KALLA, S. L.: "Integral Operators involving Fox's H-Function - II". Notas Cie. 7, 1969, 72 - 79.
9. KALLA,S. L.: "Fractional Integration Operators involving hypergeometric functions". Univ. Nac. Tucumán. Rev. Ser.A20, 1970, 93 - 100.
10. KALLA, S.L.: "Fractional Integration Operators involving hypergeometric functions - II". Acta Mexicana Cie. Tecn. 3,1969, 1 - 5.
11. LOWNDES, J.S.: "A generalization of the Erdelyi - Kober Operators". Proc. Edinburgh Math. Soc., 17, 1970, 139 - 148.

Recibido el 17 de Abril de 1991
En forma revisada el 20 de Enero de 1993