Opción, Año 32, No. Especial 10 (2016): 896 - 910
ISSN 1012-1587

Usando teoría de grafos para explicar Análisis Input-Output en economía y empresa

Ángel F. Tenorio Villalón
y Ana M. Martín Caraballo

Universidad Pablo de Olavide, España
aftenvil@upo.es; ammarcar@upo.es

Resumen

Comparamos dos metodologías docentes para tratar diversos conceptos del Análisis Input-Output, como son conjuntos autónomos y productos fundamentales, para los grados relativos a las Ciencias Económicas y Empresariales. Por un lado, exponemos la metodología más tradicional basada en estudiar la matriz de coeficientes tecnológicos y los distintos subconjuntos de filas obtenidos de ella; y por otro, una nueva metodología basada en la teoría de grafos que facilita tanto la visualización del problema como la automatización de procedimientos por el alumnado. Nos centraremos en resaltar ventajas e inconvenientes de ambas metodologías para la docencia de estos contenidos según nuestra experiencia docente.

Palabras clave: Metodologías docentes, Análisis input-output, Teoría de grafos, Innovación docente, Algoritmos para la docencia en Ciencias Sociales.

Recibido: 01-07-2016 • Aceptado: 01-08- 2016

Using Graph Theory to Explain Input-Output Analysis in Economics and Business

Abstract

We compare two teaching methodologies for explaining two topics concerning Input-output analysis, autonomous sets and fundamental products, in the context of bachelor degrees in Economics and Business Administration. In addition, we expound the traditional methodology based on studying the technical coefficients matrix and the subsets of rows coming from this matrix; on the other hand, we propose a new methodology base don graph theory, which makes easier both the understanding of the problem and the automation of procedures for students. We focus on highlighting pros and cons for both methodologies when teaching these topics according to our teaching experience.

Keywords: Teaching methodologies, Input-output analysis, Graph theory, Teaching innovation, Algorithms for teaching in Social Sciences.

1. INTRODUCCIÓN

El Análisis Input-Output suele ser uno de los tópicos que tradicionalmente se explican en el primer curso de las titulaciones en Ciencias Económicas y Empresariales en España dentro del bloque del Álgebra Lineal. Esto se debe no solo a que este tópico resulta ser una aplicación económica de la teoría de matrices y la resolución matricial de sistemas de ecuaciones que puede introducirse con relativa facilidad y que sin excesivas complicaciones para su comprensión y asimilación desde la perspectiva del alumnado de primer curso; sino también a la relevancia que ha tenido y sigue teniendo esta técnica dentro del ejercicio profesional para el que se está formando este alumnado puesto que la ONU, a nivel global, y la Unión Europea, a nivel continental, usan esta metodología para registrar la información económica de sus países miembros (y de las regiones de éstos) en un determinado período temporal y es pieza clave en el sistema estándar patrocinado por estos organismos para presentar las cuentas económicas nacionales de un país, pudiéndose emplear incluso para planificar la economía de los países en vías de desarrollo (ONU, 1993, 1994, 1999).

Más concretamente, los modelos input-output permiten analizar y obtener un conocimiento adecuado de las interrelaciones existentes entre las diversas actividades económicas existentes en la economía de un país o región. Se considera como padre de esta metodología basada en el álgebra matricial a Wassily Leontief (1936, 1941, 1966), el cual midió la estructura de una economía (concretamente, la de EE.UU.) mediante la reacción que tenía lugar tanto en las producciones como en los precios de las distintas industrias debido a cambios en la demanda final de la producción (por consumidores finales y no por sectores productivos) y los factores que afectan a la asignación de precios.

La aportación de Leontief fue la de hallar, formular y desarrollar un modelo que permitiese analizar e identificar de manera sistemática la interdependencia entre los sectores productivos de modo que los flujos y relaciones entre dichos sectores pudieran estimarse estadísticamente. Para ello, combinó tanto las compras/ventas intermedias en la economía (las realizadas entre sectores productivos o entre industrias) como las compras/ventas finales (las ventas a consumidores, gobierno e instituciones sin fines lucrativos al servicio del consumidor y las inversiones y exportaciones).

En este trabajo no nos centramos en el análisis input-output en general, sino en dos conceptos pertenecientes a este tópico: los productos fundamentales y los conjuntos autónomos. Estos dos conceptos pueden resultar claves para el estudio del fenómeno económico de un país o región y permiten alcanzar una mejor comprensión de la estructura económica que se está estudiando. Precisamente, el concepto de producto fundamental fue introducido por Piero Sraffa (1960) por medio del estudio de los conjuntos autónomos existentes en una economía a partir de la matriz de coeficientes tecnológicos de dicha economía y esa ha sido la filosofía habitual tal y como puede observarse en la mayoría de manuales; por ejemplo en Michel (1989) o Fedriani y Melgar (2010). Sin embargo, tanto desde la perspectiva investigadora como desde la docente, surgía un problema práctico en el estudio y aplicación de este concepto: el número de posibles conjuntos autónomos era muy elevado (de orden combinatorial) en una economía real e incluso en problemas académicos en los que solo se usaban 3 o 4 sectores productivos, ya que deben considerarse todos los subconjuntos posibles (de todas las dimensiones) de sectores productivos en la economía.

Precisamente, buscando solventar esa problemática, Fedriani y Tenorio (2012, 2015) trabajaron con una metodología nueva para estudiar y tratar tanto los conjuntos autónomos como los productos fundamentales de un modo más eficiente simplificando sustancialment el cálculo de estos objetos. Para ello, lo que hicieron fue aproximar el problema desde la perspectiva de la teoría de grafos y así calcular cuáles eran los productos fundamentales directamente y, a partir de ellos (en caso de existir), cuáles eran los conjuntos autónomos. Esto último se llevaba a cabo (tanto si existen productos fundamentales como si no) de una manera más eficiente que la simple búsqueda combinatorial en todos los subconjuntos posibles de sectores productivos.

De este modo, nuestro actual objetivo es mostrar tanto la metodología que tradicionalmente se ha usado para explicar y trabajar con el alumnado los tópicos de producto fundamental y conjunto autónomo como la nueva propuesta desde la perspectiva del uso de la teoría de grafos para así comparar las ventajas e inconvenientes de una y de otra.

2. PRELIMINARES

Para una mejor comprensión tanto de la metodología docente empleada tradicionalmente como la alternativa que aquí defendemos, mostramos a continuación una breve descripción de algunos conceptos básicos tanto de Teoría de Grafos como de Análisis Input-Output. Para una mayor información sobre estos tópicos, el lector puede consultar Harary (1969) y Leontief (1966), respectivamente.

Un *grafo dirigido* $D=(V, E)$ no es más que un par ordenado en el que V es un conjunto finito no vacío y E es un conjunto finito de pares ordenados de los elementos de V. A los elementos de V se les denominan *vértices*; mientras que a los de E se les denomina *aristas* o *arcos*. Si v y w son dos vértices de D, entonces el arco $(v, w)\in E$ se denomina arco de v a w.

En el grafo dirigido D, la relación entre los vértices se establece por la existencia de lo que se denomina caminos dirigidos entre vértices. Más concretamente, un *camino dirigido (de longitud n)* de un vértice v_1 a un vértice v_{n+1} de D simplemente es una sucesión de arcos $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_n, v_{n+1})$ en D. De hecho, si todos los vértices son distintos, el camino se llama *recorrido dirigido*; mientras que si los vértices inicial y final son iguales (i.e. $v_1=v_{n+1}$), se denomina *ciclo dirigido*.

En ocasiones, interesa obviar el sentido de los arcos y considerar que es indiferente ir del vértice primero al segundo o viceversa. En ese caso, dados dos vértices v y w, los pares (v, w) y (w, v) pueden identificarse y se denotan como $\{v, w\}$. De este modo, suprimiríamos el término “dirigido” de las definiciones anteriores y podríamos obtener los correspondientes conceptos en un grafo no dirigido. Un tipo particular de grafo no dirigido es el denominado *árbol*. Concretamente, consiste en un grafo sin ciclos y en el que existe un camino entre cualesquiera dos vértices del grafo.

Este concepto de árbol es esencial para asegurar la existencia de caminos entre vértices de un grafo G que no sea necesariamente un árbol. Para ello, lo que interesa es encontrar un árbol cuyo conjunto de vértices sea el mismo que el de G y cuyas aristas formen un subconjunto de las aristas de G (es decir, el grafo G “contiene en su interior un árbol con el mismo conjunto de vértices). Si encontramos un árbol así en el grafo G entonces el árbol se denomina *árbol recubridor* y el grafo G se dice que es *conexo*. Que el grafo sea conexo, simplemente significa que podremos encontrar un camino entre cualesquiera dos vértices del grafo. Aunque el concepto de conectividad se define sobre grafos no dirigidos, es bastante simple extenderlo a grafos dirigidos: simplemente hay que determinar la existencia de un árbol recubridor en el grafo resultante a suprimir las orientaciones de los arcos en el grafo dirigido.

No obstante, en grafos dirigidos existen conceptos de conectividad en los que se tiene en cuenta la orientación de los arcos del grafo dirigido. Para ello, hemos de considerar árboles en los que los caminos existentes desde un vértice a todos los demás son caminos dirigidos. De este modo, se define un *árbol dirigido de salida enraizado en el vértice v* como un árbol en el que existe un (único) camino dirigido en el árbol desde el vértice v a cualquier otro vértice del árbol. Del mismo modo, se puede definir el concepto de *árbol dirigido de entrada enraizado en v* sin más que exigir la existencia de un (único) camino dirigido en el árbol desde cualquier vértice a v. En ambos casos, el vértice v se llama *raíz* del árbol. Los árboles dirigidos (tanto de salida como de entrada) enraizados pueden ser árboles recubridores de un grafo dirigido D; simplemente se requiere que los conjuntos de vértices del árbol y de D sean el mismo. Cuando el grafo dirigido D contiene tanto un árbol recubridor dirigido de salida como otro de entrada, ambos enraizados en el mismo vértice, entonces D

se dice *fuertemente conexo* y viene a significar que podemos hallar un camino dirigido de un vértice cualquier de D a otro.

Una vez indicados los conceptos básicos de teoría de grafos que emplearemos en este trabajo, pasamos a recordar la formulación del modelo input-output introducido por Leontief. De este modo, se considera una economía con n sectores productivos de manera que cada sector produzca un único bien o producto. Debe tenerse en cuenta que los sectores productivos actúan simultáneamente como productores y como consumidores: como productores, porque cualquier sector i vende su producto (el output de i) a los otros sectores para que éstos produzcan; y como consumidor, porque ese mismo sector i compra la producción de los otros sectores (los inputs de i) para producir su propia producción. Estas transacciones de productos entre sectores de la economía suele representarte mediante una matriz cuadrada en la que la fila i-ésima representa las ventas del sector i a los sectores productivos de la economía, mientras que la columna i-ésima corresponde a las compras del sector i a tales sectores. Dicha matriz recibe el nombre de *matriz de flujos intersectoriales* y permite analizar la situación de la economía en el período estudiado (habitualmente un año) medida en unidades monetarias. Sin embargo, también se usa una segunda matriz cuadrada $A=(a_{i,j})$, la denominada *matriz de coeficientes tecnológicos*, para estudiar los cambios que se producen en la producción de cada sector debido a los cambios que se producen en su demanda final. Esta es la matriz que permite observar la estructura interna del sistema económico y comparar dos economías entre sí en el mismo período temporal o la misma economía en períodos temporales distintos, ya que el elemento $a_{i,j}$ representa el valor del input comprado por el sector i al sector j por cada unidad monetaria del output producido por el sector j.

3. METODOLOGÍA TRADICIONAL

A continuación pasamos a exponer los dos tópicos que son motivo de este trabajo desde la perspectiva tradicional del análisis input-output: producto fundamental y conjunto autónomo.

Para ello, consideramos una economía con n sectores productivos y $N=\{1,\ldots,n\}$ es el *conjunto de índices* que representa a dichos sectores. Consideramos igualmente la matriz $A=(a_{i,j})$de coeficientes tecnológicos (aunque para trabajar con los dos conceptos anteriormente indicado se puede utilizar indistintamente la matriz de flujos intersectoriales y así se les indica al alumnado).

Desde la perspectiva tradicional, es necesario empezar definiendo el concepto de conjunto autónomo como sigue: Un subconjunto $S \subseteq N$ es un *conjunto autónomo* si se cumple que $a_{i,j} = 0$ para todo $i \in S$ y para todo $j \in N - S$.

Esta definición matemática va acompañada de la siguiente interpretación económica para una mejor comprensión por parte de nuestro alumnado: *S* es un conjunto autónomo si y solo si los sectores de *S* no necesitan de los productos producidos por los sectores que no están en *S*; dicho de otro modo, la producción de los sectores que están en *S* solo requieren de la producción de éstos mismos sectores, no interviniendo sectores fuera de *S*.

Por tanto, para que el estudiante determine cuáles son los conjuntos autónomos en una economía tendría que testear cada uno de los subconjuntos de *N* y comprobar la condición marcada en la definición antes indicada. Pongamos un ejemplo con una economía con tres sectores y la siguiente matriz de coeficientes tecnológicos:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

En una economía con tres sectores, tendríamos que considerar los siete subconjuntos no vacíos que contiene $N=\{1, 2, 3\}$ para solo obtener dos subconjuntos que serán autónomos (concretamente $\{1\}$ y el propio *N*). Para ello, el alumno tiene que proceder como sigue para cada subconjunto (lo cual nosotros solo ejemplificaremos con un subconjunto de un elemento y otro de dos). En el caso del subconjunto $S=\{2, 3\}$, tenemos que considerar el subconjunto $N - S = \{1\}$ y comprobar que el sector 1 no vende su producto a los sectores 2 y 3. Matemáticamente, esto se observa comprobando si $a_{1,2} = 0$ y $a_{1,3} = 0$. Sin embargo, $a_{1,2} = 0.5 \neq 0$ y, por tanto, el sector 1 sí interviene en la producción del sector 2 y el subconjunto $S=\{2, 3\}$ no es autónomo. Por el contrario, si consideramos el conjunto $S=\{1\}$, tendríamos ahora $N - S = \{2, 3\}$ y habríamos de comprobar que se cumple tanto $a_{2,1} = 0$ como $a_{3.1} = 0$. Como en este caso ambas condiciones se cumplen, podemos afirmar que el sector 1 no requiere de las producciones de los sectores 2 y 3, por lo que $S=\{1\}$ es un conjunto autónomo.

De todos los subconjuntos que el alumno debería comprobar para ver si son autónomos, el único que podría obviar sería el propio conjunto N (la economía completa) 0que debería saber que siempre será autónomo independientemente de la matriz que se esté considerando.

Tras explicar el concepto de conjunto autónomo, se pasa a explicar el de producto fundamental. Se dice que el producto del sector $i \in N$ es n *producto fundamental* de la economía si es utilizado, directa o indirectamente, en la producción de todos los bienes (incluido él mismo).

En la economía anteriormente usada como ejemplo, el sector 1 resulta ser un producto fundamental. Esto se debe a dos motivos: por un lado, interviene directamente en la producción de los sectores 1 y 2 (es decir $a_{1,1} \neq 0$ y $a_{1,2} \neq 0$); y, por otro, aunque no interviene directamente en la producción del sector 3 (ya que $a_{1,3} = 0$) sí lo hace indirectamente a través del sector 2, que sí interviene en la producción del sector 3 (pues $a_{2,3} \neq 0$). Sin embargo, quedaría comprobar si los productos de los sectores 2 y 3 son fundamentales o no. Para hacer esto, habría que comprobar todas las posibles formas de intervenir tanto directa como indirectamente en la producción de todos y cada uno de los sectores de la economía, lo cual conlleva un número considerable de casos a considerar, que va aumentando de manera desproporcionada a medida que aumenta el número de sectores en la economía.

Para evitar esta problemática, la metodología tradicional busca relacionar el concepto de producto fundamental con el de conjunto autónomo. Concretamente, al alumnado se les enuncia el siguiente resultado: Si existen productos fundamentales, el conjunto formado por todos los productos fundamentales es el menor conjunto autónomo.

La definición anterior abusa de lenguaje para simplificar el enunciado de cara al alumnado y facilitar su uso. En este sentido, cuando se hace referencia al menor conjunto autónomo, debe entenderse que se ordenan todos los conjuntos autónomos que se han obtenido en la economía y se ordenan en base a la inclusión de unos conjuntos en otros, si ello es posible. Cuando se pueden ordenar usando la inclusión de conjuntos, entonces el que menos elementos tiene en la cadena de inclusiones será el menor.

Pero con la definición anterior no solo debemos tener en cuenta la aclaración anterior sobre qué se entiende por "menor conjunto", sino que también debe tenerse en cuenta algunas cuestiones adicionales:

1. La primera de ellas consiste en que la existencia del menor conjunto autónomo no asegura la existencia de productos fundamentales y, por tanto, dicho conjunto solo da la lista de candidatos a ser productos fundamentales. El alumno debe, por consiguiente, comprobar que dichos productos son fundamentales viendo las relaciones con todos y cada uno de los sectores en la economía (en realidad, bastaría con comprobar que alguno de los elementos es producto fundamental o que no lo es para sacar la conclusión de que todos son conjuntos autónomos o que ninguno lo es).
2. Si el listado de conjuntos autónomos conlleva que se obtienen dos conjuntos autónomos de modo que ninguno de los dos está contenido en el otro, entonces automáticamente la economía no tendría productos fundamentales.

Siguiendo con el ejemplo numérico de esta sección, obtuvimos como conjuntos autónomos, los subconjuntos $\{1\}$ y $\{1, 2, 3\}$, que pueden ordenarse mediante la siguiente cadena de inclusiones $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$. El menor conjunto autónomo es, por tanto, el subconjunto $\{1\}$ y el producto del sector 1 (que ya comprobamos antes que era un producto fundamental) es el único producto de la economía que podría ser fundamental.

No obstante, si consideramos ahora una economía con tres sectores pero con matriz de coeficientes tecnológicos dada por:

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso y repitiendo el procedimiento arriba explicado en esta misma sección, podemos concluir que los conjuntos autónomos de la economía son $\{3\}$, $\{2, 3\}$ y $\{1, 2, 3\}$. En este caso, los conjuntos autónomos también pueden ordenarse mediante la cadena de inclusiones $\{3\} \subset \{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$. En consecuencia, el menor conjunto autónomo sería $\{3\}$ y, de existir algún producto fundamental, debería ser el bien 3. En este caso, es sencillo comprobar que la producción del sector 3 no depende de ninguno de los sectores y, por tanto, no es posible que el sector 3 intervenga en su propia producción; lo que conlleva que 3 no es un producto fundamental.

4. METODOLOGÍA BASADA EN GRAFOS

En la presente sección mostraremos cómo los conceptos anteriormente introducidos de producto fundamental y conjunto autónomo pueden se explicados, en nuestra opinión, de una manera más sencilla e intuitiva para nuestro alumnado que utilizando la metodología tradicional ya explicada. Asimismo, a medida que vamos indicando cómo procederemos a explicar los conceptos y a trabajar los procedimientos iremos exponiendo las ventajas de esta metodología basada en el uso de la teoría de grafos.

Como veremos a lo largo de esta sección, el uso de grafos (y más concretamente grafos dirigidos) le permitirá a nuestro alumnado trabajar de una manera más intuitiva y gráfica centrada más en el concepto económico y en la relación entre los sectores; simplificando además esencialmente los cálculos y el número de casos a considerar.

El primer cambio esencial en el enfoque basado en grafos radica en que primero se estudian los productos fundamentales y no los conjuntos autónomos. De hecho, veremos que se puede utilizar un procedimiento algorítmico para la obtención de los productos fundamentales sin necesidad de tener que determinar los conjuntos autónomos, lo cual simplificará significativamente el cálculo y permite que el alumno no se equivoque al determinar los productos fundamentales por haber cometido algún error en el cálculo de los conjuntos autónomos. Es más, al no requerir los conjuntos autónomos, podemos obviar el elevado número de subconjuntos del conjunto de índices N de la economía reduciendo el coste en los cálculos de nuestro alumnado.

Usando la misma notación que en la sección anterior para la economía, su conjunto de índices y su matriz de coeficientes tecnológicos, lo primero que tendremos que hacer es asociar un grafo dirigido $D=(V, E)$ asociado a la economía. Dicha asociación es lo primero que se le explica al alumnado. El procedimiento que se les indica es el siguiente: primero, se considera como conjunto de vértices V al propio conjunto de índices N (lo que viene a significar que el alumno asocia un vértice a cada producto/sector); y en segundo lugar, el conjunto de arcos lo define a partir de la matriz de coeficientes tecnológicos (o equivalentemente de la matriz de flujos intersectoriales). Dados dos vértices i y j del grafo, la existencia del arco (i,j) de i a j existe si y solo si el coeficiente $a_{i,j}$ es no nulo. De este modo la existencia del arco que va de i a j viene a representar que el sector i vende su producto al sector j; es decir, los arcos del grafo vienen a indicar si hay intervención directa del sector i en la producción del sector j.

Para ilustrar esta asociación, la Figura 1 muestra el grafo que se asociaría a una economía con tres sectores productivos y con matriz de coeficientes tecnológicos

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

Dicho grafo dirigido tiene como conjunto de vértices V=N={1, 2, 3} y como conjunto de arcos E={(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,2)}.

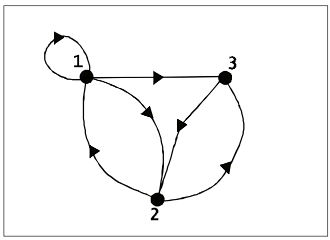

Figura 1. Ejemplo de grafo dirigido asociado a una economía

El cálculo de los productos fundamentales de la economía es equivalente a la obtención de caminos dirigidos en el grafo D. Concretamente, se utiliza la siguiente propiedad: el producto del sector i es un producto fundamental si y solo si existe un camino dirigido en el grafo D del vértice i a cualquier vértice $j \in N$ (incluido el propio i).

La existencia de un camino dirigido saliendo desde el vértice i a otro vértice quiere decir que el producto del sector i incide directamente en la producción del vértice al final del camino, ya que todos los arcos tienen la misma orientación.

Sin embargo, no buscaremos los caminos dirigidos desde un vértice de cualquier manera ya que, aunque se puede automatizar esta búsqueda mediante algoritmos sencillos de aplicación, el coste computacional que tiene no merece la pena y se puede realizar un segundo enfoque basado en grafos que es menos costoso y muy sencillo de usar por el alumnado. Precisamente, una forma muy simple de reducir este problema consiste en tener una técnica que permita determinar fácilmente un producto fundamental para, a partir de él, obtener el resto de los productos fundamentales. Para esto último, se les explica al alumnado el siguiente resultado: si i es un producto fundamental de la economía, el producto j es también fundamental si y solo si existe un camino dirigido de j a i en el grafo D.

Esta propiedad permite que el estudiante solo tenga que buscar caminos dirigidos desde todos los vértices del grafo salvo aquel que ya se ha determinado como producto fundamental. Esto es fácil de llevar a cabo por medio de una búsqueda en profundidad desde el vértice que queremos saber si es fundamental y detectar si en la búsqueda se alcanza el vértice i.

Pero ¿cómo puede calcular nuestro alumnado el primer producto fundamental a partir del cual empezar el procedimiento anteriormente indicado? Pues lo que se les indica es que usen la siguiente caracterización de un producto fundamental: el producto i es fundamental si y solo si en el grafo D existe un árbol recubridor dirigido de salida enraizado en i y un ciclo dirigido conteniendo a dicho vértice.

Nuevamente, la metodología que se usa para encontrar el árbol recubridor dirigido que se requiere es una búsqueda en profundidad. También el ciclo puede localizarse en el grafo D de manera similar.

De este modo y solo usando una estrategia de búsqueda en el grafo, se puede obtener fácilmente el conjunto formado por todos los productos fundamentales. Esta metodología resulta más intuitiva para el alumno pues debe buscar sobre la representación gráfica los caminos y ciclos dirigidos siguiendo estrategias muy simples de búsqueda que les resulta más fácil de entender y asimilar.

En particular y reuniendo todo lo anterior, llegar a la conclusión de que todos los productos de la economía son fundamentales se limita simplemente a encontrar un ciclo dirigido que contengan a todos los vértices del grado D. Nuevamente, todo se limita a una búsqueda en el grafo.

Una vez calculados los productos fundamentales, le planteamos a nuestro alumnado la determinación de todos los conjuntos autónomos de la economía. En caso de que haya productos fundamentales, el estudiante podría partir de ese conjunto autónomo minimal e ir generando todos los subconjuntos autónomos que contendrían al formado por los productos fundamentales. Eso nos permite descartar subconjuntos del conjunto N de índices que no habríamos podido descartar en la metodología tradicional. Cuanto mayor sea el número de productos fundamentales, mayor sería el número de subconjuntos de N que podría descartar nuestro alumnado.

No obstante, esto tiene dos desventajas: la primera consiste en que hemos tenido que calcular previamente los productos fundamentales y, al igual que antes no queríamos tener que calcular los productos fundamentales a partir de los conjuntos autónomos, sería conveniente ver si pudiéramos calcular los conjuntos autónomos sin necesidad de calcular los productos fundamentales y reduciendo el volumen de cálculos de la metodología tradicional. La segunda desventaja es muy simple: si no tenemos productos fundamentales o son muy pocos en comparación con el número de sectores, el volumen de subconjuntos que descartamos no es significativo y el alumno tendrá que realizar una cantidad considerable de cálculos que no son realmente necesarios.

Por ese motivo, a nuestro alumnado les explicamos cómo calcular el menor conjunto autónomo que contiene a un vértice dado. El planteamiento es el siguiente cogemos uno a uno los *n* vértices que tiene el grafo *D* asociado a la economía y buscamos un árbol dirigido de entrada que esté enraizado en el vértice que estemos estudiando en ese momento (es decir, otra vez una búsqueda en profundidad en el grafo *D*). El conjunto de vértices de ese árbol corresponde al menor conjunto autónomo de la economía que contiene al sector representado por dicho vértice. De este modo, obtenemos a lo sumo *n* conjuntos autónomos (puede ocurrir que varios vértices lleven al mismo conjunto autónomo) y todos los demás conjuntos autónomos existentes en la economía se obtienen como uniones de dos o más de estos subconjuntos… Lo cual es menos costoso y complicado para el alumno.

Desde un punto de vista gráfico, la existencia de un conjunto autónomo en la economía se resume a que existan subconjuntos de vértices en *D* en los que todos los arcos que unen a los vértices de uno de tales subconjuntos con el resto de vértices de *D* son de salida y no de entrada… Con lo cual en economías de 3 o 4 sectores (que son las que habitualmente se usan a nivel académico), resulta visualmente fácil intuir la existencia de conjuntos autónomos, que habrá que confirmar posteriormente con la metodología indicada en el párrafo anterior.

Para concluir esta sección, solo queremos indicar un resultado final que le indicamos a nuestro alumnado para determinar la existencia de un único conjunto autónomo en la economía (lo cual era equivalente al hecho que todos los productos fueran fundamentales). Concretamente, se les indica que la existencia de un único conjunto autónomo es equivalente a que el grafo *D* sea fuertemente conexo.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos expuesto las dos metodologías que hemos venido empleando para explicar a nuestro alumnado los conceptos de producto fundamental y conjunto autónomo de una economía, mostrándoles las técnicas para determinar tanto unos como otros.

En este sentido, tras exponer la metodología que tradicionalmente se viene usando para impartir la docencia de estos dos tópicos, hemos procedido a explicar una metodología alternativa que entendemos permite innovar en la docencia pues suprime la necesidad de unos cálculos excesivos y desorbitados, centrándose en los conceptos. Esta metodología basada en el uso de grafos dirigidos y de sus propiedades permite que el alumnado trate ambos conceptos mediante unos procedimientos y mecanismos mucho más eficientes, rápidos e intuitivos que los existentes en la metodología tradicional.

En nuestra opinión, creemos que al alumnado le resulta mucho más fácil entender y asimilar estos dos conceptos y la relación entre ellos mediante la aproximación basada en grafos que usando directamente la matriz de coeficientes tecnológicos.

Referencias Bibliográficas

FEDRIANI, Eugenio M. y MELGAR, María del Carmen. 2010. **Matemáticas para el éxito empresarial**. Editorial Pirámide, Madrid (España).

FEDRIANI, Eugenio M. y TENORIO, Angel F. 2012. "Simplifying the input–output analysis through the use of topological graphs". **Economic Modelling.** Vol. 29: 1931–1937. Elsevier, Amsterdam (Países Bajos).

FEDRIANI, Eugenio M. y TENORIO, Angel F. 2015. Fundamental Products and Autonomous Sets: An Algorithmic Approach. **Applied Mathematics & Information Sciences**. Vol. 9. Nº 1: 9–18. Natural Sciences Publishing, Nueva York (Estados Unidos).

HARARY, Frank. 1969. **Graph Theory**. Addison-Wesley, Reading (Estados Unidos).

LEONTIEF, Wassily W. 1936. Quantitative input–output relations in the economic system of the United States. **The Review of Economics and Statistics**. Vol. 18: 105–125. MIT Press, Cambridge (Estados Unidos).

LEONTIEF, Wassily W. 1941. **The Structure of the American Economy, 1919–1929**. Harvard University Press, Cambridge (Estados Unidos).

LEONTIEF, Wassily W. 1966. **Input-Output Economics**. Oxford University Press, Nueva York (Estados Unidos).

MICHEL, Pierre. 1989. **Cours de Mathématiques pour Economistes**. Economica, París (Francia).

SRAFFA, Piero. 1960. **Production of Commodities by Means of Commodities: Prelude to a Critique of Economic Theory**. Cambridge University Press, Cambridge (Inglaterra).

ONU. 1993. **Handbook of National Accounting: Integrated Environmental and Economic Accounting**. Studies in Methods Series F, 61. Naciones Unidas, Nueva York (Estados Unidos). Disponible en http://unstats.un.org/unsd/publication/SeriesF/SeriesF 61E.pdf. Consultado el 20.01.2015.

ONU. 1994. **System of National Accounts 1993**. Studies in Methods Series F, 2. Naciones Unidas, Nueva York (Estados Unidos). Disponible en http://unstats.un.org/unsd/nationalaccount/sna1993.asp. Consultado el 19.01.2015.

ONU. 1999. **Handbook of Input–Output Table Compilation and Analysis**. Studies in Methods Series F, 74. Naciones Unidas, Nueva York (Estados Unidos). Disponible en http://unstats.un.org/unsd/publication/SeriesF/SeriesF_74E.pdf. Consultado el 19.01.2015.