



# REVISTA TÉCNICA

## DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

Una Revista Internacional Arbitrada  
que está indizada en las publicaciones  
de referencia y comentarios:

- SCOPUS
- Compendex
- Chemical Abstracts
- Metal Abstracts
- World Aluminium Abstracts
- Mathematical Reviews
- Petroleum Abstracts
- Current Mathematical Publications
- MathSci
- Revenct
- Materials Information
- Periódica
- Actualidad Iberoamericana

UNIVERSIDAD DEL ZULIA



Quiébranos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia

Patrimonio del Estado Zulia e  
interés Cultural desde 2001

Fecha de Construcción:  
1954-1958

Diseño: Arquitecto Carlos Raúl  
Villanueva, con elementos  
novedosos de adaptación  
climática.

Policromía de la obra: Artista  
Zuliano Víctor Valera.

## Comparison of performance measures in non-Markovian queues.

Lagos Dafne<sup>ID</sup>, Mancilla Rodrigo<sup>ID</sup>, Leal Paola<sup>ID</sup>

Departamento de Procesos Industriales, Facultad de Ingeniería, Universidad Católica de Temuco, Rudecindo Ortega # 02950, Temuco, Chile.

\*Autor Contacto: dlagos@uct.cl

<https://doi.org/10.22209/rt.ve2019a16>

Recepción: 20/06/2019 | Aceptación: 03/11/2019 | Publicación: 01/12/2019

### Abstract

Systems that involve waiting before attention are framed within the Theory of queues. This work seeks to compare performance measures in non-Markovian queues. For this, single-tail systems were simulated, which were formed from the combinations of time distributions between arrivals (normal, lognormal, Weibull or triangular), their parameters (Test 1, Test 2 or Test 3), and the distributions of service times (constant or triangular). Some results show that when comparing each performance measure individually, for systems that maintain constant arrival parameters, service distributions, and vary the distribution of time between arrival, their joint behavior is statistically different. On the other hand, the systems that included normal or uniform input distributions, setting the distribution parameters with one or two standard deviations ( $1\sigma$ ;  $2\sigma$ ), and the service distribution, showed that in the evaluation of each measure of particular performance, had statistically equal values. In the case of the systems that included the parameters with the highest standard deviation and the lognormal and Weibull, or lognormal and uniform distributions, they presented statistically similar behavior in three of four performance measures.

**Keywords:** queue theory; waiting lines; performance; simulation of discrete events; non-Markovian queues.

## Comparación de las medidas de desempeño en Colas no Markovianas

### Resumen

Los sistemas que implican una espera antes de la atención se enmarcan dentro de la Teoría de colas. Este trabajo busca comparar las medidas de desempeño en colas no markovianas. Para ello se simularon sistemas de cola única, que se conformaron a partir de las combinaciones de las distribuciones de tiempos entre llegadas (normal, lognormal, Weibull o triangular), sus parámetros (Prueba 1, Prueba 2 o Prueba 3), y las distribuciones de los tiempos de servicio (constante o triangular). Algunos resultados muestran que al comparar individualmente cada medida de desempeño, para sistemas que mantienen constante los parámetros de llegadas, las distribuciones de servicio, y varían la distribución de tiempos entre llegada, su comportamiento conjunto es estadísticamente distinto. Por su parte, los sistemas que incluyeron distribuciones de entrada normal o uniforme, fijando los parámetros de la distribución con una o dos desviaciones estándar ( $1\sigma$ ;  $2\sigma$ ), y la distribución de servicio, mostraron que en la evaluación de cada medida de desempeño particular, tenían valores estadísticamente iguales. En el caso de los sistemas que incluían los parámetros con la mayor desviación estándar y las distribuciones lognormal y Weibull, o lognormal y uniforme, presentaron comportamiento estadísticamente similar en tres de cuatro medidas de desempeño.

**Palabras clave:** teoría de colas; líneas de espera; desempeño; simulación de eventos discretos; colas no Markovianas.

## Introducción

Según Liu *et al.* [1], la teoría de colas es una teoría matemática del sistema de servicio estocástico. Por su parte, Hamdan *et al.* [2] indican que la teoría de colas es una rama del conocimiento en la investigación de operaciones que se refiere al análisis de colas cuando un cliente llega a un centro de servicio y debe hacer cola en una línea para obtener algún servicio. Hay muchas formas posibles de clasificar los sistemas de colas, por ejemplo, según el tipo de proceso de entrada (Poisson, k Erlang, etc.), la disciplina de servicio (FCFS, LCFS, colas de prioridad, etc.), la capacidad de la cola destinado a clientes en espera (sistemas que no permiten esperar el servicio, la capacidad finita o la capacidad infinita de la cola) y así sucesivamente [3]. Dada la naturaleza del sistema que analiza un modelo de cola, la variedad de temáticas particulares en los que se aplica es amplia. Entre ellas, es posible mencionar aplicaciones como: sistemas de producción controlado por Kanban [4], análisis de topologías de redes complejas [5], optimización de la gestión de una farmacia ambulatoria [6], asignación óptima de canales de los sistemas de colas del Sistema Integrado de Defensa de Misiles Balísticos en capas (BMDS) [1], evaluación del rendimiento en sistema firewall de redes móviles [7], mejorar el sistema de atención al cliente en el mostrador de pagos en una cooperativa escolar [2]. El estudio matemático de las líneas de espera se ocupa principalmente de las medidas de rendimiento de la cola [8]. Las medidas de desempeño (o rendimiento) típicas son la longitud promedio de la cola ( $L_q$ ) y el tiempo de espera promedio ( $W_q$ ) [9], además de la longitud promedio de clientes en el sistema ( $L$ ) y el tiempo de espera promedio en el sistema ( $W$ ). También es posible establecer medidas como es la longitud de la cola de equilibrio esperada y la probabilidad de estado estable de que un cliente tendrá que esperar para comenzar su servicio [10]. En condiciones generales, las medidas de desempeño se analizan suponiendo que los tiempos entre llegadas de los clientes o los tiempos de servicio son aleatorios, típicamente llegadas de Poisson y tienen tiempos de servicio con distribución exponencial [11].

Ahora bien, en el contexto real, esta suposición no se cumple en muchos casos. Esto lleva a que, en algunos modelos de colas, sea necesario modelar el proceso de entrada y el proceso de servicio. Sin embargo, uno de los problemas más desafiantes es determinar el proceso de entrada y la distribución del tiempo de servicio en la práctica [12]. Cuando un sistema de espera no tiene una contraparte, definida en la literatura, para estudiar sus parámetros de desempeño; la simulación de eventos discretos (DES, por sus siglas en inglés) pasa a ser herramienta de análisis efectiva. DES es una evolución de la simulación de Montecarlo, donde se aplican herramientas matemáticas y estadísticas, para realizar corridas de simulación de una variable probabilística [13]. Por lo general, el objetivo de la simulación de eventos discretos es observar la respuesta del sistema a posibles alteraciones, anticipar escenarios futuros y determinar la

mejor alternativa en función al objetivo del sistema [14]. Debido a lo anterior, en este trabajo se busca analizar comparativamente el comportamiento resultante de las medidas de desempeño, como los tiempos promedio y cantidad de clientes promedio en un sistema de colas, al variar la naturaleza de la distribución de probabilidad de la llegada de clientes y la distribución de los tiempos de servicio, en sistemas específicos no markovianos. Para recrear el comportamiento de las medidas de desempeño, se utiliza la simulación de eventos discretos. De acuerdo a ello este artículo está organizado de la siguiente manera: la sección 2 ofrece una descripción general de trabajos anteriores relativos a los análisis y técnicas aplicadas para el estudio de los sistemas de colas. La sección 3 describe la metodología y los supuestos considerados. En la sección 4 se presentan y analizan los resultados obtenidos. Finalmente, la sección 5 entrega las conclusiones.

En relación a la evolución de los análisis y técnicas aplicadas para el estudio de los sistemas de colas es posible mencionar, entre otros, los trabajos de: Zhang & Hou [15], quienes analizaron una cola M/G/1 con vacaciones de trabajo e interrupción de vacaciones. Usaron el método de una variable suplementaria y el método analítico-matricial, y obtuvieron la distribución de la longitud de la cola y el estado del servicio en una época arbitraria en condiciones de estado estacionario.

Alves *et al.* [16] presentaron un método mejor a las relaciones tabuladas para distintos casos. Se busca calcular los límites superiores de rendimiento del número promedio en la cola y el tiempo promedio de espera en sistemas Markovianos heterogéneos de servidores múltiples. Además, correlacionaron la calidad de la aproximación con el grado de heterogeneidad del sistema. Zhang & Hou [17] obtuvieron la distribución de la longitud de la cola con el método de variable suplementaria, combinado con el método analítico-matricial y la técnica de censura. También lograron la distribución del tamaño del sistema en la época previa a la llegada. Para su estudio consideraron una la cola MAP/G/1 con vacaciones de trabajo e interrupción de vacaciones.

Ma *et al.* [18] usaron un proceso de nacimiento y muerte, y generaron las distribuciones de probabilidad de la longitud de la cola estacionaria y el tiempo de espera en el modelo de cola Geom/Geom/1 con probabilidad de entrada variable. También construyeron información de casos especiales del modelo estudiado, considerando la aplicación de diferentes distribuciones de probabilidad de entrada, que condujeron a varios modelos de colas específicos conocidos. Luo *et al.* [19] utilizaron la teoría de descomposición de probabilidad y el proceso de renovación, para estudiar: i) el sistema de llegada tardía con acceso retrasado (LAS-DA) y ii) el sistema de llegada temprana (EAS), a partir de una cola Geo/G/1 de tiempo discreto con vacaciones aleatorias. Para ambos casos, obtuvieron una solución recursiva para la distribución de longitud de la cola en forma arbitraria. Además,

se presentaron varias medidas de rendimiento, como la probabilidad potencial de bloqueo, el período de encendido, la duración promedio de la cola, entre otras.

Li *et al.* [20] estudiaron una cola M/M/1 con interrupción de vacaciones de trabajo. Para su análisis consideraron que, si a la llegada de un cliente el servidor está ocupado, este cliente se uniría a la órbita de tamaño infinito. Los clientes en la órbita intentarán ser atendidos uno por uno cuando el servidor esté inactivo. En estado estable, obtienen las funciones generadoras de probabilidad del número de clientes en la órbita. También desarrollaron varias medidas de rendimiento del sistema.

Li *et al.* [21] consideraron un modelo de aproximación de una red de colas M/M/n/m-FCFS, que se desarrolló para maximizar la utilización y las ganancias mediante el análisis del tiempo de cola y la longitud de la cola de los productos bajo las condiciones de restricción. En su estudio, aplicaron una metaheurística híbrida para resolver el modelo de aproximación logrando determinar la tasa de servicio y la asignación de la memoria intermedia del sistema de red en cola. Para la evaluación de la efectividad del método propuesto, compararon resultados experimentales numéricos extensos del modelo de aproximación con simulación de eventos discretos en el software Arena. Madankan [22] tomó en consideración una clase general de un sistema de colas con múltiples tipos de trabajo y facilidad de servicio flexible. Además utilizó una política de control estocástico para determinar la pérdida de rendimiento en la cola M/M/1 de varias clases. En su base el sistema considerado es originalmente un proceso de decisión de Markov (MDP). Su estudio mostró que los límites óptimos de la longitud promedio de la cola para cualquier política no inactiva se pueden encontrar por un factor de las tasas de servicio.

## Materiales y Métodos

### Distribución de probabilidad

En un sistema de colas no markoviano, es decir, cuando los tiempos entre llegadas y/o los de servicio no tengan distribuciones exponenciales [23], es básico conocer la naturaleza de la distribución, para lograr generar las medidas de desempeño del sistema. Para efectos del análisis que se realizará en este documento, se trabajará con las distribuciones: i) Normal, ii) Weibull, iii) Uniforme, iv) Lognormal, y v) Triangular.

La distribución normal es una distribución de tipo continua, con función de densidad de probabilidad dada por la ecuación (1):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad \text{con } -\infty < x < \infty \quad (1)$$

donde  $\mu$  es la media,  $\sigma^2$  es la varianza de la distribución,  $\pi = 3.14159$ ,  $e = 2.71828$ .

La distribución de probabilidad normal queda definida completamente para la combinación particular

de valores de la media y la varianza. Si la media es cero y la varianza es uno, entonces se habla de una distribución normal estándar o típica.

La distribución Weibull, al igual que la distribución normal, es una distribución de tipo continua, con función de densidad de probabilidad dada por la ecuación (2):

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

donde  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$  son parámetros de la función.

A su vez, la media  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2$  se presentan en el conjunto de ecuaciones (3):

$$\mu = \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad \sigma^2 = \alpha^{-2/\beta} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[ \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right\} \quad (3)$$

La distribución uniforme se caracteriza por que cada elemento  $x_i$  presenta la misma probabilidad. Esta distribución presenta un comportamiento discreto y también uno de tipo continuo. En el caso continuo, su función de densidad de probabilidad está dada por la ecuación (4):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} & A \leq x \leq B \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4)$$

donde los valores de A y B, representan los valores extremos que puede tener la variable  $x_i$ .

La media  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2$  se obtiene de la ecuación (5):

$$\mu = \frac{A+B}{2} \quad \sigma^2 = \frac{(B-A)^2}{12} \quad (5)$$

La distribución lognormal es una distribución de tipo continua, con función de densidad de probabilidad dada por la ecuación (6):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\ln(x)-\mu]^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6)$$

La media  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2$  se obtiene de la ecuación (7):

$$\mu = e^{\mu + (\sigma^2/2)} \quad \sigma^2 = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (7)$$

La distribución triangular es una distribución de tipo continua, con función de densidad de probabilidad dada por la ecuación (8):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & \text{si } a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & \text{si } c \leq x \leq b \end{cases} \quad (8)$$

La media  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2$  se obtiene de la ecuación (9):

$$\mu = \frac{a+b+c}{3} \sigma^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{18} \quad (9)$$

**Simulación de la cola**

Para la generación de un sistema de colas, se requiere establecer la cantidad de servidores que prestarán el servicio, la configuración de estos servidores (serie o paralelo), la política de atención de los clientes en la cola, y el tamaño de la cola. Además, se debe contar con la distribución de probabilidad de los tiempos entre llegadas de los clientes al sistema, y la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio. El caso de análisis se basa en un sistema de atención telefónica de clientes, donde los clientes que requieren de servicio acceden a una cola de espera única e infinita, y son seleccionados para ser atendidos de acuerdo a una política de atención FIFO (primero en llegar, primero en ser atendido). El objeto del estudio es poder comparar el resultado de las medidas de desempeño, al variar la naturaleza de la distribución de probabilidad de la llegada de clientes y la distribución de los tiempos de servicio, donde las distribuciones de probabilidad consideradas son no markovianas. Se estudian 4 distribuciones no markovianas, formuladas a partir del mismo conjunto de datos para iniciar el proceso con distribuciones que contienen media y varianza equivalentes. Las características de las distribuciones de entrada y de servicio que serán utilizadas en el análisis, son presentadas en la Tabla 1 y Tabla 2 respectivamente.

**Tabla 1.** Características de la distribución de probabilidad de la llegada de clientes.

Distribución de probabilidad de la llegada de clientes (minutos)	Parámetros		
	Prueba 1 (1σ)	Prueba 2 (2σ)	Prueba 3 (3σ)
Normal	μ=0,53; σ=0,145	μ=0,53; σ=0,145	μ=0,53; σ=0,435
Lognormal	μ=0,53; σ=0,145	μ=0,53; σ=0,29	μ=0,53; σ=0,435
Uniforme	a=0,27; b=0,77	a=0,26; b=1,03	a=0,21; b=1,27
Weibull	α=3,77; β=0,56	α=2,96; β=0,88	α=4,94; β=2,07

En la Tabla 1, el concepto de Prueba 1, 2 ó 3, implica tomar en consideración el mismo valor de la media μ para cada situación, pero la desviación estándar σ varía. En el caso de la prueba 2, la desviación estándar es 2σ, lo que es equivalente a decir que en esta prueba la desviación estándar es dos veces su valor inicial (Prueba 1). El caso 3σ, indica tres veces su valor inicial.

**Tabla 2.** Características de la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio.

Distribución de probabilidad (minutos)	Parámetros
Constante	μ=27,5; σ=0
Triangular	a=6; moda=27,5; b=49

La simulación del sistema de cola se llevará a cabo a través de simulación de eventos discretos, y se utilizará el Software Simio versión 10. Se estudiarán como sistemas de colas, distintas combinaciones de distribución de llegada – parámetros de prueba y distribución de servicio. Esto genera veinticuatro sistemas de colas distintas.

**Resultados y Discusión**

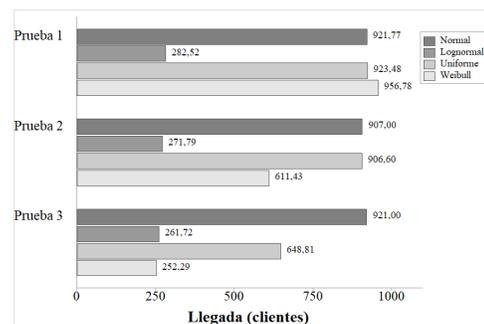
El análisis inicial de los datos de simulación para la distribución de los tiempos entre llegadas de clientes, en los casos de 2σ y 3σ (prueba 2 y 3), para la distribución Normal presentó valores de tiempo negativos. Estos valores no son aplicables al sistema en estudio. Debido a ello, se consideró el valor máximo de desviación estándar posible, sin que la distribución Normal arroje valores de tiempo negativos. El resto de los factores se mantuvo igual. Los valores ajustados de la distribución normal, según las condiciones iniciales descritas en la Tabla 1, son presentados en la Tabla 3.

**Tabla 3.** Valores ajustados de las condiciones de entrada de la distribución normal.

Tiempo entre llegada de clientes (minutos)	Parámetros		
	Prueba 1 (1σ)	Prueba 2 (2σ)	Prueba 3 (3σ)
Normal	μ=0,53; σ=0,145	μ=0,53; σ=0,16	μ=0,53; σ=0,16

El comportamiento gráfico del promedio de la llegada de clientes, tomando en consideración lo

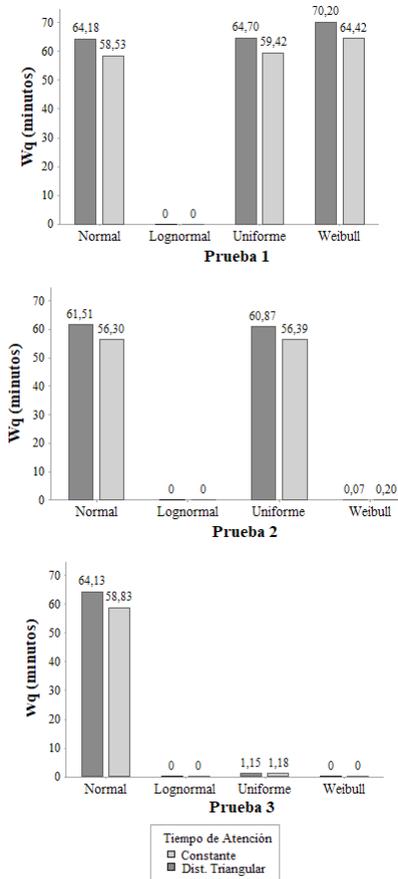
establecido en las Tablas 1, 2 y 3, es mostrado en la Figura 1.



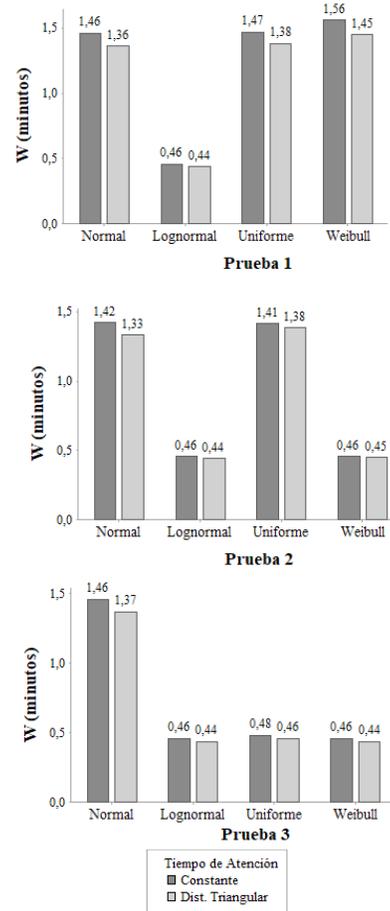
**Figura 1.** Valores promedio de la cantidad de clientes que llegan al sistema.

El resultado del test Anova, con  $\alpha = 5\%$ , para comparar la cantidad promedio de llegadas según el tipo de distribución utilizada, al cambiar la varianza pero utilizando el mismo valor medio (prueba 1, 2 y 3) arrojó el rechazo de la hipótesis  $H_0$  en todos los casos, y por tanto, el comportamiento de las medias no es equivalente para todas las distribuciones. Debido a ello, se aplica el Análisis HSD Tukey, con  $\alpha = 5\%$ , para identificar si existen pares de distribuciones que presenten un comportamiento similar. En el caso donde se aplicó la Prueba 1 y la Prueba 2, se observó que las distribuciones Normal y Uniforme se comportan de forma similar en sus valores medios. En el caso de la Prueba 3, todas las distribuciones se comportan de forma diferente.

En la Figura 2, se muestra el comportamiento del tiempo promedio en cola ( $Wq$ ), mientras que en la Figura 3, se presenta el tiempo promedio en el sistema ( $W$ ). Para ambas figuras, las condiciones generales aplicada son las indicadas en las Tablas 1, 2 y 3.



**Figura 2.** Valores del tiempo promedio de los clientes en la cola, cuando los servidores presentan distribución constante, y cuando presentan distribución triangular.



**Figura 3.** Valores del tiempo promedio de los clientes en el sistema, cuando los servidores presentan distribución constante, y cuando presentan distribución triangular.

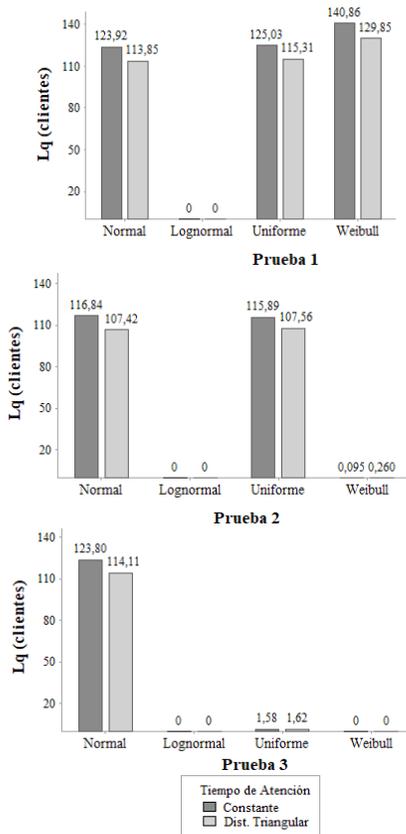
La aplicación del test Anova para comparar el comportamiento del tiempo promedio en cola ( $Wq$ ), de acuerdo a la distribución de llegada, cuando se fija la distribución del tiempo de servicio en Constante o Triangular, y los parámetros de prueba en 1, 2 ó 3, indicó el rechazo de la hipótesis  $H_0$ , y por tanto que en cada grupo el tiempo promedio no se comporta de manera equivalente. Luego, en la tabla 4, se entrega la identificación de aquellos sistemas que presentan comportamiento similar, resultado del Análisis HSD Tukey, con  $\alpha = 5\%$ .

El resultado del test Anova para comparar el comportamiento del tiempo promedio en el sistema ( $W$ ), de acuerdo a la distribución de llegada, cuando se fija la distribución del tiempo de servicio en Constante o Triangular, y los parámetros de prueba en 1, 2 ó 3, indicó el rechazo de la hipótesis  $H_0$ , para cada grupo, con lo que el tiempo promedio en el sistema no se comporta de manera similar. Los resultados de la comparación de sistemas equivalente, según el análisis HSD Tukey con  $\alpha = 5\%$ , para el tiempo promedio en el sistema, tienen el mismo comportamiento que los resultados del tiempo promedio en la cola, mostrados en la Tabla 4.

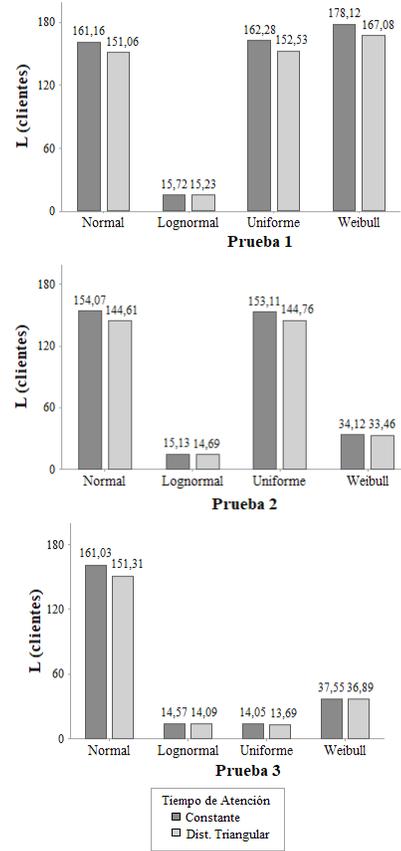
**Tabla 4.** Resultado del análisis HSD Tukey para el tiempo promedio en la cola según tipo de distribución de entrada y servicio.

Distribución de servicio	Prueba	Distribución de llegada
Constante	Prueba 1	Normal - Uniforme
	Prueba 2	Normal - Uniforme
	Prueba 3	Lognormal - Weibull
Triangular	Prueba 1	Normal - Uniforme
	Prueba 2	Normal - Uniforme Lognormal - Weibull
	Prueba 3	Lognormal - Weibull

En la Figura 4, se muestra el comportamiento de la cantidad promedio de clientes en la cola ( $L_q$ ), mientras que en la Figura 5, se presenta la cantidad promedio de clientes en el sistema ( $L$ ). Para ambas figuras, las condiciones generales aplicadas son las indicadas en las Tablas 1, 2 y 3.



**Figura 4.** Valores de la cantidad promedio de clientes en la cola, cuando los servidores presentan distribución constante, y cuando presentan distribución triangular.



**Figura 5.** Valores de la cantidad promedio de clientes en el sistema, cuando los servidores presentan distribución constante, y cuando presentan distribución triangular.

La aplicación del test Anova para comparar el comportamiento de la cantidad promedio de clientes en la cola ( $L_q$ ) de acuerdo a la distribución de llegada, cuando se fija la distribución del tiempo de servicio en Constante o Triangular, y los parámetros de prueba en 1, 2 ó 3, indicó el rechazo la hipótesis  $H_0$  para todos los grupos, por tanto estos no presentan el mismo comportamiento. Los resultados del Análisis HSD Tukey, con  $\alpha = 5\%$ , coinciden con los resultados del tiempo promedio en la cola ( $W_q$ ), salvo en el grupo que presenta el servicio constante y distribución de llegada bajo los datos de la Prueba 3. Para el caso de cantidad de clientes en cola, su número promedio es equivalente cuando las distribuciones de entrada son: i) lognormal o Weibull, ii) lognormal o uniforme, o bien iii) Weibull o uniforme. Esta última combinación no presenta el mismo desempeño al medir el tiempo promedio en cola.

Por su parte, la información obtenida del test Anova para comparar el comportamiento de la cantidad promedio de clientes en el sistema ( $L$ ), de acuerdo a la

distribución de llegada, cuando se fija la distribución del tiempo de servicio en Constante o Triangular, y los parámetros de prueba en 1, 2 ó 3, indicó rechazar la  $H_0$ , y por tanto, que todos los grupos no tiene el mismo valor promedio. En la tabla 5, se identifican aquellos sistemas que presentan comportamiento similar, como resultado de Análisis HSD Tukey, con  $\alpha = 5\%$ .

**Tabla 5.** Resultado del análisis HSD Tukey para la cantidad promedio de clientes en el sistema según tipo de distribución de entrada y servicio.

Distribución de servicio	Prueba	Distribución de llegada
Constante o Triangular	Prueba 1	Normal - Uniforme
	Prueba 2	Normal - Uniforme
	Prueba 3	Lognormal - Uniforme

De acuerdo a la Tabla 5, al comparar los dos casos de distribución de servicio, los pares de distribuciones de llegadas según las condiciones particulares de entrada son idénticos para ambos.

Finalmente, se realizó un análisis Anova para las medidas de desempeño, al comparar los distintos servicios, para la misma distribución específica de entrada. Con  $\alpha$  de 5%, se establece que hay diferencia significativa entre las medias de cada grupo en estudio.

## Conclusiones

Para el proceso de estudio de las medidas de desempeño ( $W$ ,  $Wq$ ,  $L$ ,  $Lq$ ) se simuló sistema de cola única, que se conformaron a partir de las combinaciones de las distribuciones de llegada, los parámetros de dichas distribuciones, y las distribuciones de los tiempos de servicio. Para ello, se establecieron 4 distribuciones de tiempos entre llegadas distintas: normal, lognormal, Weibull y triangular); 3 conjuntos de parámetros diferentes para las distribuciones de llegada: Prueba 1 con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ , Prueba 2 con media  $\mu$  y desviación estándar  $2\sigma$ , Prueba 3 con media  $\mu$  y desviación estándar  $3\sigma$ ; y 2 distribuciones distintas para los tiempos de servicio: distribución constante y distribución triangular. Con ellos se generaron 24 modelos particulares de cola no Markoviana. Las conclusiones del comportamiento de las medidas de desempeño para los modelos desarrollados se pueden expresar como sigue:

a) Al comparar el tiempo promedio en cola ( $Wq$ ), para sistemas que mantienen constante los parámetros de las llegadas y las distribuciones de servicio, y se hace variar la distribución de tiempos entre llegada, se determina que su comportamiento en conjunto es estadísticamente distinto. Lo mismo sucede para las medidas  $W$ ,  $L$  y  $Lq$ .

b) Al estudiar en pares los sistemas de colas que

presentaban un comportamiento estadísticamente igual en el mismo tiempo promedio en el sistema ( $W$ ), cuando se varía la distribución de entrada, manteniendo constante los parámetros de la distribución, y la distribución de servicio, se determinó que al aplicar los parámetros de la Prueba 1, las distribuciones normal y uniforme presentan el mismo comportamiento. Si se consideran los parámetros de la Prueba 2, las distribuciones normal y uniforme, y las distribuciones lognormal y Weibull presentan el mismo resultado. Finalmente, si se consideran los parámetros de la Prueba 3, las distribuciones lognormal y Weibull, entregan los mismos valores. Sin embargo, las distribuciones lognormal y uniforme, también entregan un valor equivalente para  $W$ , al aplicar los parámetros de la Prueba 3, pero solo en el caso de tener una distribución constante en el tiempo de servicio. Estos resultados se repiten al hacer las mediciones del tiempo promedio en cola ( $Wq$ ).

c) Al analizar la cantidad promedio de clientes en la cola ( $Lq$ ) y establecer los pares en los sistemas de colas que presentaban un comportamiento estadísticamente igual, se obtuvo que las relaciones son las mismas que se encontraron para  $W$  y  $Wq$ , salvo en las colas que incluían una distribución de servicio constante, y los parámetros de llegada de la Prueba 3. En este caso, las colas que presentan distribuciones de llegadas lognormal y Weibull, o lognormal y uniforme, o bien, Weibull y uniforme, se comportan estadísticamente iguales.

d) Al contrastar los valores promedio de clientes en el sistema ( $L$ ) y buscar los pares de sistemas que presentan el mismo comportamiento, se determinó que al aplicar la Prueba 1 o Prueba 2, ellos son los que incluyen distribuciones normal y uniforme para los tiempos entre llegadas. Si se aplica la Prueba 3, entonces las distribuciones son la lognormal y la uniforme. Este resultado es independiente de la distribución del tiempo de servicio que se tomen en cuenta.

Al comparar la cantidad promedio de llegadas según el tipo de distribución se observó que las cuatro distribuciones en conjunto no presentan el mismo comportamiento en términos estadísticos. Sin embargo, para los sistemas que incluían los parámetros de la Prueba 1 o Prueba 2, se estableció que las distribuciones normal y uniforme se comportaron de modo equivalente.

Al comparar las distintas distribuciones de servicio para la misma distribución específica de entrada, se estableció que hay diferencia significativa entre las medias de cada grupo en estudio.

## Referencias Bibliográficas

- [1] Li L., Liu F., Long G., Zhao H. y Mei Y.: Performance analysis and optimal allocation of layered defense M/M/N queueing systems. Math. Probl. Eng., Vol. 2016 (2016).

- [2] Hamdan A.R., Ishak R. y Usop M.F.: Effective school cooperative-mart queuing system. *Malaysian J. Fundam. Appl. Sci.*, Vol. 13, No. SI (2017) 412–415.
- [3] Dorda M. y Teichmann D.: On two modifications of E-r/E-s/1/m queuing system subject to disasters. *Acta Polytech. Hungarica*, Vol. 12, No. 2 (2015) 141–158.
- [4] Al-Hawari T., Aqlan F. y Al-Araidah O.: Performance analysis of an automated production system with queue length dependent service rates. *Int. J. Simul. Model.*, Vol. 9, No. 4 (2010) 184–194.
- [5] Khalid R., Nawawi M.K.M., Kawsar L.A., Ghani N.A., Kamil A.A. y Mustafa A.: A discrete event simulation model for evaluating the performances of an M/G/C/C state dependent queuing system. *Plos One*, Vol. 8, No. 4 (2013).
- [6] Bahadori M., Mohammadnejhad S.M., Ravangard R. y Teymourzadeh E.: Using queuing theory and simulation model to optimize hospital pharmacy performance. *Iran. Red Crescent Med. J.*, Vol. 16, No. 3 (2014).
- [7] Xuan S., Man D., Zhang J., Yang W. y Yu M.: Mathematical Performance evaluation model for mobile network firewall based on queuing. *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, Vol. 2018, (2018).
- [8] Bishop S.A., Eke K.S., Agarana M.C. y Olanrewaju M.O.: Mathematical analysis of the queuing system and application. *Int. J. Adv. Appl. Sci.*, Vol. 6, No. 5 (2019) 67–69.
- [9] Rangel Martinez L. y Alvarado Valencia J.A.: The consequences of heavy-tailed service time distribution on a basic queuing model and its performance indicators. *Ing. E Investig.*, Vol. 30, No. 2 (2010) 136–146.
- [10] Kambo N.S., Rangan A. y Moghimihadji E.: Approximations to performance measures in queuing systems. *South African J. Ind. Eng.*, Vol. 23, No. 3 (2012) 30–41.
- [11] He D., Li R., Huang Q. y Lei P.: Maximum entropy principle based estimation of performance distribution in queueing theory. *Plos One*, Vol. 9, No. 9 (2014).
- [12] Li C., Okamura H. y Dohi T.: Parameter estimation of M-t/M/1/K queueing systems with utilization data. *IEEE Access*, Vol. 7, (2019) 42664–42671.
- [13] Carillos J.A.C., Núñez E.D.R. y Ledesma J.D.F.: Aplicación de un modelo de simulación discreta en el sector del servicio automotor. *Rev. Ing. Ind.*, Vol. 1, No. 1 (2013) 51–61.
- [14] Aboul-Hassan A.K., Rabia S.I. y Taboly F.A.: Performance evaluation of a discrete-time Geo([X])/G/1 retrial queue with general retrial times. *Comput. Math. With Appl.*, Vol. 58, No. 3 (2009) 548–557.
- [15] Zhang M. y Hou Z.: Performance analysis of M/G/1 queue with working vacations and vacation interruption. *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 234, No. 10 (2010) 2977–2985.
- [16] Alves F.S.Q., Yehia H.C., Pedrosa L.A.C., Cruz F.R.B. y Kerbache L.: Upper bounds on performance measures of heterogeneous M/M/c queues. *Math. Probl. Eng.*, (2011).
- [17] Zhang M. y Hou Z.: Performance analysis of MAP/G/1 queue with working vacations and vacation interruption. *Appl. Math. Model.*, Vol. 35, No. 4 (2011) 1551–1560.
- [18] Ma Z., Yue W. y Su X.: Performance analysis of a GEOM/GEOM/1 queueing system with variable input probability. *J. Ind. Manag. Optim.*, Vol. 7, No. 3 (2011) 641–653.
- [19] Luo C., Tang Y., Chao B. y Xiang K.: Performance analysis of a discrete-time Geo/G/1 queue with randomized vacations and at most J vacations. *Appl. Math. Model.*, Vol. 37, No. 9 (2013) 6489–6504.
- [20] Li T., Zhang L. y Gao S.: Performance of an M/M/1 retrial queue with working vacation interruption and classical retrial policy. *Adv. Oper. Res.*, (2016).
- [21] Li C., Zhang J. y Li B.: Performance analysis and optimization of queueing network production systems considering non-conforming products rework and departure. *J. Adv. Mech. Des. Syst. Manuf.*, Vol. 12, No. 2, (2018) 1–15.
- [22] Madankan A.: Performance bounds and suboptimal policies for multi-class queue. *Bull. South Ural State Univ. Ser. Math. Model. Program. Comput. Softw.*, Vol. 12, No. 1 (2019) 44–54.
- [23] Hillier F. and Lieberman G.: *Introducción a la Investigación de Operaciones*, 9th. McGraw-Hill Education, Mexico, 2010.



UNIVERSIDAD  
DEL ZULIA

---

## **REVISTA TECNICA**

DE LA FACULTAD DE INGENIERIA  
UNIVERSIDAD DEL ZULIA

**Volumen Especial, 2019, No. 1, pp. 154 - 262**\_\_\_\_\_

*Esta revista fue editada en formato digital y publicada en Diciembre de 2019, por el **Fondo Editorial Serbiluz**, Universidad del Zulia. Maracaibo-Venezuela*

[www.luz.edu.ve](http://www.luz.edu.ve)  
[www.serbi.luz.edu.ve](http://www.serbi.luz.edu.ve)  
[www.produccioncientificaluz.org](http://www.produccioncientificaluz.org)