Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 12, No. 2, 1989

ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE CONJUNTOS HIPERBOLICOS

Rueda S., A.D.
División de Postgrado
Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

RESUMEN

Este trabajo muestra que un conjunto compacto f-hiperbólico K, donde f es un difeomorfismo definido sobre una variedad diferenciable admite una vecindad de f, V(f) y un abierto U, de tal forma que para todo $g \in V(f)$ existe un compacto K_g contenido en U y $f|_K$ es topológicamente conjugado con $g|_{K_g}$. No se concluye de esto que si K es el conjunto $\Omega(f)$ de puntos no errantes de f; K_g debe ser igual a $\Omega(g)$.

ABSTRACT

This work shows for f, a diffeomorfisme defined on a differentiable manyfold, that for a compact f-hyperbolic set K, there exists a neighbourhood V(f) and an open set U containing K such that when g V(f) there exists a compact set K_g contained in U and $f|_K$ topologically conjugated with g K_g. If K is $\Omega(f)$, the set of nonwandering points of f, then is not necessary that $K_g = \Omega(g)$.

1. INTRODUCCION

En la actualidad la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias, hace énfasis en el estudio de clases de ellas, lo más amplias posibles, que posean propiedades observables en toda otra ecuación suficientemente parecida; en la consideración de que si un sistema dinámico refleja un fenómeno "real"; pequeñas modificaciones, provenientes por ejemplo de limitantes en la medición, no pueden producir cambios cualitativos en su dinámica. En particular resulta útil mostrar la estabilidad estructural de conjuntos hiperbólicos (ver teorema 2) de un difeomorfismo definido en una variedad diferenciable. Esto es, sin mucha precisión, que f, contagia con su dinámica, alrededor del compacto hiperbólico, a todo otro difeomorfismo g convenientemente C^1- vecino de f. Esto permitirá considerar el caso de un difeomorfismo de Anosov probado en [1] y el de un punto hiperbólico aislado.

2. HIPERBOLICIDAD

Sea K contenido en M, compacto, f-invariante; donde M es una variedad de Riemann y $f: M \dashrightarrow M$ es un difeomorfismo tal que para todo $k \in K$, tenemos:

$T_k M = I_k \oplus E_k$ y además

1) $\|f^{n'}(e)\| \leq sr^n \|e\|$ para todo $e \in E(K)$ $n \geq 0$

2) $\|f^{-n'}(i)\| \leq sr^n \|i\|$ para todo $i \in I(K)$ $n \geq 0$

para algún s R^+ y algún r (0,1).

Bajo estas condiciones K se dice hiperbólico y se pueden probar los siguientes:

TEOREMA 1

Dado K, hiperbólico compacto, existe un abierto U tal que K está contenido en U y existe una función de Lyapounov de dos variables definida en KxU.

TEOREMA 2.

Dado un conjunto compacto K_f, f-hiperbólico; existe un abierto U conteniendo a K_f y una C^1 - vecindad N(f) tal que si g N(f); existe un compacto K_g contenido en U, g-hiperbólico y un homeomorfismo $h: K_f \dashrightarrow K_g$ tal que si x K_f, entonces la trayectoria de f por cualquier x K_f es conjugada por h con la trayectoria de g que pasa por y=h(x).

La demostración del teorema 1 y la del siguiente Lema se siguen esencialmente de los métodos de [1] (ver [2]).

LEMA 1

Si K es un subconjunto compacto f-hiperbólico entonces existe un abierto U, abierto en M tal que K está contenido en U y existe un m Z y existe una vecindad N(f) tal que si $g \in N(f)$ entonces:

$||g^{m'}(u)|| > 2||u||$ o, $||g^{-m'}(u)|| > 2||u||$ para todo $u \in TU$.

PRUEBA DEL TEOREMA 2

A partir de la proposición 12 de [1] se puede afirmar la existencia de $\theta > 0$ tal que para todo μ, $0 < \mu < \theta$, existe $V(f)$ y x K, entonces existe al menos un $y_g \in U$ tal que $||f^n(x)-g^n(y_g)|| < \mu$ para todo $n \in Z$. Es fácil observar que designando

$K_g = \{y \in M/$ para algún $x \in K$, $||f^n(x)-g^n(y_g)|| < \mu$

para todo $n \in Z\}$ y $K_\mu = \{y \in M/d(K,y) < \mu\}$, entonces K_g está contenido en K_μ para todo $g \in V(f)$.

Infortunadamente esta asignación de y_g no es necesariamente biunívoca para todo $x \in K$ y para todo $g \in V(f)$. Sin embargo se demostrará que escogiendo convenientemente esta $V(f)$ se alcanza esa biunivocidad pudiéndose definir así para todo $g \in V(f)$ una función $h(x) = y_g$.

Mostraremos la siguiente propiedad que llamaremos de expansividad: Existe $V(f)$ y $u > 0$ tal que todo $g \in V(f)$ y todo $x,y \in K_g$ entonces

$||g^n(x)-g^n(y)|| < u$ para todo $n \in Z$ implica $x=y$.

Del LEMA 1 y de la compacidad de K_μ se puede ver que existe un $\epsilon > 0$ y una vecindad $V_o(f)$ tal que para todo $g \in V_o(f)$ y para una extensión de $g^{m'}$ a una cierta vecindad de K en R^n se tiene:

$$||g_z^{m'}(z-w)|| > 2\,||z-w|| \text{ si } z \in Kg \text{ y } ||z-w|| < .$$

Similarmente existe un ϵ_1 y $V_1(f)$ tal que si $g \in V_1(f)$ entonces para cada componente g_j^m con $1 \leq j \leq n$ se tiene:

$$||g_j^{m''} s_j(z-w,z-w)|| \leq \frac{1}{2n}\,||z-w|| \text{ si } ||z-w|| < \epsilon_1 \quad z,w,s_j \quad M.$$

Razonando por absurdo supongamos que existe $V(f)$ tal que para todo $u > 0$ existe $g \in V(f)$ y existen $x,y \in Kg$ tales que:

$||g^n(x)-g^n(y)|| < u$ para todo $n \in Z$. Tomemos $u < \epsilon$ y $u < \epsilon_1$. De la compacidad de K_μ existen z,w tales que $||z-w|| \geq ||g^n(z)-g^{-n}(w)||$ para todo $n \in Z$. Al hacer un desarrollo de Taylor de g_j^m (m del lema 1) en z se tendría:

$$||g_j^m(z)-g_j^m(w)|| = ||g_j^{m'} z(z-w) + 1/2\, g_j s_j^{m''}(z-w,z-w)||.$$

Esto significa $||z-w|| \geq ||g^m(z)-g^m(w)|| \geq ||g_z^{m'}(z-w)|| - 1/2 \sum_{j=1}^{n} |g_j^{m''} s_j(z-w,z-w)|$ y $||z-w|| \geq ||g^m(z)-g^m(w)||$

$\geq 2||z-w|| - 1/4||z-w||$ lo cual es absurdo.

Si tomamos $\mu < u$ la unicidad de y_g permite definir una función $h:K \dashrightarrow K_g$ que resulta inyectiva porque f en particular es expansiva.

Consideremos en K_g una sucesión $\{x_i\}$ convergente a x y $\tau < \mu$.
Entonces existen $y_i = h(x_i)$ tales que:

$||f^n(x_i) - g^n(h(x_i))|| < \tau < \mu$ entonces:

$$\lim_{i\to\infty} ||f^n(x_i) - g^n(h(x_i))|| \leq \tau < \mu,$$

$$||f^n(\lim_{i\to\infty} x_i) - g^n(\lim_{i\to\infty} h(x_i))|| < \mu$$

$||f^n(x) - g^n(\lim_{i\to\infty} h(x_i))|| < \mu$, pero esto

implica la continuidad de h porque $\lim_{i\to\infty} h(x_i) = h(x)$.

Entonces $h:K \dashrightarrow K_g$ resulta un homeomorfismo tal que $||f^{n+1}(x)-g^{n+1}(h(x))|| < \mu$ para todo $n \in Z$

o lo que es lo mismo $||f^n(f(x))-g^n(g(h(x)))|| < \mu$, $n \in Z$, pero esto significa que $h(f(x)) = g(h(x))$,

$x \in K$. Es decir h es una conjunción entre $f|_K$ y $g|_{Kg}$.

La g-hiperbolicidad de K_g resulta de los siguientes hechos:

a) K_g es g-invariante pues para $y \in K_g$ existe $x \in K$ tal que $h(x)=y$; y para todo $n \in Z$ se tiene $g^n(y) = (hfh^{-1})(y) = h(f^n(x))$ y puesto que K es invariante por f entonces $f^n(x) \in K$ es decir $g^n(y)$ K_g.

b) La existencia de una forma cuadrática no degenerada tal que $\beta(g')-\beta > 0$ en TU, propiedad que se obtiene razonando como en [1]

c) Si $y \in K_g$, entonces $g^n(y)$ pertence a una vecindad de $f^n(x)$, para todo $n \in Z$ y por la hiperbolicidad de x, la signatura de la forma cuadrática es una constante a lo largo de ambas trayectorias.

Las condiciones 1) y 2) de la hiperbolicidad de K_g se obtienen como en [1].

Observaciones

No se dan sobre K hipótesis adicionales a la f-hiperbolicidad y a su compacidad y no se puede inferir de lo probado que si K es un conjunto f-invariantes aislado entonces K_g sea también aislado.

REFERENCIAS

[1] LEWOWICZ, L.: "*Puntos Hiperbólicos*". L.U.Z. Maracaibo. 1977.

[2] RUEDA, A.D.: "*Estabilidad Estructural de Conjuntos Hiperbólicos*". Tesis P.E.A.M. L.U.Z. Maracaibo. 1988.

Recibido el 10 de Mayo de 1989