REVISTA DE LA UNIVERSIDAD DEL ZULIA 3ª época
Ciencias del Agro, Ingeniería y Tecnología ///
Año 2 Nº 2, En-Abr 2011, 155 - 183
ISSN 0041-8811 ~ Depósito legal pp 76-654

Variación de niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de Ingeniería

*Héctor José Bohórquez**
*Lissette Franchi***

RESUMEN

El razonamiento lógico empleado en la solución de problemas geométricos presenta cinco niveles, según la teoría de Van Hiele, siendo en el cuarto nivel cuando el estudiante adquiere la capacidad para comprender y realizar demostraciones geométricas, habilidad exigida a estudiantes de la Facultad de Ingeniería de LUZ. El objetivo del estudio fue comparar el nivel de razonamiento en estudiantes antes y después de cursar geometría, a fin de diagnosticar si existían diferencias significativas entre ambos momentos y determinar el nivel de razonamiento geométrico alcanzado por los alumnos. Se trató de un estudio descriptivo, secuencial de campo. Se utilizó la Prueba de Geometría de van Hiele, elaborada por el Dr. Zalman Usiskin y sus colaboradores, traducida al español por los autores. La muestra constó de 164 alumnos. Los resultados mostraron que en general los alumnos ingresaron con niveles de razonamiento entre 1 y 2, alcanzando al final del curso niveles entre 2 y 3, concluyéndose que hubo un incremento estadísticamente significativo de la variable objeto de estudio pero que en general no se alcanzó el esperado nivel 4 de razonamiento de la escala.

PALABRAS CLAVE: Razonamiento geométrico, niveles de Van Hiele, ingeniería.

Ingenieros Civiles (LUZ, 1984). Mgs. en Matemática, Mención Docencia (LUZ, 2002). Docentes e Investigadores Titulares de la Universidad del Zulia.
*hbohorquez@fing.luz.edu.ve. **lfranchi@fing.luz.edu.ve.

RECIBIDO: 01-02-11 /// ACEPTADO: 03-03-11

Variation in Geometric Reasoning Levels among Engineering Students

ABSTRACT

The logical reasoning employed in solving geometric problems has five levels, according to Van Hiele's theory; the fourth level is when the student acquires the capacity to understand and perform geometric demonstrations, an ability required for students in the Engineering School at LUZ. The objective of this study was to compare the level of reasoning in students before and after studying geometry, in order to diagnose whether significant differences exist between these two moments and to determine the level of geometric reasoning achieved by the students. This is a descriptive, sequential field study. The Van Hiele Geometry Test was used, elaborated by Dr. Zalman Usiskin and his collaborators, translated to Spanish by the authors. The sample consisted of 164 students. Results showed that, in general, students enter with reasoning levels between 1 and 2, reaching levels between 2 and 3 at the end of the course. Conclusions are that there was a statistically significant increase in the variable under study, but in general, the hoped-for level 4 of reasoning on the scale was not achieved.

KEY WORDS: Geometrical reasoning, Van Hiele levels, engineering.

Introducción

Para nadie es un secreto la gama de dificultades y contradicciones del sistema educativo venezolano en general y del subsistema de educación universitaria en particular. Mostrar cifras y estadísticas de, por ejemplo, la prosecución estudiantil, sólo haría confirmar lo que a diario perciben no sólo quienes se desempeñan en la función docente, sino cualquier padre o madre de familia y, sobre todo, los propios alumnos.

A pesar de que se estén emprendiendo acciones a diferentes niveles, como la implementación de nuevas políticas educativas, reformas curriculares, creación de nuevas instituciones educativas, por mencionar algunas, se evidencia que los problemas educativos son ciertamente estructurales y no de fácil solución.

Acerca de la eficacia y pertinencia de las acciones emprendidas se puede discutir largamente. Si prestamos atención a quienes se sitúan dentro de la corriente posmodernista nos daremos cuenta de que, como nos señala Rigoberto Lanz (2007), el mundo que nos toca vivir es el de la incertidumbre, del caos y de lo relativo. Se trata de pensar en la incertidumbre, no como un dato circunstancial, no como un por ahora, sino como una condición sustancial del nuevo modo de vivir esta realidad, este mundo. De lo que se trata, concluye Lanz, es de enseñar la virtud más querida, más mimada, del hombre de hoy: su capacidad de apropiación, su capacidad de capturar experiencias de todo género; lo que debe enseñarse es la inteligencia y capacidad para apropiarse: apropiación de la experiencia del otro, sobre manera.

Los posmodernos son muy críticos, y no con poca razón, con respecto a las herramientas de la Modernidad, entre ellas la lógica, al menos la lógica tradicional. El mismo Lanz señala que las mentes demasiado lógicas, las mentes muy ecuacionadas, las mentes causa-efecto, las mentes lineales, las mentes simples, la pasan muy mal en un mundo caracterizado esencialmente por la lógica de la incertidumbre. Pensar en situación de incertidumbre, añade, actuar en contexto de incertidumbre, es, justamente, poder poner el pensamiento en capacidad de vibrar, de no sucumbir, de no conformarse con lo obvio, efectivamente, cuando no hay ecuación posible, cuando no hay linealidad posible, cuando no hay causa ni efecto.

Lo anterior no significa que quienes tengamos algún grado de responsabilidad con el hecho educativo virtualmente todos nos debamos sentir abrumados por la situación y crucemos los brazos esperando que los problemas se solucionen algún día. Es menester enfocarnos en aquellos aspectos sobre los cuales podemos y en consecuencia debemos tomar acciones para de alguna forma mejorar el desempeño de nuestros alumnos.

Sin pretender entrar en diatribas filosóficas, consideramos que, al menos en el dominio de la matemática, podemos pensar en términos de incertidumbre, podemos pensar transversalmente, podemos hacer un uso efectivo de la intuición, podemos incluso apropiarnos, como lo señala Lanz, de experiencias de todo tipo, sin olvidar, sin hacer a un lado, sin abandonar el razonamiento lógico riguroso. Estimular, propiciar, utilizar el pensamiento intuitivo, escudriñando diversas posibilidades, pensando en caminos que la "sana lógica" prohíbe, no hará sino enriquecer nuestra actividad matemática; pero, nuevamente, el escrutinio del razonamiento lógico formal es a todas luces, desde nuestra perspectiva, necesario.

De ahí entonces que la preocupación que todo docente de matemática en general, y de geometría en particular, tiene acerca de la capacidad de razonamiento de sus alumnos, sea legítima, piénsese en términos de Modernidad o de Posmodernidad.

Un aspecto importante del problema del razonamiento de los alumnos en geometría ya fue discutido en Bohórquez y Hernández (2003), al señalar al razonamiento común como obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría. Sin embargo, el razonamiento geométrico no se mide en términos de todo o nada, de si se tiene o no se tiene, de blanco o negro, sino que presenta gradaciones, estadios que se van alcanzando a medida que se avanza en el estudio de esta ciencia.

Salvando ciertas observaciones que algunos investigadores han efectuado, la gradación de niveles de razonamiento geométrico propuesta por los esposos Van Hiele goza desde hace muchos años de una aceptación generalizada. Su teoría, además de elegante e integral, ha demostrado su pertinencia como herramienta para comprender los problemas vinculados al razonamiento geométrico y emprender acciones para superarlos.

Los docentes de geometría en ingeniería nos enfrentamos cotidianamente con graves problemas de razonamiento por parte de la mayoría de los alumnos, y por tanto con la consecuente implicación en su desempeño geométrico. Con miras a superarlos se adoptan algunas medidas generales para tratar de involucrar al alumno en los principios básicos del razonamiento lógico riguroso, aunque con limitado éxito, es honesto admitirlo, si nos remitimos a los resultados de la prosecución estudiantil en la asignatura.

Hasta ahora, sin embargo, no se cuenta con un estudio que muestre claramente los distintos niveles de razonamiento geométrico que presentan los alumnos que se inician en el curso de geometría, como tampoco los que alcanzan al final del mismo. Un conocimiento al respecto brindaría al docente, por una parte, un diagnóstico general que le permita ubicarse mucho mejor dentro del panorama que tiene frente a sí cuando se inicia el curso; y por la otra, serviría como evaluación de la acción docente que se lleva a cabo en los cursos de geometría, en lo que al incremento del nivel de razonamiento geométrico de los alumnos se refiere.

Con base en lo expuesto anteriormente nos planteamos como objetivo de investigación determinar y comparar los niveles de razonamiento de van Hiele medidos en estudiantes de geometría de la Facultad de Ingeniería de LUZ antes y después de cursar la asignatura.

1. Referentes teóricos

Diferentes autores han abordado el problema del razonamiento en geometría, entre los cuales resaltan Fischbein y su *teoría de los conceptos figurales*, destacando la doble naturaleza de los conceptos geométricos en tanto que abstractos y al mismo tiempo evocativos de una figura concreta (Fischbein, 1993); Duval y su *modelo cognitivo del razonamiento geométrico* en el que señala cuatro tipos de aprehensiones cognitivas: perceptiva, secuencial, discursiva y operativa (Duval, 1995); y por último el modelo del pensamiento en geometría de los esposos van Hiele, ampliamente conocido y utilizado a nivel mundial y adoptado como modelo teórico para esta investigación.

1.1. Modelo del pensamiento en geometría de van Hiele

La que se conoce como teoría de niveles de van Hiele fue desarrollada por sus autores en tesis doctorales separadas presentadas en la Universidad de Utrecht en 1957. Pierre M. van Hiele (1957) se ocupa, en general, del problema de la *comprensión* en geometría, señalando que no hay que esperar diferencias esenciales entre *comprensión en geometría* y *comprensión en matemáticas en general* o incluso *comprensión en asignaturas no-matemáticas*.

Un niño tiene comprensión en un determinado campo de la geometría cuando, a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes.... Lo característico de la comprensión es pues que se van tanteando nuevas situaciones (van Hiele, 1957).

Se puede avanzar hacia el concepto de comprensión en geometría, señala van Hiele (1957), a través del estudio de la secuencia lógica, entendida ésta como una serie de silogismos en la que la conclusión de uno supone la premisa del siguiente. El objetivo de estas secuencias es partir de un determinado dato para llegar a conclusiones que se encuentran alejadas de este primer dato. Y observa que cuando el niño se enfrenta a una secuencia de este tipo, pueden darse los siguientes casos:

a. El alumno no entiende la secuencia porque no entiende el sentido de una o varias de las afirmaciones, resultando obvio que en tal caso carece de la suficiente comprensión en el terreno al que hacen referencia las afirmaciones.
b. El alumno no entiende la secuencia porque no ve la relación lógica entre las afirmaciones. En tal caso carece evidentemente de la suficiente comprensión en el terreno de las relaciones entre las afirmaciones.
c. El alumno no entiende la secuencia porque, a pesar de entender paso a paso la relación entre las distintas afirmaciones, no puede aceptar el hecho de que de las premisas se saque la conclusión hallada en último lugar. En este caso nos encontramos ante una falta de comprensión de la totalidad de la secuencia. Hay que observar sin embargo que en este caso la no-comprensión presupone sin embargo un cierto tipo de comprensión: la no-aceptación es consecuencia de una opinión que ha llegado a formarse. Puede ocurrir que el alumno dude de la conclusión basándose en ciertas experiencias; puede ocurrir también que experiencias con otras secuencias le hagan suponer que debe haber algún error en las relaciones.
d. Entender la secuencia no supone sin más el máximo grado de comprensión. Con el tipo de comprensión referido en c, como mucho se pueden formar sin ayuda secuencias como la indicada. El reconocimiento del tipo de secuencia requiere a su vez un grado superior de comprensión.

Los Van Hiele consideraron que el pensamiento matemático sigue un modelo que consta de dos partes, una descriptiva en la que identifica una secuencia de tipos de razonamiento llamados los "niveles de razonamiento", y otra, instructiva, que sugiere a los profesores directrices sobre cómo pueden ayudar a sus alumnos para que alcancen con más facilidad un nivel superior de razonamiento, las cuales reciben el nombre de "fases de aprendizaje".

Es el aspecto descriptivo el que interesa para efectos del presente estudio. En este sentido, la teoría consta de tres elementos: la existencia de niveles de razonamiento, las propiedades de esos niveles, y el paso de un nivel al siguiente.

Existe un total de cinco niveles, que se describen a continuación con base en lo señalado por Hoffer, citado por Usiskin (1982), complementado por Afonso (2003):

- Nivel 1 (reconocimiento). Los alumnos pueden aprender nombres de figuras y reconocer una forma como un todo (los cuadrados y los rectángulos parecen ser diferentes). Perciben las figuras geométricas globalmente por su forma y no por sus propiedades.
- Nivel 2 (análisis). Los alumnos pueden identificar propiedades de figuras (los rectángulos tienen cuatro ángulos rectos). Son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas.
- Nivel 3 (clasificación). Los alumnos pueden ordenar lógicamente las figuras y sus relaciones, pero no operan dentro de un sistema matemático (pueden seguir una deducción simple, pero no comprenden la demostración). Comienzan a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático. Son capaces de realizar razonamientos deductivos. Entienden el significado de una definición.
- Nivel 4 (deducción). Los alumnos comprenden el significado de la deducción y el rol de los postulados, de los teoremas, y de la demostración (pueden escribir demostraciones comprendiéndolas). Pueden realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones de varios pasos ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación.
- Nivel 5 (rigor). Los alumnos comprenden la necesidad del rigor y son capaces de hacer deducciones abstractas (puede entenderse la geometría no euclidiana). Son capaces de trabajar en distintos sistemas axiomáticos prescindiendo de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad matemática.

Dina van Hiele llamó a los niveles del 2 al 5, respectivamente, el aspecto de la geometría, la esencia de la geometría, comprensión de la teoría geométrica, y comprensión científica de la geometría. En realidad, los Van Hiele enumeraron los niveles del 0 al 4, pero la mayoría de los investigadores lo hacen del 1 al 5, tal y como se ha indicado, para permitir así la inclusión de un nivel 0 (previo al nivel 1). Pierre van Hiele no hace referencia en su tesis doctoral, ni en Van Hiele (1986), a la existencia de un nivel 0. No obstante, hoy en día se admite en general su existencia. Clements y Battista (1990) han descrito y definido el nivel 0 (pre-cognición) señalando que es característico de un sujeto que percibe las formas geométricas, pero presta atención a sólo un subconjunto de las características visuales de la forma: son incapaces de identificar muchas formas comunes. Mason (1997) al respecto señala que en ese nivel los aprendices pueden ver, por ejemplo, la diferencia entre triángulos y cuadriláteros centrando su atención en el número de lados de los polígonos pero no son capaces de distinguir entre un cuadrilátero y otro. En el presente estudio se admitió y tomó en cuenta la existencia del nivel 0.

Gutiérrez y Jaime (1995) amplían la descripción de los primeros cuatro niveles, en los siguientes términos.

Primer nivel

En la percepción global que se lleva a cabo en este nivel, el alumno puede incluir atributos que no sean característicos del concepto en cuestión. Por ejemplo, si mostramos siempre triángulos, con un lado horizontal, o triángulos equiláteros, puede que los alumnos no lleguen a reconocer como triángulos los no situados en esa posición o los de otro tipo. Esta limitación está fomentada por algunos profesores y por algunos libros de texto.

Otra característica es la percepción individual de las figuras; lo que se observa en una figura no se generaliza a todas las que son de esa misma clase.

También es frecuente que la consideración global del concepto no incluya propiedades fundamentales; de hecho, por lo general, las justificaciones se basan en la percepción visual y hacen referencia a objetos reales o simplemente se menciona el nombre del concepto.

Segundo nivel

El razonamiento propio de este nivel incluye el descubrimiento y la generalización de propiedades a partir de unos pocos casos.

Esta forma de trabajo, consistente en la comprobación en pocos ejemplos, es lo que normalmente se entiende como “demostración” en este nivel. Por ello, si pedimos, por ejemplo, la demostración de la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, los estudiantes se limitarán a dibujar uno o dos triángulos y medir sus ángulos; o bien dirán que en los triángulos los ángulos miden 60°, 60° y 60°, por lo que su suma es 180°.

Para definir un concepto se proporciona una lista de propiedades, en la cual puede que se haya omitido alguna necesaria y/o que se hayan incluido más de las imprescindibles.

La ausencia de capacidad para relacionar las propiedades que definen un concepto con las que definen otro origina que las clasificaciones que se comprenden sean las disjuntas, no asimilándose plenamente las inclusivas o las que tienen intersecciones parciales. Por ejemplo, se entiende perfectamente una clasificación de los triángulos en equiláteros, isósceles y escalenos cuando éstos se definen, respectivamente, como los triángulos con los tres lados iguales, dos lados iguales y uno desigual, y los tres lados desiguales. Pero si los alumnos han aprendido anteriormente esta clasificación, no aceptarán, con sus consecuencias, una modificación de la definición de triángulo isósceles como triángulo *con al menos dos lados iguales*, con lo cual los equiláteros se convierten en un caso particular de los isósceles.

Tercer nivel

La comprensión y posibilidad de establecer relaciones tiene, entre otras, las consecuencias siguientes: en las demostraciones el punto de partida suele ser la experimentación, pero se siente la necesidad de recurrir a alguna justificación general, basada en propiedades conocidas que conduzcan directamente al resultado; en particular, se pueden establecer y se buscan implicaciones simples entre resultados. Por ello, estos estudiantes son capaces de entender y reproducir una demostración formal, no compleja, cuando se la va explicando paso a paso, ya que entonces tan solo deben comprender la conexión o implicación directa entre una situación y la siguiente.

Se comprenden y utilizan las definiciones con un sentido matemático, como conjunto mínimo, necesario y suficiente para definir un concepto; por eso ya no se da una lista muy larga de propiedades como definición y se intenta incluir todas las necesarias. También se aceptan definiciones nuevas de conceptos conocidos, aunque impliquen alguna variación sobre las características previas. Por ejemplo, si el estudiante conocía la definición del triángulo isósceles como "triángulo con dos lados iguales y uno desigual" y se le introduce una variación de este concepto como triángulo que posee "al menos dos lados iguales", será capaz de emplear esta nueva definición.

Se comprenden y utilizan clasificaciones no exclusivas. Se establecen las relaciones entre los diversos conceptos a partir de sus definiciones. Por ejemplo, si se define rombo como cuadrilátero con todos sus lados iguales, los alumnos pueden comprender que todos los cuadrados son rombos pero no todos los rombos son cuadrados.

Cuarto nivel

Se efectúan demostraciones formales, encadenando diversas implicaciones simples para llegar desde la hipótesis hasta la tesis.

El avance del cuarto nivel, respecto al tercero, en relación con las definiciones, consiste en la utilización de su equivalencia, esto es, los estudiantes de este nivel pueden admitir y demostrar si dos conjuntos de condiciones corresponden al mismo concepto. Por ejemplo, decir "cuadrilátero con sus diagonales perpendiculares y que se cortan en su punto medio" es lo mismo que decir "cuadrilátero con los cuatro lados iguales".

Propiedades de los niveles

Dentro de su teoría, los Van Hiele señalan varias características de los niveles, a saber:

- Propiedad 1 (secuencialidad). Un alumno no puede estar en el nivel *n* de van Hiele sin haber pasado por el nivel.
- Propiedad 2 (adyacencia). En cada nivel de pensamiento se hace explícito lo que era implícito en el nivel anterior.
- Propiedad 3 (diferenciación). Cada nivel tiene su propia simbología y su propia red de relaciones.
- Propiedad 4 (separación). Dos personas que razonan dentro de niveles diferentes no pueden entenderse.

Usiskin (1982) ejemplifica estas propiedades de la siguiente manera. Considérese un estudiante que le señala a su profesor de geometría lo siguiente: "puedo entender una demostración cuando usted la hace en clase, pero no puedo hacerla en la casa". Este estudiante puede estar en el nivel 3 mientras que el profesor está operando en el nivel 4. La propiedad 4 indica que el estudiante no puede entender al profesor, y la propiedad 3 explica por qué no hay comprensión, pues el profesor está usando objetos (proposiciones, en el caso de la demostración) y una red de relaciones (la demostración en sí) que usadas de esa manera resulta incomprensible para el estudiante. Si el estudiante está en el nivel 3, entonces su red de relaciones consiste en el simple ordenamiento de proposiciones, y la propiedad 2 indica que ese ordenamiento, implícito en el nivel 3, se hace explícito en el nivel 4.

Paso de un nivel al siguiente

A diferencia de lo señalado por Piaget, los Van Hiele indican que el paso de un nivel al siguiente puede acelerarse a través de la instrucción. En este sentido, han dado explicaciones detalladas de cómo el docente debe dirigir a sus alumnos de un nivel al siguiente (Usiskin, 1982).

En general, según señalan Gutiérrez y Jaime (1995), los niveles no están asignados a una edad particular de los estudiantes, ocurriendo que algunos no superan nunca el segundo nivel, mientras que otros alcanzan el cuarto a los 14 ó 15 años. La enseñanza y la experiencia personal, agregan, son un factor importante en el progreso del razonamiento.

El modelo de Van Hiele ha despertado un interés creciente debido a que atiende al papel fundamental de las Matemáticas: el razonamiento. Un objetivo importante en cualquier ámbito de la enseñanza de las Matemáticas, es que los alumnos adquieran un nivel de razonamiento adecuado, además de determinar cómo actúan los alumnos y comparar y analizar cómo éstos se instruyen para pasar de un nivel a otro (Afonso, 2003).

No obstante, existen ciertos aspectos de la teoría para los cuales las investigaciones han mostrado resultados divergentes. En este sentido, Gutiérrez y Jaime (1995) indican que la propuesta original de los Van Hiele se decantaba por el paso brusco de un nivel al siguiente, esto es, un individuo comienza razonando según las características del primer nivel y llega un momento en el que ve la geometría de otra manera, desde la perspectiva del segundo nivel. Las investigaciones, sin embargo, han mostrado que no sucede así, sino que hay un período durante el cual aparecen razonamientos de dos niveles consecutivos. Algo parecido ocurre con la globalidad dentro de cada nivel. La globalidad supondría que una persona tiene el mismo nivel de razonamiento en todos los aspectos de la geometría. Nuevamente, las investigaciones parecen indicar que eso no sucede, que el nivel de razonamiento es local, o sea que si un individuo razona a cierto nivel en un concepto, por ejemplo, "polígonos", es posible que razone a otros niveles en otro concepto, por ejemplo, "isometrías". Advierten sin embargo los autores, que es importante tener en cuenta que en cualquier caso el paso de un nivel al siguiente, si bien puede acelerarse a través de la instrucción como lo señalan los propios Van Hiele, requiere tiempo, años incluso si los estudiantes no poseen todavía en ningún campo de la geometría el nivel para el que se están desarrollando las actividades en ese momento.

Las observaciones que se han hecho a la teoría de Van Hiele, referidas por Gutiérrez y Jaime (1995), en cuanto a que el paso de un nivel al siguiente por parte de un alumno no es brusco sino gradual, puede conducir a pensar que no necesariamente puede ubicarse con precisión dentro de un cierto nivel, o de que en distintos aspectos de la geometría pudieran presentarse distintos niveles, no es a nuestro juicio, algo de qué preocuparse a los efectos de esta investigación, ya que nuestro interés recae primordialmente en la tendencia general del grupo estudiado.

La teoría de los niveles de razonamiento brinda una elegante y práctica gradación de niveles, claramente establecidos, que permite una operacionalización relativamente sencilla conducente a la posibilidad de ubicar un alumno cualquiera dentro de uno de esos niveles, insumo sin dudas muy valioso para el docente de geometría. Por ende, fue adoptada para este estudio considerando no solamente los planteamientos originales de sus autores, sino también los aportes teóricos de otros investigadores, como Usiskin, Clements y Battista, Mason, Afonso, y Jaime y Gutiérrez.

2. Metodología

2.1. Definición de la variable de estudio

El razonamiento geométrico es aquel que se manifiesta en un individuo cuando, en un determinado campo de la geometría, a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes, proceso que el individuo puede desarrollar dentro de uno de cinco posibles niveles de complejidad, cada uno de los cuales, a partir del segundo, incluye y supera a los anteriores.

2.2. Operacionalización de la variable

Si bien la teoría de van Hiele contempla cinco niveles de razonamiento, los resultados del extenso trabajo de Usiskin (1982) muestran que la teoría no está lo suficientemente elaborada como para realizar pruebas que sean concluyentes para asignar un individuo en el nivel más alto, cuando señala en su primera conclusión que en la forma dada por los van Hiele, el nivel 5 o bien no existe o no es comprobable, pero que sin embargo todos los otros niveles sí son comprobables. En este sentido, Usiskin refiere que el propio P. M. van Hiele, durante un viaje realizado a los Estados Unidos en 1980, reconoció no creer en un quinto nivel, cambiando así la visión que había expresado unos años atrás.

Es por ello que resulta pertinente limitar el estudio a los primeros cuatro niveles de razonamiento geométrico, sobre todo porque de existir ciertamente ese quinto nivel estaría referido esencialmente al conocimiento y dominio de sistemas geométricos que requieren un mayor nivel de abstracción, como en las geometrías no euclidianas, y que no constituyen el objeto de estudio ni la intencionalidad del curso de geometría de la Facultad de Ingeniería, respecto del cual no se pretende que ingresen ni tampoco que egresen estudiantes con un nivel cinco de razonamiento, en caso de que, reiteramos, tal nivel existiera.

Así entonces, la escala a utilizar para el estudio va desde el nivel 1 hasta el nivel 4 de razonamiento, llamada escala de los Niveles Modificados de van Hiele (Usiskin, 1982).

La teoría de los van Hiele señala que para ubicar un individuo dentro de un determinado nivel de razonamiento, debe evidenciar razonamientos característicos de ese nivel y de todos los anteriores, pero de ninguno de los siguientes. Este criterio, si bien en principio luce elegante y razonable, entraña cierta rigidez al momento de operacionalizar y medir la variable de estudio a través de un instrumento, pues en la práctica se presentan patrones de respuestas que no encajan exactamente con él, pero que realmente no impiden clasificarlas razonablemente dentro de un cierto nivel en lugar de catalogarlas como “no ubicables”. En virtud de ello, se optó por ampliar los criterios para clasificar a los estudiantes dentro de un cierto nivel modificado de Van Hiele, incluyendo, como sugiere Usiskin (1982), además de los señalados por la teoría, los siguientes casos: (a) el estudiante cumple con los criterios para los niveles n y $n-1$ pero tal vez no para uno de los $n-2$ o $n-3$; o (b) el estudiante cumple con el criterio para el nivel n, todos los niveles debajo de n, pero no para el $n+1$ aunque también cumpla el criterio para un nivel más alto.

Tomando en cuenta los criterios antes señalados, se elaboró la tabla 1 donde se muestran las dimensiones y los indicadores de la variable de estudio.

TABLA 1. Operacionalización de la variable razonamiento geométrico

Dimensiones	Indicadores
Nivel 0	El alumno no es capaz de resolver problemas geométricos característicos del nivel 1 de razonamiento, y a lo sumo resuelve problemas característicos de uno de los niveles subsiguientes (niveles 2, 3 y 4).
Nivel 1	El alumno es capaz de resolver problemas geométricos característicos del nivel 1 de razonamiento, pero no del nivel 2, y a lo sumo resuelve problemas característicos de uno de los niveles subsiguientes (niveles 3 y 4).
Nivel 2	El alumno es capaz de resolver problemas geométricos característicos del nivel 1 y del nivel 2 de razonamiento, pero no del nivel 3, independientemente de si resuelve o no problemas característicos del nivel 4.
Nivel 3	El alumno es capaz de resolver problemas geométricos característicos del nivel 3 y del nivel 2 de razonamiento, pero no del nivel 4, independientemente de si resuelve o no problemas característicos del nivel 1.
Nivel 4	El alumno es capaz de resolver problemas geométricos característicos del nivel 4 y del nivel 3 de razonamiento, y de al menos uno de los niveles anteriores (niveles 1 y 2).

Fuente: Usiskin (1982).

2.3. Caracterización de la investigación

La investigación busca estudiar el razonamiento geométrico en alumnos que cursan geometría en la Facultad de Ingeniería de LUZ, para lo cual interesa determinar su nivel de razonamiento al inicio y al final del curso a fin de documentar su evolución. Con base en los criterios de Hurtado

(2000), puede establecerse que se trata de un estudio de tipo descriptivo secuencial (o evolutivo) de campo, ya que se pretende describir la evolución o proceso de cambio del evento, acompañándolo en el tiempo y obteniendo los datos de fuentes vivas en el contexto natural o habitual donde ocurre.

2.4. Diseño de la investigación

La investigación se realizó con un mismo grupo de estudiantes cursantes de geometría para el cual se determinó el nivel de razonamiento según la escala de Van Hiele en dos momentos: al iniciarse el curso y, posteriormente, una vez finalizada la primera unidad del mismo. Con estas dos mediciones se buscaba no sólo conocer un aspecto muy importante como lo es el nivel de razonamiento geométrico con el que ingresan los alumnos, sino el desarrollo que experimentan a lo largo del curso.

La primera unidad del curso se refiere al estudio de la geometría plana elemental, y es allí donde se requiere que los alumnos realicen demostraciones geométricas, poniendo a prueba su razonamiento. El resto del curso (segunda unidad) se dedica al estudio de la geometría analítica plana, no exigiéndose por lo general en esa parte la demostración de propiedades. Por estas razones, se consideró que al finalizar la primera unidad era propicio realizar el postest, pues para efectos del razonamiento geométrico la medición efectuada en ese momento sería equivalente a la realizada al final del curso y además se reducía la posibilidad de muerte experimental de los sujetos de la muestra.

2.5. Procedimiento

Se realizó un diseñó estándar pretest-postest, para lo cual se determinó el nivel de razonamiento de los alumnos, al inicio del curso y al final de la primera unidad, empleando para ello la Prueba de Geometría de van Hiele (Van Hiele Geometry Test) elaborada en la Universidad de Chicago por el proyecto CDASSG (Desarrollo Cognitivo y Logro en la Geometría de la Escuela Secundaria), dirigido por Zalman Usiskin (Usiskin, 1982).

Para recabar y procesar la información se procedió de la siguiente manera:

a. Se informó a los estudiantes participantes acerca de los objetivos de la investigación, haciéndose énfasis en que se trataba de una prueba para medir el nivel de razonamiento geométrico sin que ello tuviese en modo alguno relación con las evaluaciones ordinarias del curso.

b. Al final de la primera clase del curso se aplicó el instrumento a los estudiantes participantes, para recabar la información en ese primer momento (pretest).
c. Una vez finalizada la primera unidad del curso de geometría se aplicó nuevamente el instrumento a los estudiantes participantes, a fin de recabar la información en ese segundo momento (postest).
d. Se transcribieron al computador las respuestas dadas por los alumnos para posteriormente procesarlas.
e. Se determinó el nivel de razonamiento de van Hiele para cada alumno en el pretest y en el postest, de acuerdo con las pautas establecidas en los indicadores y en el diseño del instrumento.
f. Se utilizó la prueba no paramétrica de Wilcoxon para dos muestras relacionadas para determinar se existían diferencias significativas entre las medianas de la variable de estudio medidas en el pretest y en el postest.

2.6. Participantes

La población objeto de estudio estuvo constituida por los estudiantes de geometría del primer período de 2009 de la Facultad de Ingeniería de LUZ, integrada por 1.022 sujetos.

En este estudio, se trabajó con 5 secciones de alumnos cursantes de geometría, garantizando de esta forma un tamaño suficientemente grande de participantes. Las secciones fueron escogidas intencionalmente para facilitar la aplicación de la prueba en los momentos requeridos, sobre todo para el pretest, pues se necesitaba realizarlo antes de iniciar cualquier explicación acerca de las formas válidas y no válidas de razonamiento, lo cual ocurre normalmente en la primera o segunda clase del curso y representaría la presencia de una variable interviniente no deseada que podría afectar los resultados.

Se trabajó en principio con un total de 181 alumnos, pero durante el proceso ocurrió la muerte experimental de 17 de ellos, razón por la cual la muestra definitiva quedó conformada por 164 alumnos de recién ingreso al I semestre de la Facultad, de ambos sexos, con edades comprendidas entre los 16 y los 18 años, inscritos en las Escuelas de Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Química e Ingeniería Mecánica.

Cabe señalar que los estudios de Frykholm (1994) y Halat (2006) señalan que el género no es un factor que esté relacionado significativamente con los niveles de Van Hiele, de modo que no se hizo ningún tipo de preselección en la muestra en función de este parámetro.

2.7. Instrumentos

Se han diseñado varios instrumentos para medir el razonamiento geométrico de los alumnos, algunos basados en la teoría de los niveles de van Hiele, dentro de los cuales destacan el diseñado por Jaime y el diseñado por Usiskin y sus colaboradores. Este último ha sido utilizado ampliamente y goza de aceptación universal, con la ventaja de que los ítems que lo conforman están presentados en forma más clara para el estudiante (e incluso para los profesores) que el de Jaime, tal y como lo señala Afonso (2003) al comparar ambos instrumentos en su tesis doctoral.

Debido a lo anterior, se optó por utilizar la Prueba de Geometría de van Hiele (van Hiele Geometry Test) elaborada en la Universidad de Chicago por el proyecto CDASSG (Desarrollo Cognitivo y Logro en la Geometría de la Escuela Secundaria), dirigido por Zalman Usiskin (Usiskin, 1982), con la debida autorización del Dr. Usiskin y traducida al español por los autores. Este instrumento contiene 25 ítems, estructurados en 5 grupos de 5 ítems cada uno, y organizados dichos grupos en orden creciente de dificultad, uno para cada uno de los niveles de Van Hiele. Los ítems del instrumento son de selección simple, debiendo escoger el alumno una de cinco posibles respuestas (desde la A hasta la E), siendo correcta solamente una de ellas. El instrumento consta de dos partes: un folleto contentivo de las instrucciones generales y las 25 preguntas, sobre el cual el alumno no debe señalar ninguna respuesta ni hacer dibujo o marca alguna; y una hoja de respuestas para los 25 ítems en la que se muestran las 5 opciones de respuestas para cada uno (A-B-C-D-E) a fin de que el alumno encierre con un círculo, en cada ítem, la que considere correcta. También se dispone en la hoja de respuestas de un espacio en blanco para que el alumno realice sus dibujos y operaciones.

2.8. Valoración individual de cada nivel de cada estudiante

Como se indicó anteriormente, cada nivel de Van Hiele se mide con base en 5 ítems del instrumento. De acuerdo con sus diseñadores, para validar un determinado nivel pueden utilizarse dos criterios: a) requerir que se contesten correctamente al menos 3 de las 5 preguntas de ese nivel; b) requerir que se contesten correctamente al menos 4 de las 5 preguntas de ese nivel. Obviamente, el segundo criterio es más estricto que el primero, y los resultados pueden variar según se escoja uno o el otro. Usiskin (1982) señala que el criterio 3 de 5 minimiza la posibilidad de perder un estudiante en la investigación por no poderse ubicar dentro de alguno de los niveles, mientras que el criterio 4 de 5 minimiza la posibilidad de que el estudiante se ubique en el nivel por adivinación. Para efectos de esta investigación se prefirió adoptar el criterio 3 de 5 pues, por una parte, se consideró más importante el no perder en lo posible datos en el estudio, y por la otra debido a que un criterio más estricto tendería a ubicar más cantidad de alumnos en los primeros niveles, disminuyendo el poder de discriminación del instrumento, pues como lo señala Usiskin en su estudio, de haber utilizado únicamente el criterio 4 de 5, el 88% de los sujetos en el pretest podría ubicarse en un mismo nivel.

De esta forma, a cada nivel de cada estudiante se le valoró con uno de dos posibles resultados: 0 si no respondía correctamente al menos 3 de las 5 preguntas del nivel; 1 si respondía correctamente al menos 3 de las 5 preguntas del nivel.

2.9. Determinación del nivel de van Hiele de cada estudiante

Una vez valorados individualmente los niveles para cada estudiante, se procedió a determinar el nivel de Van Hiele de cada uno, tomando en cuenta los criterios señalados en los indicadores de la variable para cada dimensión (cada nivel). Para ello se procedió de la siguiente forma:

a. Se ponderaron los 5 niveles asignándoles puntuaciones crecientes a cada uno, a saber: 1 para el nivel 1, 2 para el nivel 2, 4 para el nivel 3, 8 para el nivel 4 y 16 para el nivel 5.
b. Se determinó luego la suma ponderada para cada estudiante, resultado de sumar los productos de la valoración individual de cada nivel (0 ó 1) por su respectiva ponderación. Este procedimiento arroja un

total de 31 posibles combinaciones de respuestas: $C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$, ocurriendo que cada suma ponderada corresponde a una y sólo una de dichas combinaciones, tal y como se muestra en la tabla 2, de modo que al conocerse la suma ponderada se conoce cuál es la combinación que le dio origen. De esta forma es posible determinar el nivel de Van Hiele de cada estudiante en función de su respectiva suma ponderada.

c. Finalmente, atendiendo lo señalado en los indicadores de la variable, se determinó el nivel modificado de Van Hiele de cada alumno. En virtud de que los niveles modificados de Van Hiele varían del 0 al 4, las respuestas dadas por los alumnos para el nivel 5 no influyen en su determinación. Sin embargo, ciertas combinaciones de respuestas pueden no cumplir con ninguno de los criterios señalados en los indicadores; en tales casos, se procede a registrar como Sin Ubicación (S.U.) al respectivo alumno. En la tabla 2 se muestran las sumas ponderadas que corresponden a cada nivel y a los casos S.U.

TABLA 2. Prueba de geometría de Van Hiele (usiskin). Sumas ponderadas correspondientes a cada nivel de Van Hiele

Nivel	Suma ponderada
0	0, 2, 4, 8, 16, 18, 20, 24
1	1, 5, 9, 17, 21, 25
2	3, 11, 19, 27
3	6, 7, 22, 23
4	13, 14, 15, 29, 30, 31
S.U.	10, 12, 26, 28

Aplicando el procedimiento indicado, se determinó el nivel de Van Hiele de cada alumno en el pretest y en el postest.

3. Resultados

3.1. Pretest

Como puede apreciarse en la tabla 3, en el pretest casi la mitad de los alumnos (47,0%) se encuentra en el nivel 1 de razonamiento o ni siquiera alcanza este nivel, y casi la totalidad de los alumnos (92,1%) se encuentra en el nivel 2 o por debajo de él; sólo 13 alumnos (7,9%) de los 164 participantes se ubicaron en los niveles 3 ó 4. Asimismo, fue posible ubicar en el pretest a todos los participantes en alguno de los niveles de van Hiele.

TABLA 3. Distribución de alumnos en los niveles de Van Hiele

Nivel	Cantidad de alumnos	Porcentaje de alumnos	Porcentaje acumulado
0	20	12.2%	12.2%
1	57	34.8%	47.0%
2	74	45.1%	92.1%
3	10	6.1%	98.2%
4	3	1.8%	100.0%
S.U.	0	0.0%	100.0%
Total	164	100.0%	–o–

3.2. Postest

En la tabla 4 se observa que en el postest de los 164 alumnos participantes sólo 12 (7,3%) fueron ubicados en los niveles 0 ó 1, en tanto que la mayoría (128 sujetos, 77,9%) se encuentra ubicada entre los niveles 2 y 3, y 23 sujetos (14,0%) se ubicaron en el nivel 4 de razonamiento. Sólo uno de los participantes en el postest resultó sin ubicación en los niveles de Van Hiele.

TABLA 4. Distribución de alumnos por nivel de Van Hiele (postest)

Nivel	Cantidad de alumnos	% de alumnos	% de alumnos ubicados	Porcentaje acumulado
0	1	0.6%	0.6%	0.6%
1	11	6.7%	6.7%	7.4%
2	61	37.2%	37.4%	44.8%
3	67	40.9%	41.1%	85.9%
4	23	14.0%	14.1%	100.0%
S.U.	1	0.6%	–o–	–o–
Total	164	100.0%	100.0%	–o–

3.3. Comparación entre los resultados del pretest y del postest

Para comparar los resultados obtenidos en el pretest y en el postest se prepararon tablas cruzadas con la información recopilada en ambos momentos. En la tabla 5 se aprecia cómo se distribuyeron en el postest, dentro de los distintos niveles de Van Hiele, los alumnos correspondientes a cada nivel en el pretest. Así por ejemplo, se observa en la fila 1 de la tabla que de 20 alumnos que se iniciaron en el nivel 0, 1 permaneció en ese nivel, 6 terminaron en el nivel 1, 12 en el nivel 2, 1 en el nivel 3 y ninguno en el nivel 4. En la tabla se han resaltado en negritas para cada nivel en el pretest (para cada fila) el nivel equivalente a la mediana en el postest, lo cual permite visualizar en forma general cómo se dieron las variaciones entre ambos momentos.

TABLA 5. Tabulación cruzada de niveles de Van Hiele pretest-postest (cantidad de alumnos)

Nivel		Postest						Total
		0	1	2	3	4	S.U.	
Pretest	0	1	6	**12**	1	0	0	20
	1	0	1	**31**	19	6	0	57
	2	0	4	16	**41**	12	1	74
	3	0	0	2	**5**	3	0	10
	4	0	0	0	1	**2**	0	3
	S.U.	0	0	0	0	0	0	0
Total		1	11	61	67	23	1	164

En la tabla 6 se muestran los mismos resultados pero en términos porcentuales, a fin de apreciar más claramente en cuál proporción se distribuyeron los alumnos para cada grupo. Se observa en las tablas 5 y 6 que en general los alumnos que se inician en el nivel 0 tienden en su mayoría a finalizar en el nivel 2; los que se inician en el nivel 1 tienden a finalizar también en el nivel 2; los que comienzan en el 2 a terminar en el 3; y los que se inician en los niveles 3 y 4 tienden a permanecer en el mismo nivel.

TABLA 6. Tabulación cruzada de niveles de Van Hiele pretest-postest (porcentaje de alumnos respecto de cada nivel)

Nivel		Postest						Total
		0	1	2	3	4	S.U.	
Pretest	0	5.0%	30.0%	**60.0%**	5.0%	0.0%	0.0%	100.0%
	1	0.0%	1.8%	**54.4%**	33.3%	10.5%	0.0%	100.0%
	2	0.0%	5.4%	21.6%	**55.4%**	16.2%	1.4%	100.0%
	3	0.0%	0.0%	20.0%	**50.0%**	30.0%	0.0%	100.0%
	4	0.0%	0.0%	0.0%	33.3%	**66.7%**	0.0%	100.0%
	S.U.	–o–	–o–	–o–	–o–	–o–	–o–	–o–

Las tablas anteriores, si bien ofrecen una visión general de los cambios entre el pretest y el postest, no permiten un análisis más detallado que resulta pertinente. En la tabla 7 se muestra para cada nivel de entrada cuántos alumnos bajaron de nivel, cuántos permanecieron igual, cuántos subieron un nivel y cuántos, dos o más niveles. La tabla 8 ofrece una información similar pero en términos de porcentajes.

TABLA 7. Resumen de variaciones en los niveles de Van Hiele (pretest-postest) (cantidad de alumnos)

Comenzando en el nivel	Baja	Permanece igual	Sube 1 Nivel	Sube 2 O Más Niveles	Totales	Incremento promedio
0	–o–	1	6	13	20	1.65
1	0	1	31	25	57	1.53
2	4	16	41	12	73	0.84
3	2	5	3	–o–	10	0.10
4	1	2	–o–	–o–	3	-0.33
Totales	7 (4.3%)	25 (15.3%)	81 (49.7%)	50 (30.7%)	163 (100.0%)	1.11

TABLA 8. Resumen de variaciones en los niveles de Van Hiele (pretest-postest) (porcentaje de alumnos)

Comenzando en el nivel	Baja	Permanece igual	Sube 1 nivel	Sube 2 o más niveles	Número de alumnos	Incremento promedio
0	–o–	5.0%	30.0%	65.0%	20	1.65
1	0.0%	1.8%	54.4%	43.9%	57	1.53
2	5.5%	21.9%	56.2%	16.4%	73	0.84
3	20.0%	50.0%	30.0%	–o–	10	0.10
4	33.3%	66.7%	–o–	–o–	3	-0.33
N° de alumnos	7	25	81	50	163	1.11

Observando las tablas 7 y 8 se aprecia que de los alumnos que se iniciaron en el nivel 0 (12,2% de la muestra) aproximadamente una tercera parte subió un nivel y el resto subió dos o más niveles al final de la unidad. Quienes se iniciaron en el nivel 1 (34,8% de la muestra) se distribuyeron casi en partes iguales entre los que subieron un nivel y los que subieron dos o más niveles. Por su parte, un poco más de la mitad (56,2%) de aquellos que comenzaron en el nivel 2 (45,1% de la muestra) alcanzaron el nivel 3, permaneciendo igual aproximadamente la quinta parte (21,9%) y en menor proporción los que alcanzaron el nivel 4 (16,4%); 4 alumnos de este grupo (5,5%) disminuyeron de nivel. De los alumnos que comenzaron en el nivel 3 (sólo 10 del total: 6,1%), exactamente la mitad permaneció en el mismo nivel, 3 sujetos (30%) alcanzaron el nivel 4 y 2 alumnos (20%) bajaron de nivel. De los alumnos que iniciaron en el nivel 4 (sólo 3, 1,8%), uno bajó de nivel y los otros dos permanecieron en el mismo. La tendencia general más acentuada es la de incrementar 1 nivel (49,7%), seguida por la de incrementar 2 o más niveles (30,7%), de donde se deduce que el 80,4% de los alumnos de la muestra incrementaron al menos un nivel de Van Hiele al final del curso.

Asimismo, se observa en las tablas 7 y 8 que el incremento promedio en el nivel de Van Hiele disminuye a medida que aumenta el nivel con el que inicia el alumno. Así, quienes se iniciaron en el nivel 0 experimentaron un incremento promedio de 1,65 en su nivel de Van Hiele; quienes se iniciaron en el nivel 1, incrementaron en promedio su nivel en 1,53; para quienes comenzaron en el nivel 2 se observó un incremento medio de 0,84 y para quienes se iniciaron en el nivel 3 el incremento medio es prácticamente nulo (0,10). Era de esperar que aquellos alumnos que se iniciaron en el nivel 4 se mantuviesen en él; sin embargo uno de ellos bajó de nivel, aunque tratándose de un grupo de sólo 3 alumnos no es pertinente establecer conclusiones firmes al respecto. Se observa por último que los integrantes de la muestra incrementaron en promedio su nivel de van Hiele en 1,11.

En el gráfico 1 se muestran las distribuciones porcentuales por nivel de van Hiele tanto para el pretest como para el postest. El gráfico permite apreciar visualmente cómo en el pretest las barras tienden a agruparse hacia la izquierda de la escala, señal de que la mayor parte de los alumnos presenta niveles de van Hiele menores o iguales a 2, en tanto que en el postest las barras tienden a agruparse más hacia la derecha de la escala, mostrando que al final de la unidad los alumnos en general habían incrementado su nivel de van Hiele, ubicándose principalmente entre los niveles 2 y 3.

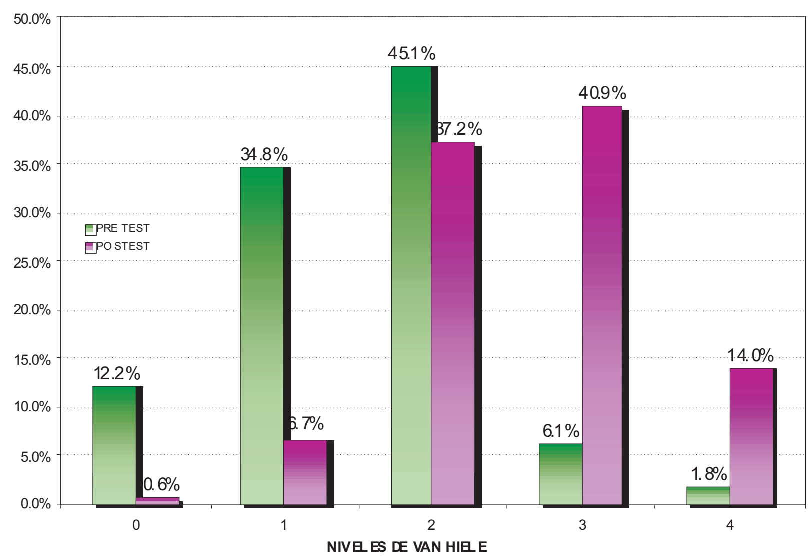

GRÁFICO 1. Distribución porcentual comparada de alumnos por nivel de Van Hiele (pretest-postest).

Si bien la variable de estudio no es continua, se muestra en el gráfico 2 un polígono de frecuencia, resultado de unir los puntos correspondientes a los porcentajes de cada nivel para el pretest y para el postest. De esta forma se puede apreciar cómo las dos curvas se cortan entre los niveles 2 y 3, bajando drásticamente la del pretest y al mismo incrementándose notablemente la del postest, observándose claramente la tendencia de los alumnos a ubicarse en niveles más altos al final del curso.

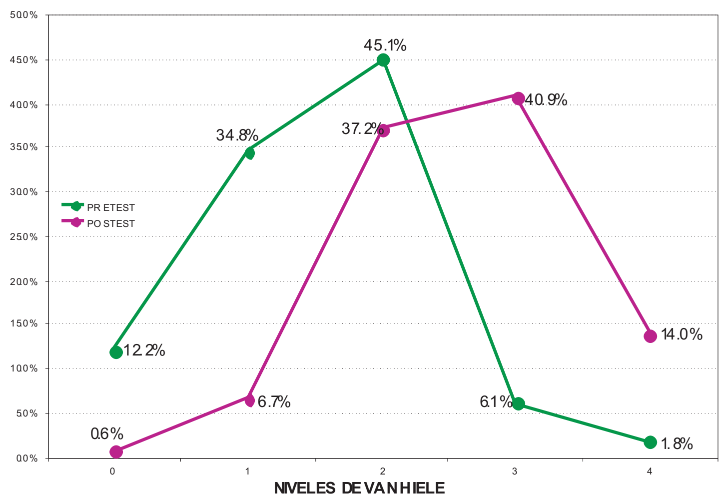

GRÁFICO 2. Curvas de distribución porcentual de alumnos por nivel de Van Hiele (pretest-postest).

El gráfico 3 muestra otra forma de comparar los resultados generales del pretest y el postest, dado por las curvas S de los porcentajes acumulados de los niveles de Van Hiele para ambos momentos. Allí se aprecia cómo la curva para el postest se mantiene apreciablemente por debajo de la curva del pretest en los niveles del 0 al 2, acercándose recién en el nivel 3, lo cual es indicativo de que en el postest la cantidad de alumnos en los niveles iniciales es menor que en el pretest, señal de que en el postest hay más cantidad de alumnos en los niveles más altos que en el pretest.

Para garantizar que las diferencias en el razonamiento geométrico señaladas en los resultados fuesen estadísticamente significativas se aplicó, conforme a lo señalado por Hurtado (2000) y Daniel (1997), la prueba de Wilcoxon para muestras relacionadas, debido a que, por una parte, se tra-

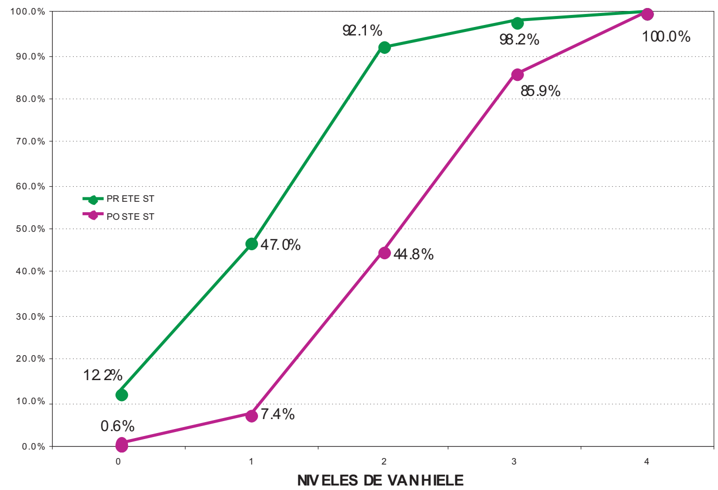

GRÁFICO 3. Curvas de porcentajes acumulados de alumnos por nivel de Van Hiele (pretest-postest).

ta de un mismo grupo al que se le aplicó el instrumento en dos momentos diferentes y, por la otra, a que en la variable objeto de estudio los niveles de van Hiele es de tipo ordinal, es decir, que los datos pueden ordenarse pero no tienen ningún significado las diferencias entre valores de los mismos. Tales pruebas, realizadas a través del paquete estadístico SPSS 12.0, arrojaron un nivel de significancia menor a 0,001, reflejando que las diferencias observadas son en efecto estadísticamente significativas y no debidas al azar, por lo cual puede asegurarse que en los alumnos objeto de este estudio el nivel de van Hiele al final del curso de geometría en general es mayor que al inicio del mismo en los términos indicados en los resultados.

Conclusiones

Vistos los resultados obtenidos luego de analizada la información recabada, se establecieron las conclusiones siguientes:

El estudio reveló que el razonamiento geométrico medido según la escala de van Hiele mostrado por los alumnos antes de iniciar el curso de geometría se ubica casi en su totalidad (92,1%) entre los niveles 0, 1 y 2, lo cual se traduce en que algunos no evidencian ningún tipo de razonamiento geométrico, otros apenas pueden identificar las figuras geométricas como un todo, por su forma pero no por sus propiedades, y los demás sí pueden identificar propiedades de las figuras y son conscientes de que están formadas por partes, pero no son capaces de ordenarlas lógicamente ni de realizar razonamientos deductivos. Este nivel de razonamiento se esperaría de alumnos de la escuela primaria pero no de estudiantes con grado de bachiller, para los cuales un nivel 3 de razonamiento sería el mínimo deseable, indicativo de que hubiesen iniciado el desarrollo de su capacidad de razonamiento deductivo.

En relación con el nivel de razonamiento de los estudiantes al final del curso, el estudio mostró que se ubica mayoritariamente (78,1%) entre los niveles 2 y 3, lo cual significa que algunos todavía sólo alcanzan a identificar propiedades de las figuras aunque son conscientes de que están formadas por partes, pero no son capaces de ordenarlas lógicamente ni de realizar razonamientos deductivos; en tanto que otros en cambio pueden ordenar lógicamente las figuras y sus relaciones y comienzan a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático, comprendiendo las demostraciones de varios pasos cuando se le explican pero no alcanzando a realizarlas por sí mismos. Este nivel de razonamiento no es sin embargo el que se supone corresponda con alumnos que han concluido el curso de geometría, y se esperaría que en su mayoría mostraran un nivel 4 de razonamiento, al cual sólo el 14% de los estudiantes de la muestra logró llegar o mantenerse.

La comparación entre los niveles de van Hiele reflejados al inicio y al final del curso muestra resultados en cierta forma divergentes. Por una parte se evidenció que casi la mitad de los alumnos (49,7%) incrementó un nivel con respecto al de ingreso y casi la tercera parte (30,7%) incrementó al menos dos niveles; sólo alrededor de la quinta parte (19,6%) bajó de nivel o permaneció igual. Desde esa perspectiva, puede decirse que los alumnos lograron un incremento importante en su nivel de razonamiento, ya que más del 80% logró superar el que mostraba al inicio del curso. Sin embargo, por otra parte, estos incrementos deben ponderarse tomando en cuenta el nivel con respecto al cual se experimentaron. Los alumnos que incrementaron 2 niveles, o más, provenían en su mayoría (76%) de los niveles 0 y 1, de modo que al final lograron alcanzar en general sólo los niveles 2 y 3, en tanto que apenas un pequeño porcentaje (16,4%) de los alumnos provenientes del nivel 2 lograron subir dos niveles para llegar al 4.

Estos alumnos, provenientes de los niveles 0, 1 y 2, representan a la gran mayoría de los participantes en el estudio (92%) y por lo tanto los resultados por ellos evidenciados, que señalan un éxito limitado en el mejoramiento de su razonamiento geométrico, son prácticamente representativos de toda la muestra. Adicionalmente, más allá de que representan sólo el 6,1% de la muestra, era de esperar que los alumnos provenientes del nivel 3 alcanzaran en su mayoría el nivel 4, pero esto no ocurrió: del total de 10 sólo 3 lo hicieron, en tanto que el resto permaneció en el nivel 3 o bajó de nivel.

Los resultados evidenciados por el estudio, que señalan que apenas 23 alumnos de un total de 164 logró alcanzar el nivel 4 de razonamiento, son compatibles con los señalados por Bohórquez y Hernández (2003) en su estudio acerca del obstáculo del razonamiento común en estudiantes de ingeniería, en el cual se concluyó que, a pesar de haber terminado un curso de geometría, más del 90% de los alumnos del estudio evidenció la presencia del obstáculo. Esto se caracteriza por validar y utilizar arbitrariamente el recíproco de una implicación lógica con base en la concepción errónea de que si el directo es verdadero entonces el recíproco también lo es.

Finalmente, cabe señalar que los resultados observados son también compatibles con los niveles de prosecución históricamente bajos observados en los cursos de geometría de la Facultad de Ingeniería.

Referencias

Afonso, M. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele.* Un estudio con profesores en ejercicio. Disertación doctoral. Universidad de La Laguna. España.

Bohórquez, H. y Hernández, A. (2003). El razonamiento común: un obstáculo epistemológico en geometría. Revista de Pedagogía, 24, 7-37.

Clements, D. y Battista, M. (1990). The effects of logo on children's conceptualizations of angle and polygons. Journal for Research in Mathematics Education,21(5), 356-371.

Daniel, W. (1997). Estadística con aplicaciones a las ciencias sociales y a la educación. México: McGraw-Hill.

Duval, R. (1998). Geometry from a Cognitive Point of View. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study. Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Frykholm, J. (1994). External variables as predictors of Van Hiele levels in algebra and geometry students. Wisconsin, EE.UU.: University of Wisconsin-Madison.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Halat, E. (2006). Sex-related differences in the acquisition of the van Hiele levels and motivation in learning geometry. *Asia Pacific Education Review, 7*(2), 173-183.

Hurtado, J. (2000). Metodología de la investigación holística. Caracas: Sypal.

Lanz, R. (2007). El arte de pensar sin paradigmas. Enl@ce: Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento, 4(3), 93-102.

Mason, M. (1997). The van Hiele model of geometric understanding and mathematically talented students. Journal for the Education of the Gifted, 21(1), 39-53.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (CDASSG project). Chicago, EE.UU.: University of Chicago, Department of Education.

Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. Disertación doctoral. Traducción al español de Ángel Gutiérrez et al. Universidad Real de Utrecht. Holanda.

Van Hiele, P.M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. Orlando, EE.UU.: Academic Press.