Revista Arbitrada Venezolana
del Núcleo Costa Oriental del Lago

impacto Científico

Universidad del Zulia

Junio 2024
Vol. 19 Nº 1

ppi 201502ZU4641
Esta publicación científica en formato digital
es continuidad de la revista impresa
Depósito Legal: pp 200602ZU2811 / ISSN:1856-5042
ISSN Electrónico: 2542-3207

Impacto Científico
Revista Arbitrada Venezolana
del Núcleo LUZ-Costa Oriental del Lago
Vol. 19. N°1. Junio 2024. pp. 83-113

Propiedades para la generación de números cuadrados perfectos

Alexander Villarroel
Investigador independiente en teoría de números
https://orcid.org/0000-0002-4628-1894
trabajos_alexvilla@hotmail.com

Francisco Villarroel
Investigador independiente en teoría de números
https://orcid.org/0000-0002-9159-5892
fjvillr02@hotmail.com

Resumen

El objetivo fundamental del presente artículo es dar a conocer un conjunto de propiedades novedosas sobre generación de números cuadrados que puede ser útil en la enseñanza de las matemáticas con el fin de motivar a los alumnos de nivel medio hacia la curiosidad por desarrollar fórmulas interesantes, es una investigación original que ha surgido de jugar con los números naturales.

Palabras Clave: Cuadrados perfectos, demostraciones, números naturales, propiedades.

RECIBIDO: 19/07/2023 · ACEPTADO:01/04/2024

Properties for the generation of perfect square numbers

Abstract

The main objective of this article is to present a set of novel properties on the generation of square numbers that can be useful in the teaching of mathematics in order to motivate middle-level students towards the curiosity to develop interesting formulas, the which is original research that has emerged from playing with natural numbers.

Keywords: Perfect squares, proofs, natural numbers, properties.

Introducción

Desde tiempos inmemoriales los números cuadrados han sido conocidos por parte de diversas culturas. Sin embargo, desde los tiempos de Pitágoras y su escuela, los números cuadrados perfectos han sido objeto de estudio de muchos matemáticos, quienes han desarrollado una serie de propiedades que cumplen éstos y que se relacionan con los números triangulares, así como los impares y otros números. Trabajar con cuadrados fue la fuente que generó el teorema de Pitágoras, así como las ternas pitagóricas y ha sido fuente de muchas representaciones matemáticas como ciertos números primos en base a suma de cuadrados o la obtención de ciertos números primos como suma de un cuadrado más 1.

Por otra parte, los cuadrados perfectos han sido fuente de infinidad de problemas matemáticos como el problema de Brocard que estudia la relación entre factoriales y cuadrados perfectos, o de ecuaciones diofánticas como las de Pell. A lo largo de la historia han sido mucho los estudiosos de formas cuadráticas como las ecuaciones de la forma $x^2 \pm 2y^2 = N$ o $x^2 + 3y^2 = z^3$. Por poner un ejemplo, François Viète (1540 - 1603) estudió la ecuación $x^2 + 3y^2 = z^2$ y tomó dos números enteros a y b, primos entre sí, con $a^3 > 9ab^2$, y creó el siguiente generador para el cálculo de las variables x, y, z a través de las fórmulas $x = a^3 - 9ab^2$, y $3a^2b - 3b^3$ $yz = a^2 + 3b^2$.

Luego de presentar una serie de aspectos teóricos e históricos sobre los números cuadrados y algunas de las propiedades que ya son conocidas se muestra un conjunto de propiedades que hemos ido encontrando a partir del hecho de jugar de forma constante con los números naturales estudiando lo maravillosos que son los mismos para ensayar posibles relaciones numéricas y poner en práctica la creatividad matemática. Para cada propiedad se presentan unos pocos ejemplos y la demostración general de la propiedad y en algunos casos se colocan especificaciones para el cumplimiento de la misma.

Metodología

Diseño de investigación

En cuanto a la metodología aplicada para la realización de este artículo se usa un diseño de tipo descriptivo y explicativo (ver Arias (2020)), usando la investigación exploratoria y usando una revisión documental la cual según Palella y Martins (2017) "*Se concreta exclusivamente en la recopilación de información en diversas fuentes. Indaga sobre un tema en documentos…*". En cuanto a este tipo de investigación es significativa la definición de Arias (2020).

En efecto, para la realización de este trabajo fue necesario realizar un recorrido en internet y varias bibliografías de muchos aspectos concernientes a los números cuadrados perfectos y sus propiedades y como técnica para el tratamiento de la información recopilada, se utilizó el análisis de contenido, que tiene el propósito de profundizar en la información escrita de forma sistemática y objetiva.

Con lo desarrollado en este artículo se evidencia que la generación de cuadrados es un campo de gran versatilidad, en el cual se pueden hacer muchos avances importantes que enriquecerían el campo de la teoría de números y que brindarían la oportunidad de generar muchas fórmulas que pueden ser útiles a nivel de cálculo matemático y como resultados interesantes en el campo de las matemáticas. Esto evidencia que en cuanto a investigación hay muchas posibilidades de crear fórmulas y de avanzar en temas que en opinión de muchos ya están cerrados cuando son áreas donde investigadores profesionales, aficionados, profesores y estudiantes pueden seguir aprendiendo y desarrollando las matemáticas.

Desarrollo de los contenidos los números cuadrados

Hablando en palabras sencillas Un número entero N es llamado cuadrado si es posible disponer N objetos de manera de formar un cuadrado. Al respecto, según Castro y Ruiz (2018, p.4) hay una relación geométrica algebraica de un número cuadrado N*N, ya que el mismo simboliza un cuadrado de lado N. Entonces los primeros enteros cuadrados son por tanto el 1, 4, 9, 16…donde 1 corresponde a un punto o cuadrado de 1*1, 4 representa un cuadrado de lado 2*2 y así sucesivamente. A veces se utiliza también el término cuadrado perfecto, el cual se explica por el hecho de que no hay objeto "faltante" o "de más" en las figuras cuadradas trazadas.

Por su parte, Weisstein en (OEIS A000290) indica que "Un número cuadrado, también llamado cuadrado perfecto, es un número figurado de la forma Sn = n ^ 2, donde n es un número entero. Los números cuadrados para n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6... son 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

Un número es un cuadrado perfecto si se puede ordenar en una figura cuadrada. Por ejemplo, 25 es un número cuadrado perfecto ya que puede ser escrito como 5 × 5, y se puede ordenar sumando igual cantidad de números impares. Así 12 =1*1=1 que corresponde a 1, 22=2*2=4 que corresponde a 1+3=4, luego 9=4+5=1+3+5, 16=9+7=1+3+5+7, 25=16+9=1+3+5+7+9 y así sucesivamente. Lo antes expresado puede verse en la siguiente figura:

1	4	5	16	17
2	3	6	15	18
9	8	7	14	19
10	11	12	13	20
25	24	23	22	21

Figura 1: Un cuadrado como suma de impares

Fuente: Elaboración por parte de los autores

Frabetti (2021) define "los cuadrados perfectos o números cuadrados se pueden representar como conjuntos de puntos dispuestos de manera que configuren un cuadrado. Como el 1 es un cuadrado perfecto, puesto que $1^2 = 1$, en este caso su inclusión como primer término de la secuencia" de los números cuadrados. Más del enfoque algebraico geométrico de los cuadrados es mostrado por Anfossi y Flores (2006) al hablar sobre el tema de los números cuadrados cuando comentan lo siguiente:

"En álgebra, el cuadrado de un número n se expresa como n^2, y equivale a n × n. La operación algebraica de elevar al cuadrado un número n nos proporciona el área de un cuadrado geométrico cuyo lado mide n. Por esta razón, tal operación se conoce como elevar al cuadrado". (p.20)

En efecto, a ese simbolismo geométrico lo acompaña un proceso de cálculo algebraico que explica que los enteros cuadrados se obtienen multiplicando un entero cualquiera por sí mismo: 1 = 1 × 1; 4 = 2 × 2; 9 = 3 × 3 y así sucesivamente. Es decir, que todo cuadrado es de la forma $n^2=n \times n$, donde n se conoce como la raíz cuadrada de n^2

Por otra parte, al agregar a n un cierto valor k siempre es posible obtener el cuadrado de dicha expresión conocida como binomio al cuadrado, el cual corresponde a la fórmula:

$$(n + k)^2 = n^2 + 2nk + k^2 \text{ (Ref.1)}$$

Detalles históricos sobre números cuadrados perfectos

Los números cuadrados perfectos han sido usados desde fechas muy antiguas por varias culturas como la babilónica, los persas y los griegos, haciéndose muchas referencias a su uso por parte de Pitágoras en su escuela como consta en la formulación su famoso teorema y su utilidad en las archiconocidas ternas pitagóricas. Por poner un ejemplo, según Hofmann (2002) [8] en su historia de la matemática señala que "Los babilonios para la multiplicación P=a*b usaban la fórmula:

$$P = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2] \quad \textit{(Ref.1)}$$

pues ellos disponían de tablas de cuadrados".

En relación a las ternas pitagóricas que son sumas de 2 cuadrados igual a otro cuadrado, los investigadores Mansfield y Wildberger,(2017) indican que "la famosa tableta "Plimpton 322", escrita en cuneiforme y datada de alrededor del año 1800 a.C. descubierta a principios del Siglo 20 en la antigua ciudad de Larsa de Mesopotamia (sur de Irak actual), y señala que dicha tableta presenta una lista de números que permiten reconstruir 15 ternas pitagóricas, siendo la mayor de entre ellas (12709, 13500, 18541) "es absolutamente una tabla babilónica donde se explica la trigonometría sexagesimal en una forma exacta.

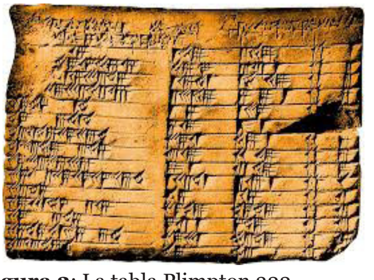

Figura 2: La tabla Plimpton 322
Fuente: imagen tomada de imágenes de Google.

Por otra parte, Euclides en su famoso libro Los Elementos, presentó un método para hallar ternas pitagóricas usando lo que llamó gnomon y en general los números cuadrados perfectos han sido usados por muchos matemáticos que han ido creando propiedades y teoremas como Fermat, Euler, Bachet, Legendre, Gauss y muchos otros.

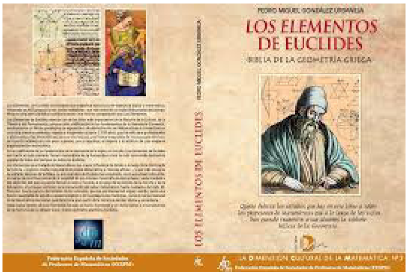

Figura 3: los elementos de Euclides
Fuente: imágenes tomadas de Google

Según Alonso (2019) "el 25 de diciembre de 1640, en una carta a Mersenne, Fermat demostró la conjetura de Girard: todo primo de la forma 4n+1 puede expresarse de manera única como suma de dos cuadrados. Por eso es conocido como el Teorema de Navidad de Fermat. Respecto a este importante teorema de la teoría de números también es importante consultar las publicaciones de Stillwell (1996) y Cox (1998) donde aparecen aspectos importantes en relación al teorema de Navidad de Fermat.

Además, Fermat anunció otros resultados relacionados con el uso de cuadrados para la generación de números primos que son muy interesantes catorce años más tarde. Así, en una carta escrita a su amigo Blaise Pascal el 25 de septiembre de 1654, anunciaba los siguientes resultados para números primos mayores que 2:

Cada número primo, que es mayor en una unidad a un múltiplo de 3, está compuesto por un cuadrado y el triple de otro cuadrado como 7, 13, 19, 31, 37, ...

Cada número primo, que es mayor en una unidad (1) o en tres unidades (3) a un múltiplo de 8, está compuesto por un cuadrado y el doble de otro cuadrado como 11, 17, 19, 41, 43, ... (correspondencia entre Fermat y Pascal) (ver enlace en las referencias) Pierre de Fermat

Lo que en términos modernos viene a ser:

$$p = x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow p \equiv 1 \text{ o } p \equiv 3 \pmod 8$$

Estos descubrimientos y proposiciones realizadas por Fermat en su tiempo y comunicadas a varios de sus amigos matemáticos en relación a los números primos hacen evidente la utilidad de los números cuadrados perfectos en varias áreas de las matemáticas.

Los autores Castañeda y Castañeda (2022) señalan que "Otra propiedad interesante de los números triangulares es que la suma de dos de ellos consecutivos resulta ser un cuadrado perfecto. Por ejemplo, T (3) + T(4) = 16, pero en general se cumple que

$$T(n) + T(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)$$

Donde se comprueba en efecto que la suma de dios números triangulares consecutivos es en todo caso un numero cuadrado.”

Los autores citados añaden que esta propiedad ya la conocían los antiguos griegos. A los matemáticos griegos del periodo clásica, como Pitágoras y Diofanto, les interesaba mucho la geometría y le daban una importancia especial a los números que se pueden utilizar para representar figuras geométricas mediante arreglos regulares de puntos, como el de la figura 1. Desde aquella ´época se inició el estudio de los números poligonales

En cuanto a los cuadrados también fue significativo el teorema de los 4 cuadrados, el cual según la historia aparece en el libro Arithmetica de Diofanto y dicho teorema dice básicamente lo siguiente: “Todo número entero positivo puede expresarse como suma de cuatro cuadrados de números enteros” y agrega que para la demostración es interesante utilizar la identidad de los cuatro cuadrados de Euler. Según Beshenov (2018, p.1) “Este teorema fue demostrado en 1770 por Joseph Louis Lagrange quien probó la imposibilidad de expresar cualquier número con cantidades inferiores a 4 cuadrados perfectos. Históricamente este teorema es el resultado de demostrar la conjetura de Bachet.

El autor señala además que “Uno de los primeros teóricos de números europeos fue el matemático francés Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638)”. En 1621, Bachet publicó la traducción en latín de la Arithmetica de Diofanto. En sus notas Bachet mencionó la siguiente conjetura.

Cada entero $n \geq 0$ puede expresarse como la suma de cuatro cuadrados:

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \ a, b, c, d \in Z$$

Por ejemplo: $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ (Ref. 3)

$15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

$28 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2$

Pero es necesario afirmar que dicha conjetura fue enunciada previamente por Fermat y que según Velarde (2015)

Años más tarde, en 1834, Carl Gustav Jakob Jacobi encontró la fórmula exacta para el número total de maneras en que un número entero positivo n dado puede representarse como la suma de cuatro cuadrados. Este número es ocho veces la suma de los divisores de n si n es impar y 24 veces la suma de los divisores impares de n si n es par (p.6)

Por otra parte, la suma de los primeros cinco cuadrados perfectos es:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55 \quad \text{(Ref. 4)}$$

Cuando se generaliza dicha suma para los primeros n cuadrados perfectos resulta que según Hernández (2018) [10] se obtiene:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (Ref.5)$$

Verificando para el ejemplo presentado (Ref. 4) nos queda

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{5(5+1)(2*5+1)}{6} = 55 \quad (Ref.6)$$

Al respecto, Ibáñez (2019) presenta en su trabajo dos formas de demostrar la proposición indicada con desde la forma algebraica y la forma gráfica que son muy interesantes.

A continuación, se presenta una serie de propiedades de los números cuadrados perfectos que son muy interesantes:

1.- Un cuadrado par se puede expresar como la suma de dos impares consecutivos. Pues si el cuadrado P cumple la condición entonces $P=4n^2$ y se tiene la expresión:

$$P = (2n^2+1) + (2n^2-1) \quad (Ref.7)$$

Donde cada sumando es impar y estos impares son consecutivos.

2.- El producto de dos pares consecutivos aumentado en 1 es cuadrado perfecto:

$$(2n)(2n+2) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 \quad (Ref.8)$$

Ejemplo: 54*54+1=2809, cuadrado de 53

3.- El producto de dos impares consecutivos más 1 es un cuadrado perfecto

$$(2n-1)(2n+1) + 1 = 4n^2 - 1 + 1 = 4n^2 \quad (Ref.9)$$

Por ejemplo: 95*97+1=9216. En ambos casos hallamos el cuadrado de la media aritmética de los factores.

Referente al tema del uso de los naturales para generar las propiedades de los números cuadrados perfectos puede decirse que es un área en permanente construcción. Por poner ejemplos, se podrían citar documentos recientes que buscan proporcionar algunas explicaciones y propiedades sobre los números cuadrados. Kiran Anil Parulekar (2012) publicó un libro titulado “las maravillosas propiedades de los números perfectos cuadrados y sus cálculos” donde trata importantes aspectos acerca de la generación de cuadrados perfectos y algunas propiedades sobre los mismos y Conway y Guy (1996) también hablan sobre los números cuadrados en su obra titulada “libro de los números”

Además, Castro (2013) muestra dos nuevas propiedades de los números para generar cuadrados, las cuales son:

Propiedad 1:

El producto de cuatro enteros consecutivos aumentado en 1 es un cuadrado perfecto.

$$-1)(n)(n+1)(n+2)+1=(n^2+n-1)^2 \quad \text{(1) (Ref. 10)}$$

Por ejemplo, 13 x 14 x 15 x 16 + 1=43681, es cuadrado de 209

Propiedad 2:

El producto de un múltiplo de un número n por el múltiplo transconsecutivo del mismo más el cuadrado de n es cuadrado perfecto.

$$kn[(k+2)n]+n^2=n^2(k+1)^2 \quad \text{(Ref.11)}$$

Por ejemplo, 7,14,21,28,35 son múltiplos de 7.

Luego 21 . 35 + 49= 784, cuadrado de 28.

Resultados

En esta sección del artículo se presenta una serie de propiedades que hemos encontrado y que consideramos importantes, ya que contienen aspectos que van aún más allá de aquellos que hemos encontrado en la literatura. Para cada una de ellas se muestra una enunciación de la propiedad encontrada y se muestran algunos ejemplos. Posteriormente se muestra la demostración de cada propiedad y de ser necesario se colocan notas explicativas que aclaran ciertos detalles de las propiedades.

Es preciso aclarar que muchas de las propiedades que aquí son mostradas han surgido de nuestra curiosidad por los números naturales, así como del estudio de diversos aspectos numéricos que han permitido poder obtener este conjunto de proposiciones que son también importantes para la representación de ciertos números cuadrados perfectos.

Las 20 nuevas propiedades

Propiedad 1

Propiedad de la suma y la resta

Si dos números $a > b$ son consecutivos de igual paridad, es decir, $a= b+2$ entonces se cumple que:

$$a \ast b \pm a \pm b + 2 = \begin{cases} a^2 \\ b^2 \end{cases} \qquad (Ecuación\ 1)$$

Ejemplos:

$$3 * 1 + 3 + 1 + 2 = 9$$
$$3 * 1 - 3 - 1 + 2 = 1$$
$$4 * 2 + 4 + 2 + 2 = 16$$
$$4 * 2 - 4 - 2 + 2 = 4$$
$$5 * 3 + 5 + 3 + 2 = 25$$
$$5 * 3 - 5 - 3 + 2 = 9$$
$$6 * 4 + 6 + 4 + 2 = 36$$
$$6 * 4 - 6 - 4 + 2 = 16$$

Demostración:

Parte 1. Demostramos que se cumple que $a * b + a + b + 2 = a^2$

Según el enunciado de la propiedad $a = b + 2$ por lo cual $b = a - 2$ entonces podemos escribir toda la expresión en términos de a como sigue:

$$a * b + a + b + 2 = a * (a - 2) + a + a - 2 + 2$$

Multiplicando obtenemos:

$$a * b + a + b + 2 = a^2 - 2a + a + a - 2 + 2$$

Al agrupar y simplificar términos semejantes nos queda:

$$a * b + a + b + 2 = a^2 \qquad (i)$$

Parte 2. Demostramos que se cumple que $a * b - a - b + 2 = b^2$

Según el enunciado de la propiedad $a = b+2$ por lo cual entonces podemos escribir toda la expresión en términos de b como sigue:

$$a * b - a - b + 2 = (b + 2) * b + b - 2 - b + 2$$

Multiplicando obtenemos:

$$a * b - a - b + 2 = b^2 + 2b - b - 2 - b + 2$$

Al agrupar y simplificar términos semejantes nos queda:

$$a * b - a - b + 2 = b^2 \qquad (ii)$$

Nota: De las expresiones *(i)* y *(ii)* se verifica el cumplimiento de **(Ecuación 1)**

Propiedad 2.

Propiedad del 7 y el 16

Todo producto de dos números positivos que difieran en 7 unidades sumado con un tercero que con el mayor sumen algebraicamente siempre 16 (es decir, el tercero puede ser positivo o negativo) es el cuadrado del primer número incrementado en 3.

$$n(n + 7) + (9 - n) = (n + 3)^2 \text{ con } n \geq 1 \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Ejemplos:

$5 * 12 + 4= 64= 8^2$ (*obsérvese que* 12 + 4= 16)

$44 * 51 - 35= 2209= 47^2$ (*obsérvese que* 51 - 35=16)

$300 * 307 - 291= 303^2$ (*obsérvese que* 307 - 291=16)

$1000 * 1007 - 991=1006009=(1003)^2$ (*obsérvese que* 1007 - 991=16)

Demostración

Sean los números $a= n$, $b= n + 7$ y $b + c= 16$ entonces

$$c= 16 - b= 16 - (n + 7)= 9 - n$$

Así nos queda:

$$a * b + c= n(n + 7) + (9 - n)$$

$$a * b + c= n^2 + 7n + 9 - n$$

$$a * b + c= n^2 + 6n + 9$$

$$a * b + c= (n + 3)^2$$

Como $a=n$ entonces

$a * b + c= (a + 3)^2$

Propiedad 3

Propiedad de los 3 consecutivos de igual paridad

Si un producto de tres números consecutivos de igual paridad termina en un cuadrado y se le suma el mismo cuadrado entonces siempre se obtiene otro cuadrado.

Ejemplos

$$5 * 7 * 9 + 9 = 324 = 18^2$$
$$12 * 14 * 16 + 16 = 2704 = 52^2$$
$$21 * 23 * 25 + 25 = 12100 = 110^2$$
$$32 * 34 * 36 + 36 = 39204 = 198^2$$
$$45 * 47 * 49 + 49 = 103684 = 322^2$$

Demostración 1:

Sean los números $a = n^2 - 4$, $b = n^2 - 2$ y $c = n^2$ entonces

Al sustituir los valores de a, b y c queda

Al sacar factor común a n^2

$$a * b * c + c = (n^2 - 4)(n^2 - 2)(n^2) + n^2$$

$$a * b * c + c = n^2[(n^2 - 4)(n^2 - 2) + 1]$$

Multiplicando se obtiene:

$$a * b * c + c = n^2[(n^4 - 6n^2 + 9]$$

Lo cual puede expresarse:

$$a * b * c + c = (n^2)(n^2 - 3)^2 \qquad \text{(Ecuación 3)}$$

Nota: Es obvio que siempre se obtiene un cuadrado, ya que el producto de 2 cuadrados es otro cuadrado

Demostración 2:

Sean $a = n$, $b = n + 2$ y $c = n + 4$ donde c es cualquier cuadrado mayor que 4 entonces se verifica que: $n (n + 2) (n + 4) + (n + 4)$ es un cuadrado.

Esto puede ser expresado en la siguiente forma:

Forma 1:

$$n(n+2)(n+4) + (n+4) = [n(n+2)+1](n+4)$$
$$n(n+2)(n+4) + (n+4) = [n^2+2n+1](n+4)$$
$$n(n+2)(n+4) + (n+4) = [(n+1)^2](n+4)$$
$$n(n+2)(n+4) + (n+4) = \left[(n+1)\sqrt{(n+4)}\right]^2 \qquad \text{(Ecuación 4)}$$

Nota: Esta igualdad se cumple para todos los números n de la sucesión infinita:

$$n = \{x^2 - 4\}\ con\ x \geq 3$$

La solución o cuadrado resultante en cada caso siempre tiene como base un producto de la forma (n+1) x, donde x es la base del cuadrado implicado en cada caso siendo $x \geq 3$

Propiedad 4

Generalización de la propiedad 1 de Castro

Se debe decir en forma previa que el análisis de la propiedad de Castro en una forma exhaustiva es sumamente importante porque se relaciona con el producto de dos oblongos y es una clave valiosísima en la solución de un problema pendiente en teoría de números, pero eso es objeto de otro artículo de investigación.

La propiedad 1 de Castro (2013) [6] puede reescribirse partiendo de (Ref. 10) en la forma:

$n*(n+1)*(n+2)*(n+3) + 1 = (n(n+3)+1)^2$ (Ecuación 6)

Nota: Aquí lo que hicimos fue comenzar en n y no en n-1 como lo hizo el mencionado investigador.

Ejemplos:

$$1*2*3*4+1=25=5^2,$$
$$2*3*4*5+1=121=11^2,$$
$$3*4*5*6+1=361=19^2$$
$$4*5*6*7+1=841=29^2$$

Nota $1=1^4=1^2$ *Brecha* 1, *suma* 1

Puede observarse que en la propiedad de Castro la brecha o diferencia entre números consecutivos es 1, pero:

a)¿Qué pasa si se aumenta la separación de los números a 2, 3, 4, entre otros números?

b)¿Qué número hay que sumar en cada caso para obtener un cuadrado?

Si la brecha entre números es 2 tenemos:

$1*3*5*7 = 105$, próximo cuadrado 121 → Diferencia= 121 - 105 = 16

$2*4*6*8 = 384$, próximo cuadrado 400 → Diferencia= 400 - 384 = 16

$3*5*7*9 = 945$, próximo cuadrado 961 → Diferencia= 961 - 945 = 16

$4*6*8*10 = 1920$, próximo cuadrado 1936 → Diferencia= 1936 - 1920 = 16

Nota: $16=2^4=4^2$, Brecha 2 suma 16

Si la brecha entre números es 3 tenemos:

1*4*7*10=280, próximo cuadrado 289 diferencia= 289-280=9

2*5*8*11= 880, próximo cuadrado 900 diferencia= 900-880=20

3*6*9*12=1944, próximo cuadrado 2025 diferencia= 2025-1944=81

4*7*10*13=3640, próximo cuadrado 3721 diferencia=3721-3640=81

Nota: aquí el valor de la diferencia que se repite para el próximo cuadrado es 81. Sin embargo, puede apreciarse que $280+81=361=19^2$ y además $880+81=961=31^2$. Es decir que el número que genera los 4 cuadrados es 81, para el cual puede apreciarse que:

$81=3^4=9^2$, Brecha 3 suma 81

Si la brecha entre números es 4 tenemos

1*5*9*13=585 próximo cuadrado 625 diferencia=625-585=40

2*6*10*14=1680 próximo cuadrado 1681 diferencia =1681-1680=1

3*7*11*15=3465 próximo cuadrado 3481 diferencia 3481-3465=16

4*8*12*16= 6144 próximo cuadrado 6241 diferencia 6241-6144=97(*)

Nota: No hay coincidencia entre las diferencias obtenidas en relación al primer cuadrado, pero ya se ha visto que si la brecha es k siempre debe agregarse k^4.

Como la brecha es $k = 4$ entonces $k^4 = 4^4 = 256$. Entonces probamos si a partir de los productos anteriores sumando 256 obtenemos cuadrados:

$$585 + 256 = 841 = 29^2$$

$$1680 + 256 = 1936 = 44^2$$

$$3465 + 256 = 3721 = 61^2$$

$$6144 + 256 = 6400 = 80^2$$

Dado que el razonamiento funciona y se generan cuadrados entonces se puede generalizar que: "**Si se multiplican 4 números de una progresión aritmética cualquiera y se le agrega la cuarta potencia de la diferencia que la domina el resultado es siempre un número cuadrado perfecto**."

Curiosidad matemática: las bases de los cuadrados resultantes dígase 29, 44, 61, 80 en lo mostrado anteriormente en (*) siempre son resultado del producto de los centrales disminuido en 16. En efecto, 29=5*9-16, 44=6*10-16, 61=7*11-16 y 80=8*12-16

En (1) se puede ver que la diferencia número a número es 1 y que se suma 1 obteniéndose un cuadrado. Ahora bien, si en esa proposición se incrementa cada vez k y se agrega en vez de 1 (1 elevado a la 4) el término k^4 (k elevado a la 4) queda la expresión:

$$(\textit{Proposición 1})\text{: } n(n+1k)(n+2k)(n+3k)+k^4 \text{ es un cuadrado } \forall n \geq 1 \text{ y } \forall k \geq 1$$

Para la (proposición 1) puede verse que en el caso de $1 \leq n \leq 4$ usando k=1, 2, 3, 4 se genera la siguiente tabla de valores:

	K=1	K=2	K=3	K=4
	Brecha 1	Brecha 2	Brecha 3	Brecha 4
n=1	1*2*3*4+1=25=5^2	1*3*5*7+16=121=11^2	1*4*7*10 +81= 361 =19^2	1*5*9*13 +256=841= 29^2
n=2	2*3*4*5+1=121=11^2	1*3*5*7+16=121=11^2	2*5*8*11+81=961=31^2	2*6*10*14+256=1936=44^2
n=3	3*4*5*6+1=361=19^2	3*5*7*9+16=961$31^2$	3*6*9*12+81=2025=45^2	3*7*11*15+256=3721=61^2
n=4	4*5*6*7+1=841= 29^2	4*6*8*10+16=1936=44^2	4*7*10*13+81=3721=61^2	4*8*12*16+256=6400=80^2

Tabla I. Generalización de la propiedad 1 de Castro.

Fuente: Los autores

Respecto a la tabla es preciso aclarar que, si se aumenta la brecha entre los números consecutivos a 5, 6, 7, y así sucesivamente la igualdad siempre sigue generando números cuadrados perfectos.

Demostración:

Se verificará que lo dicho en la (proposición 1) es cierto o mejor dicho que se verifica la expresión: 4 *

$$n\,(n + k)\,(n + 2k)\,(n + 3k) + k^4 = (n(n + 3k) + k^2)^2 \qquad \text{(Ecuación 7)}$$

Para demostrarlo basta comprobar que ambas partes de la igualdad dan el mismo resultado:

Parte 1: Desarrollando la parte izquierda de la igualdad tenemos

$$n (n + k) (n + 2k) (n + 3k) + k^4 = (n^2 + nk)(n^2 + 5nk + 6k^2 + k^4$$

$$(n + k)(n + 2k)(n + 3k) + k^4 = n^4 + 6n^3k + 11n^2k^2 + 6nk^3 + k^4 \quad (iii)$$

Parte 2: Desarrollando la parte derecha la igualdad tenemos:

$$(n(n + 3k) + k^2)^2 = (n^2 + 3nk + k^2)^2$$

$$(n(n + 3k) + k^2)^2 = (n^2 + 3nk + k^2)(n^2 + 3nk + k^2)$$

Desarrollando el producto polinomial:

$$(n(n + 3k) + k^2)^2 = n^4 + 3n^3k + n^2 + k^2 + 3n^3k + 9n^2k^2 + 3nk^3 + n^2k^2 + 3nk^3 + k^4$$

Agrupando términos semejantes queda:

$$(n(n + 3k) + k^2)^2 = n^4 + 6n^3k + 11n^2k^2 + 6nk^3 + k^4 \quad (iv)$$

De *(iii)* y *(iv)* se hace evidente la igualdad de ambas expresiones y en consecuencia se cumple la (Ecuación 7), es decir, que siempre se obtiene un cuadrado. De esta forma queda generalizada la propiedad de Castro.

Propiedad 5.

Propiedad del primer, cuarto y quinto número

Si en cada cinco números consecutivos multiplico el primero por el cuarto y le sumo el quinto entonces siempre se obtiene el cuadrado del tercero.

$$n(n + 3) + (n + 4) = (n + 2)^2, \text{ con } n \geq 1 \qquad \text{(Ecuación 8)}$$

Ejemplos:

Para n=1 nos queda: $(1)(4) + 5 = 9 = 3^2$

Para n= 10 *nos queda:* $(10)(13) + 14 = 144 = 12^2$

Para n= 100 *nos queda*: $(100)(103) + 104= 10404 =102^2$

Para n= 1005 *nos queda:* $(1005)(1008) + 1009 = 1014049 = 1007^2$

Para n= 10457 *nos queda:* $(10457)(10460) + 10461 = 109390681 = 10459^2$

Demostración:

Por el método directo sustituimos en la parte izquierda de la expresión en la (ecuación 8) y hallamos que se cumple que es igual a la parte derecha.

$$n(n + 3) + (n + 4) = n^2 + 3n + n + 4$$

$$n(n + 3) + (n + 4) = n^2 + 4n + 4$$

$$n(n + 3) + (n + 4) = (n + 2)^2$$

Expresando en términos de producto notable nos queda:

$$n^2 + (n + 1)^2 + (n - 2)^2 + (n + 3)^2 - 5 = (2n + 3)^2$$

La expresión anterior muestra el cumplimiento de la propiedad.

Propiedad 6

Cubo y cuadrado de un mismo número

El producto de todo número natural por el cubo de su consecutivo de igual paridad aumentado en el cuadrado de la base del cubo es siempre un cuadrado.

(Proposición 2): (n) * $(n + 2)^3 + (n + 2)^2$ es un cuadrado para toda n

Ejemplo:

$$1(3)^3 + (3)^2 = 6^2$$
$$2(4)^3 + (4)^2 = 12^2$$
$$3(5)^3 + (5)^2 = 20^2$$
$$4(6)^3 + (6)^2 = 30^2$$
$$5(7)^3 + (7)^2 = 42^2$$
$$6(8)^3 + (8)^2 = 56^2$$

Demostración:

Sean a=n y b=n+2 debe verificarse que: $a * b^3$ es siempre un cuadrado

$$a * b^3 + b^2 = n\,(n + 2)^3 + (n + 2)^2 \quad (iv)$$

Desarrollar ese producto indicado complica las cosas como puede apreciarse a continuación:

$$a * b^3 + b^2 = n\,(n^3 + 6n^2 + 12n + 8) + n^2 + 4n + 4$$
$$a * b^3 + b^2 = n^4 + 6n^3 + 12n^2 + 8n + n^2 + 4n + 4$$
$$a * b^3 + b^2 = n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4 \quad (v)$$

Sin embargo, sacando factor común en *(iv)* obtenemos:

$$a * b^3 + b^2 = (n + 2)^2\,[n\,(n + 2) + 1]$$
$$a * b^3 + b^2 = (n + 2)^2\,[n^2 + 2n + 1]$$

Lo anterior es expresable en la forma:

$$a * b^3 + b^2 = (n + 1)^2\,(n + 2)^2 \quad (vi)$$

De *(v)* y *(vi)* es obvio que:

$$n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4 = (n + 1)^2\,(n + 2)^2$$
$$n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4 = (n^2 + 3n + 2)^2$$

Nota1: De *(v)* y *(vi)* se ve el cumplimento de la propiedad usando dos procedimientos diferentes. Esta propiedad también puede ser llamada PROPIEDAD DEL CUADRADO DE OBLONGOS PARA n≥2, ya que los resultados de cada desarrollo del tipo $a * b^3 + b^2$ es siempre un oblongo que es $b\ (b - 1)$ es importante aclarar al lector que un oblongo es siempre el producto de números consecutivos, como lo son b - 1 y b.

Propiedad 7:

Suma de cuadrados de igual paridad menos 2

La suma de dos cuadrados consecutivos de igual paridad disminuida en 2 es siempre el duplo del cuadrado del número intermedio

$$n^2 + (n + 2)^2 - 2 = 2\ (n + 1)^2 \qquad \textbf{(Ecuación 9)}$$

Ejemplos:

$$1 + 9 - 2 = 8 = 2\ (4)$$
$$4 + 16 - 2 = 18 = 2\ (9)$$
$$9 + 25 - 2 = 32 = 2\ (16)$$
$$16 + 36 - 2 = 50 = 2\ (25)$$
$$25 + 49 - 2 = 72 = 2\ (36)$$
$$36 + 64 - 2 = 98 = 2(49)$$
$$49 + 81 - 2 = 128 = 2\ (64)$$

Demostración:

Basta probar que al desarrollar el lado izquierdo de la igualdad se obtiene el lado derecho de la misma y entonces así quedaría demostrado.

$$n^2 + (n + 2)^2 - 2 = n^2 + n^2 + 4n + 4 - 2$$
$$n^2 + (n + 2)^2 - 2 = 2n^2 + 4n + 2$$
$$n^2 + (n + 2)^2 - 2 = 2\ (n^2 + 2n + 1)$$
$$n^2 + (n + 2)^2 - 2 = 2\ (n + 1)^2$$

Así queda demostrada la propiedad

Propiedad 8

Suma de tres cuadrados de igual paridad

Si sumo los cuadrados de tres números consecutivos de igual paridad y le incremento en el producto de los dos extremos menos 4 siempre obtengo un cuadrado cuya base es la suma de la base inicial y final o 4 veces el cuadrado de la base intermedia.

$$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + n(n + 4) - 4 = 4(n + 2)^2 \qquad \textit{(Ecuación 10)}$$

$$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + n\ (n + 4) - 4 = (2n + 4)^2 \qquad \textit{(Ecuación 11)}$$

Ejemplos

$1^2 + 3^2 + 5^2 + 1 * 5 - 4 = 36$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 2 * 6 - 4 = 64$$
$$3^2 + 5^2 + 7^2 + 3 * 7 - 4 = 100$$
$$4^2 + 6^2 + 8^2 + 4 * 8 - 4 = 144$$
$$5^2 + 7^2 + 9^2 + 5 * 9 - 4 = 196$$

Y así sucesivamente

Demostración

Sean tres números consecutivos de igual paridad n, n+2 y n+4 entonces tenemos que podemos expresar lo siguiente:

$$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + n(n + 4) - 4 = n^2 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 8n + 16 + n^2 + 4n - 4$$
$$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + n(n + 4) - 2 = 4n^2 + 16n + 16$$
$$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + n(n + 4) - 2 = 4(n^2 + 4n + 4)$$
$$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + n(n + 4) -2 = 4(n + 2)^2$$

Así queda demostrada la propiedad.

Propiedad 9.

Producto de los 5 términos.

Si se multiplican 5 términos consecutivos de los cuales el último de ellos es un cuadrado y se le suma el mismo cuadrado entonces se obtiene otro cuadrado.

$$a * b * c * d * e + e = e * [a * e - a - 1]^2 \qquad \textbf{(Ecuación 12)}$$

Ejemplos:

$$5 * 6 * 7 * 8 * 9 + 9 = 15129 = 123^2$$
$$12 * 13 * 14 * 15 * 16 + 16 = 524176 = 724^2$$
$$21 * 22 * 23 * 24 * 25 + 25 = 6375625 = 2525^2$$
$$32 * 33 * 34 * 35 * 36 + 36 = 45239076 = 6726^2$$
$$45 * 46 * 47 * 48 * 49 + 49 = 228826129 = 15127^2$$

Sean los números $a=n$, $b= n + 1$, $c= n+2$, $d= n+ 3$, $e=n + 4$ (cuadrado) entonces se verifica que: $a * b * c * d * e + e$ es siempre un cuadrado.

Demostración:

Primera forma: Partiendo de la propiedad de Castro

La expresión $a * b * c * d * e + e = e * (a * b * c * d + 1)$

Entonces si e es un cuadrado y según Castro todo producto de 4 consecutivos aumentado en 1 es un cuadrado es fácil ver que el producto de 2 cuadrados es siempre otro número cuadrado con lo cual quedaría demostrado.

Segunda forma:

Sean los números $a=n, b= n + 1, c=n + 2, d=n + 3, e=n + 4$

$$a * b * c * d * e + e = (n)(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)(n + 4)$$
$$a * b * c * d * e + e = ((n)(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1) (n + 4)$$
$$a * b * c * d * e + e = (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1)(n + 4) \quad (vii)$$
$$a * b * c * d * e + e = n^5 + 10n^4 + 35n^3 + 50n^2 + 25n + 4$$
$$a * b * c * d * e + e = [k(n^2 + 3n + 1)]^2 = k^2(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1)$$

Donde $n=\{k^2 - 4\}$ *con* $k \geq 3$

Nota: En esta propiedad un polinomio de grado 5 que es $n^5 + 10n^4 + 35n^3 + 50n^2 + 25n + 4$ es expresable como un cuadrado de un polinomio de grado 2 que genera un polinomio de grado 4 por un polinomio de grado 1) correspondiendo a *(vii)* donde la constante es el mismo cuadrado llamado "e". Llama la atención que los números n para los que se cumple esta propiedad son n= 5, 12, 21, 32, 45, 60, 77, ..., es decir, los mismos que satisfacen la propiedad 3 y que son en cada caso la resta de un cuadrado menos 4.

Propiedad 10

Propiedad del duplo de la suma de Fermat

Si a y b son dos números consecutivos entonces el producto:

$$2 (a^2 + b^2) - 1 = (a + b)^2 \qquad \textbf{\textit{(Ecuación 13)}}$$

Ejemplos:

$$2(1^2 + 2^2) - 1 = 2(5) - 1 = 9 = (1 + 2)^2$$
$$2(2^2 + 3^2) - 1 = 2(13) - 1 = 25 = (2 + 3)^2$$
$$2(3^2 + 4^2) - 1 = 2(25) - 1 = 49 = (3 + 4)^2$$
$$2(4^2 + 5^2) - 1 = 2(41) - 1 = 81 = (4 + 5)^2$$
$$2(5^2 + 6^2) - 1 = 2(61) - 1 = 121 = (5 + 6)^2$$

Demostración: Sea a=n y b=n+1 $\forall a \forall b \in N$ entonces

$$2(a^2 + b^2) - 1 = 2[n^2 + (n + 1^2)] - 1$$
$$2(a^2 + b^2) - 1 = 2[n^2 + n^2 + 2n + 1] - 1$$
$$2(a^2 + b^2) - 1 = 2[n^2 + 2n + 1] - 1$$
$$2(a^2 + b^2) - 1 = 4n^2 + 4n + 2 - 1$$
$$2(a^2 + b^2) - 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$$
$$2(a^2 + b^2) - 1 = [n + (n + 1)]^2$$

Pero, $n=a$ y $n + 1 = b$, entonces:

$$2(a^2 + b^2) - 1 = [a + b]^2$$

Propiedad 11

Generalización de la propiedad 10.

La propiedad 10 puede ser generalizada para 3, 4, 5, 6 y así hasta infinito tomando las siguientes formas:

$2(a^2 + b^2) - 1 = (a + b)^2$

Los ejemplos del cumplimiento de la expresión anterior están en la propiedad 10

De igual forma se cumplen las siguientes expresiones:

$3(a^2 + b^2 + c^2) - 6 = (a + b + c)^2$ ***(Ecuación 14)***

$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 20 = (a + b + c + d)^2$ ***(Ecuación 15)***

$5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) - 50 = (a + b + c + d + e)^2$ ***(Ecuación 16)***

$6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) - 105 = (a + b + c + d + e + f)^2$ ***(Ecuación 17)***

Y así sucesivamente

Algunos ejemplos de cumplimiento de las expresiones anteriores:

Verifiquemos el cumplimiento de ***(Ecuación 14)*** si a=5

$$3(5^2 + 6^2 + 7^2) - 6 = 3(25 + 36 + 49) - 6 = 324 = 18^2 = (5 + 6 + 7)^2$$

Verifiquemos el cumplimiento de ***(Ecuación 15)*** si a=3

$$4(3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - 20 = 4(9 + 16 + 25 + 36) - 20 = 324 = 18^2 = (3 + 4 + 5 + 6)^2$$

Nota: El lector puede seguir haciendo verificaciones con cualquier número inicial que se le ocurra en las fórmulas indicadas desde ***(Ecuación 14)*** hasta ***(Ecuación 17)*** y siempre se cumple cada una de las ecuaciones o fórmulas.

Se pueden seguir colocando fórmulas similares a ***(Ecuación 14), (Ecuación 15), (Ecuación 16)*** y ***(Ecuación 17)*** hasta infinito, pero se puede generar una fórmula general que puede escribirse usando combinatoria tomando en consideración el triángulo de Pascal en la diagonal donde aparece el 5 tomando siempre 2 términos consecutivos de dicha diagonal.

$$n\sum_{i=k}^{n+k-1} i^2 - \left[\binom{n+1}{4} + \binom{n+2}{4}\right] = [T(n) + n(k-1)]^2, \textit{\textbf{con}}\, \boldsymbol{n \geq 3}\ \textbf{\textit{y}}\ \boldsymbol{k \geq 1} \quad \textbf{\textit{(Ecuación 18)}}$$

Donde *T(n)* corresponde a la sucesión de números triangulares

Demostración de la Ecuación 18

Desarrollamos primeramente el lado izquierdo de dicha ecuación, dado que allí se tiene una sumatoria y un par de combinatorias es necesario hacer el desarrollo de cada una de dichas expresiones por separado.

Como la sumatoria que se tiene no comienza en 1 es necesario expresarla en base a la resta de dos sumatorias, como se muestra a continuación:

$$\sum_{i=k}^{n+k-1} i^2 = \left[\sum_{i=1}^{n+k-1} i^2 - \sum_{i=1}^{k-1} i^2\right](i)$$

Para comprobar la efectividad de esta nueva expresión se presentan a continuación dos ejemplos:

$$\sum_{i=3}^{5} i^2 = \left[\sum_{i=1}^{5} i^2 - \sum_{i=1}^{2} i^2 = (1^2+2^2+3^2+\ 4^2+5^2) - (1^2+2^2)\right] = 3^2+\ 4^2+5^2$$

$$\sum_{i=4}^{7} i^2 = \left[\sum_{i=1}^{7} i^2 - \sum_{i=1}^{3} i^2 = (1^2+2^2+3^2+\ 4^2+5^2+\ 6^2+7^2) - (1^2+2^2+3^2)\right]$$

$$\sum_{i=4}^{7} i^2 = \ 4^2+5^2\ +\ 6^2+7^2$$

En los dos ejemplos presentados se puede ver la efectividad de la expresión *(i)*

La idea de llevarla a sumatorias que comienzan en i=1 es poder utilizar el teorema para sumatorias de suma de cuadrados, el cual es:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Entonces la expresión indicada en (i) usando el teorema anterior puede reescribirse en la forma:

$$\sum_{i=k}^{n+k-1} i^2 = \left[\frac{(n+k-1)(n+k)(2n+2k-1)}{6} - \frac{(k-1)(k)(2k+1)}{6}\right]$$

Al desarrollar la expresión anterior, simplificarla y multiplicar el resultado por n se obtiene la primera expresión del lado izquierdo de la igualdad que está dada por:

$$n\sum_{i=k}^{n+k-1} i^2 = \frac{2n^4+\ 6n^3k-3n^3+6n^2k^2-6n^2k+n^2}{6} \quad (*\ \mathbf{1})$$

Por otra parte, al desarrollar la suma de combinatorias que está en el lado izquierdo resulta:

$$\left[\binom{n+1}{4}+\binom{n+2}{4}\right] = \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)!}{4!\,(n-3)!} - \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{4!(n-2)!}$$

$$\left[\binom{n+1}{4}+\binom{n+2}{4}\right] = \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{4!} + \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{4!}$$

$$\left[\binom{n+1}{4}+\binom{n+2}{4}\right] = \frac{n^4-2n^3-n^2+2n}{24} + \frac{n^4+\ 2n^3-n^2-2n}{24}$$

Al simplificar la expresión anterior se obtiene:

$$\left[\binom{n+1}{4}+\binom{n+2}{4}\right] = \frac{n^4-n^2}{12} = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \quad (*\ \mathbf{2})$$

Con (*1) y (*2) finalmente podemos expresar el lado izquierdo de la Ecuación 18 en la forma siguiente:

$$n\sum_{i=k}^{n+k-1} i^2 - \left[\binom{n+1}{4} + \binom{n+2}{4}\right] = \frac{2n^4 + 6n^3k - 3n^3 + 6n^2k^2 - 6n^2k + n^2}{6} - \frac{n^4 - n^2}{12}$$

Entonces al simplificar queda que el lado izquierdo es:

$$n\sum_{i=k}^{n+k-1} i^2 - \left[\binom{n+1}{4} + \binom{n+2}{4}\right] = \frac{n^4 + 4n^3k - 2n^3 + 4n^2k^2 - 4n^2k + n^2}{4} \quad (\boldsymbol{Res.1})$$

Una vez terminado el lado izquierdo procedemos a desarrollar el lado derecho de la ***(Ecuación 18)***. Por definición, tenemos que un número triangular cualquiera es de ecuación $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.Entonces podemos escribir lo siguiente:

$$[T(n) + n(k-1)]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} + n(k-1)\right]^2$$

$$[T(n) + n(k-1)]^2 = \left[\frac{1}{2}n^2 + nk - \frac{1}{2}n\right]^2$$

Al desarrollar la expresión anterior, podemos escribir la expresión en la forma:

$$[T(n) + n(k-1)]^2 = \frac{n^4 + 4n^3k - 2n^3 + 4n^2k^2 - 4n^2k + n^2}{4} \qquad (\boldsymbol{Res.2})$$

Si vemos los valores obtenidos en las expresiones *(Res. 1)* y *(Res.2)* entonces se puede ver que los lados izquierdos de ambas expresiones también son iguales con lo cual queda demostrada la ***(Ecuación 18)***.

Notas importantes:

1) Dejando fijo el valor de *n* y variando *k* se puede ver que ser cumple la proposición para todos los números, es decir, que se comienza en 1 pero la formula se cumple al iniciar en 2, 3, 4, y así hasta cualquier número.

2) La expresión anterior puede ser transformada dejando de usar los números combinatorios y usando para los números 1, 6, 20, 50, 105, 196, ... los elementos de la sucesión A002415 de los números piramidales cuadrangulares en la 4 dimensión de la Enciclopedia en línea de sucesiones infinitas (OEIS). De esa manera nos quedaría la expresión:

$$n\sum_{i=k}^{n+k-1} i^2 - \frac{n^2(n^2-1)}{12} = [T(n) + n(k-1)]^2, con\ n \geq 3\ y\ k \geq 1 \quad (\boldsymbol{Ecuación\ 19})$$

Propiedad 12

Propiedad de la brecha

Si se tienen números n y $n+k$ entonces se cumple siempre que

$$2\left(n^2+\ (n+k)^2\right)-k^2=(2n+k)^2 \qquad (Ecuación\ 20)$$

Ejemplos:

Supongamos brecha 2

$$2(1^2+3^2)\text{-}2^2=2(1+9)-4=\ 20-4=16=4^2$$
$$2(2^2+4^2)\text{-}2^2=2(4+16)-4=40-4=36=6^2$$
$$2(3^2+5^2)\text{-}2^2=2(9+25)-4=68-4=64=8^2$$
$$2(4^2+6^2)\text{-}2^2=2(16+36)-4=104-4=100=10^2$$
$$2(5^2+7^2)\text{-}2^2=2(25+49)-4=148-4=144=12^2$$
$$2(6^2+8^2)\text{-}2^2=2(36+64)-4=200-4=196=14^2$$

Supongamos brecha 3

$$2(1^2+4^2)\text{-}3^2=2(1+16)-9=34-9=25=5^2$$
$$2(2^2+5^2)\text{-}3^2=2(4+25)-9=58-9=49=7^2$$
$$2(3^2+6^2)\text{-}3^2=2(9+36)-9=90-9=81=9^2$$
$$2(4^2+7^2)\text{-}3^2=2(16+49)-9=130-9=121=11^2$$
$$2(5^2+8)\text{-}\ 3^2=2(25+64)-9=178-9=169=13^2$$
$$2(6^2+9^2)\text{-}3^2=2(36+81)-9=234-9=225=15^2$$

Nota: El lector puede probar con brecha 4, 5, 6, entre otras y verificar la certeza de la ***(Ecuación 20)*** en cada caso.

Demostración:

$$2(n^2+\ (n+k)^2)-k^2=(2n+k)^2$$

Partimos del lado izquierdo de la igualdad desarrollando los productos y verificamos que operando es fácil llegar al lado derecho como sigue:

$$2(n^2+\ (n+k)^2)-k^2=2(n^2+n^2+2nk+k^2)-k^2$$
$$2(n^2+\ (n+k)^2)-k^2=2(2n^2+2nk+k^2)-\ k^2$$
$$2(n^2+\ (n+k)^2)-k^2=4n^2+4nk+2k^2-k^2$$
$$2(n^2+\ (n+k)^2)-k^2=4n^2+4nk+k^2$$
$$2(n^2+\ (n+k)^2)-k^2=(2n+k)^2$$

Nota: Esta propiedad es una generalización de la propiedad 9, la cual corresponde al caso de la brecha 1.

Propiedad 13

Propiedad de cuadrados de igual paridad

Toda suma de dos cuadrados de números consecutivos de igual paridad disminuida en 2 es siempre igual al doble del cuadrado del número intermedio.

$$n^2+(n+2)^2-2=2(n+1)^2 \qquad (Ecuación\ 21$$

Ejemplos:

$$Para\ n = 1:\ 1^2 + 3^2 - 2 = 8 = 2 * 2^2$$
$$Para\ n = 2:\ 2^2 + 4^2 - 2 = 18 = 2 * 3^2$$
$$Para\ n = 3:\ 3^2 + 5^2 - 2 = 32 = 2 * 4^2$$
$$Para\ n = 4:\ 4^2 + 6^2 - 2 = 50 = 2 * 5^2$$
$$Para\ n = 5:\ 5^2 + 7^2 - 2 = 72 = 2 * 6^2$$

Demostración:

Partimos del lado izquierdo y llegamos al lado derecho de la igualdad. Entonces tenemos que:

$$n^2 + (n+2)^2 - 2 = n^2 + n^2 + 4n + 4 - 2$$
$$n^2 + (n+2)^2 - 2 = 2n^2 + 4n + 2$$
$$n^2 + (n+2)^2 - 2 = 2(n^2 + 2n + 1)$$

Al expresar como producto notable queda:

$$n^2 + (n+2)^2 - 2 = 2(n+1)^2$$

Así queda demostrada la propiedad

Propiedad 14

Suma de 4 cuadrados consecutivos

La suma de 4 cuadrados consecutivos disminuido en 5 es siempre el cuadrado cuya base es la suma de las 2 bases extremas

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 - 5 = (2n+3)^2 \qquad (Ecuación\ 22)$$

Ejemplos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 - 5 = 5^2$$
$$2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 - 5 = 7^2$$
$$3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 - 5 = 9^2$$
$$4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 - 5 = 11^2$$

Demostración

Partimos del lado izquierdo de la igualdad desarrollando los productos y verificamos que operando es fácil llegar al lado derecho como sigue:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 - 5 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 - 5$$

Simplificando la expresión por la agrupación de términos semejantes:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 - 5 = 4n^2 + 12n + 9$$

Expresando en términos de producto notable nos queda:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 - 5 = (2n+3)^2$$

La expresión anterior muestra el cumplimiento de la propiedad.

Propiedad 15

Generalización de la propiedad 14

Para cada 4 números que están separados por una diferencia *k* cualquiera, es decir, para cuatro términos de una progresión aritmética cualquiera sea el valor de *k* se verifica que:

$$n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2+(n+3k)^2-5k^2=(2n+3k)^2, con\, n\geq 1\; y\; k\geq 1 \qquad (Ecuación\ 23)$$

Ejemplos:

Para n=1 y k=1 se obtiene:

$$1^2+2^2+3^2+4^2-5(1)^2=25=5^2$$

Para n=3 y k=2 se obtiene:

$$3^2+5^2+7^2+9^2-5(2)^2=144=12^2$$

Para n=4 y k=4 se obtiene:

$$4^2+8^2+12^2+16^2-5(4)^2=400=20^2$$

Para n=7 y k=7 resulta:

$$7^2+14^2+21^2+28^2-5(7)^2=1225=35^2$$

Para n=15 y k=15 resulta:

$$15^2+30^2+45^2+60^2-5(15)^2=5625=75^2$$

Curiosidad: si siempre se toma n y k con el mismo valor resulta que todas las bases incluyendo la del resultado serían términos de una progresión aritmética

Demostración:

Partimos del lado izquierdo de la igualdad desarrollando los productos y verificamos que operando es fácil llegar al lado derecho como sigue:

$$n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2+(n+3k)^2-5k^2$$
$$=n^2+n^2+2nk+k^2+n^2+4nk+4k^2+n^2+6nk+9k^2-5k^2$$

Simplificando la expresión por la agrupación de términos semejantes:

$$n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2+(n+3k)^2-5k^2=4n^2+12nk+9k^2$$

Expresando en términos de producto notable nos queda:

$$n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2+(n+3k)^2-5k^2=(2n+3k)^2$$

La expresión anterior muestra el cumplimiento de la propiedad.

Propiedad 16

Triplo de la suma de tres cuadrados menos 6

El triple de la suma de tres cuadrados consecutivos disminuido en 6 es siempre el cuadrado de la suma de las bases.

$$3\left(n^2+(n+1)^2+(n+2)^2\right)-6=(3n+3)^2 \quad (\boldsymbol{Ecuación\ 24})$$

Ejemplos

Para n=1 surge:

$$3(1^2+2^2+3^2)-6=(3(1)+3)^2$$

Para n=2 surge:

$$3(2^2+3^2+4^2)-6=(3(2)+3)^2$$

Para n=3 surge:

$$3(3^2+4^2+5^2)-6=(3(3)+3)^2$$

Para n=4 surge:

$$3(4^2+5^2+6^2)-6=(3(4)+3)^2$$

Demostración: por el método directo partimos del lado izquierdo y desarrollando llegamos al lado derecho de la igualdad.

$$3[n^2+(n+1)^2+(n+2)^2]-6=(3n+3)^2$$

$$3[n^2+(n+1)^2+(n+2)^2]-6=3[n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4]-6$$

Simplificamos los términos a la derecha entre corchetes:

$$3[n^2+(n+1)^2+(n+2)^2]-6=3[3n^2+6n+5]-6$$
$$3[n^2+(n+1)^2+(n+2)^2]-6=9n^2+18n+15-6$$
$$3[n^2+(n+1)^2+(n+2)^2]-6=9n^2+18n+9$$

Al aplicar producto notable nos queda:

$$3[n^2+(n+1)^2+(n+2)^2]-6=(3n+3)^2$$

Propiedad 17

Generalización de la propiedad 16

Para cada 3 números que están separados por una diferencia k cualquiera, es decir, para tres términos de una progresión aritmética cualquiera sea el valor de k se verifica que:

$$3[n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2]-6k^2=(3n+3k)^2 \quad (\boldsymbol{Ecuación\ 25})$$

Demostración:

$$3[n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2]-6k^2=3[n^2+n^2+2nk+k^2+n^2+4nk+4k^2]-6k^2$$
$$3[n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2]-6k^2=3[3n^2+6nk+5k^2]-6k^2$$
$$3[n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2]-6k^2=9n^2+18nk+15k^2-6k^2$$
$$3[n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2]-6k^2=9n^2+18nk+9k^2$$

Al expresar el término de la derecha en producto notable queda:

$$3[n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2]-\ 6k^2=(3n+3k)^2$$

Así queda demostrada la propiedad

Propiedad 18

Suma de cuatro cuadrados consecutivos

La suma de los cuadrados de 4 términos consecutivos más cuatro veces el primer número más 2 es siempre el cuadrado del doble del tercer número

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+4n+2\ =(2(n+2))^2 \qquad (Ecuación\ 26)$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
&Para\ n=1: \quad 1^2+\ 2^2+3^2+4^2+4(1)+2=\ \ 36=\ \ 6^2\\
&Para\ n=2: \quad 2^2+\ 3^2+4^2+5^2+4(2)+2=\ \ 64=\ \ 8^2\\
&Para\ n=3: \quad 3^2+\ 4^2+5^2+6^2+4(3)+2=\ 100=10^2\\
&Para\ n=4: \quad 4^2+\ 5^2+6^2+7^2+4(4)+2=\ 144=12^2\\
&Para\ n=5: \quad 5^2+\ 6^2+7^2+8^2+4(5)+2=\ 196=14^2
\end{aligned}$$

Demostración:

Basta partir del lado izquierdo de la igualdad desarrollando los productos notables y llegar al lado derecho

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(4n+2)$$
$$=n^2+n^2+2n+1+(n^2+4n+4)+(n^2+6n+9)+(4n+2)$$

Aplicamos simplificación de la expresión por agrupación de términos semejantes:

$$n^2+(n+1)^2+(n+1)^2+(n+3)^2+(4n+2)$$
$$=(2n^2+2n+1)+(2n^2+10n+13)+(4n+2)$$
$$n^2+(n+1)^2+(n+1)^2+(n+3)^2+(4n+2)=4n^2+16n+16$$

Al escribir lo anterior factorizando y aplicando producto notable resulta:

$$n^2+(n+1)^2+(n+1)^2+(n+3)^2+(4n+2)=4(n^2+4n+4)$$
$$n^2+(n+1)^2+(n+1)^2+(n+3)^2+(4n+2)=4(n+2)^2=(2(n+2))^2$$

Propiedad 19.

Suma de tres cuadrados consecutivos

Sean n, n+1 y n+2 tres números consecutivos entonces la suma de sus cuadrados disminuida en 2 es siempre el triple del cuadrado intermedio.

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2-2\ \ =3(n+1)^2, con\ n\geq 1 (\text{Ecuación } 27)$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
&Para\ n=1: \quad 1^2+2^2+3^2-2=12=3*2^2\\
&Para\ n=2: \quad 2^2+3^2+4^2-2=12=3*3^2\\
&Para\ n=3: \quad 3^2+4^2+5^2-2=12=3*4^2\\
&Para\ n=4: \quad 4^2+5^2+6^2-2=12=3*5^2\\
&Para\ n=5: \quad 5^2+6^2+7^2-2=12=3*6^2
\end{aligned}$$

Demostración:

Basta partir del lado izquierdo de la igualdad desarrollando los productos notables y llegar al lado derecho

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2-2=n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4-2$$
$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2-2=3n^2+6n+3$$
$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2-2=3(n^2+2n+1)$$
$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2-2=3(n+1)^2$$

Propiedad 20.

Generalización de la propiedad 19

Sean n, n+k y n+2k tres números consecutivos de una progresión aritmética entonces la suma de sus cuadrados (independientemente del valor de k) disminuida en el doble del cuadrado de su razón *($2k^2$)* es siempre el triple del cuadrado del número intermedio.

$$n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2-2k^2=3(n+k)^2, con\ n\geq 1 \text{(Ecuación 28)}$$

Ejemplos:

Para n=1 y k=1:

$$1^2+2^2+3^2-2(1)^2=12=3*2^2$$

Para n=2 y k=2:

$$2^2+4^2+6^2-2(2)^2=48=3*4^2$$

Para n=3 y k=3:

$$3^2+6^2+9^2-2(3)^2=12=3*6^2$$

Para n=4 y k=4

$$4^2+8^2+12^2-2(4)^2=12=3*8^2$$

Para n=5 y k=5:

$$5^2+10^2+15^2-2(5)^2=12=3*10^2$$

Demostración:

Basta partir del lado izquierdo de la igualdad desarrollando los productos notables y llegar al lado derecho

$$n^2+(n+1k)^2+(n+2k)^2-2k^2$$
$$=n^2+n^2+2nk+k^2+n^2+4nk+4k^2-2k^2$$
$$n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2-2k^2=3n^2+6nk+3k^2$$
$$n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2-2k^2=3(n^2+2nk+k^2)$$
$$n^2+(n+k)^2+(n+2k)^2-2k^2=3(n+k)^2$$

De esta forma queda demostrada la propiedad 20.

Conclusiones

Las propiedades para la generación de números cuadrados perfectos es la compilación de propiedades generadas de un estudio que ha surgido al azar de varios trabajos que involucran los números naturales pensando en sucesiones de números consecutivos y en otros casos sucesiones con distintas brechas de separación, el estudio de los números triangulares, relaciones entre polinomios y otras herramientas, lo cual es sólo menos de la mitad de lo que hemos desarrollado en relación al tema de los cuadrados perfectos.

Esta consideración de formas diferentes de generar cuadrados es un área en permanente construcción que ha producido un enriquecimiento del quehacer matemático y ha sido el origen de diversos problemas, ecuaciones, proposiciones, propiedades, conjeturas y teoremas significativos en la historia de las matemáticas. Creemos como estudiosos independientes de la teoría de números que la experimentación en las matemáticas sigue siendo necesaria y la búsqueda de patrones debe ser siempre el norte de las matemáticas.

Esto permite vislumbrar que es mucho lo que falta por descubrir y lo fascinante de los números naturales como un área importante de estudio que permite establecer conexiones y relaciones entre los números que llevan a la obtención de ecuaciones interesantes y que, a pesar de la cantidad de estudios y de logros alcanzados en la teoría de números es mucho lo que falta por descubrir, por generar o inventar.

Referencias Bibliográficas

Alonso, José (2019). El teorema de Navidad de Fermat. Consultado en la página de internet https://www.glc.us.es/~jalonso/exercitium/el-teorema-de-navidad-de-fermat/# :~:text=El%20teorema%20de%20Navidad%20de%20Fermat%20afirma%20que%20un%20n%C3%BAmero,congruente%20con%201%20m%C3%B3dulo%204).

Anfossi, Agustin y Flores, M. A. (2006). «Lenguaje algebraico». Álgebra. Cuauhtémoc, México. p. 20. ISBN 968-436-213-7.

Arias G, J.L (2020) Técnicas e instrumentos de investigación científica. Editorial Enfoques Consulting EIRL. info: eu-repo/semantics/book http://hdl.handle.net/20.500.12390/2238

Beshenov, Alexey (2018) El teorema de los cuatro cuadrados y el teorema de Minkowski Universidad de El Salvador.

Castañeda Roldán, N. y Castañeda Roldán; C (2022) Una mirada a los numeros cuadrados triangulares. Revista Miscelanea Matematica ´ 75 (2022) 5-22 SMM. DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7502

Castro Martínez E., Ruiz Hidalgo, J. (2018) Patrones en números figurados. Aplicación para la enseñanza. Patterns in fgurative numbers. Application for teaching. Universidad de Granada

Conway, J. H. and Guy, R. K. The Book of Numbers. New York: Springer-Verlag, pp. 30-32, 1996. ISBN 0-387-97993-X

Castro Robinson (2013): Álgebra moderna e introducción a geometría algebraica

Conway, John H. y Guy Richard (1996) The book of Numbers. Springer Science & Business Media, 16 mar. 1998 - 310 Páginas

Cox, D. A. (1998). Primes of the Form x2+ny2. Wiley-Interscience. ISBN 0-471-50654-0

Frabeti. Carlo (2021). Numeros triangulares y cuadrados. Citado en https://elpais.com/ciencia/2021-01-22/numeros-triangulares-y-cuadrados.html#:~:text=Los%20n%C3%BAmeros%20cuadrados%20son%2C%20por,%2C%2016%2C%2025%2C%2036%E2%80%A6&text=%C2%BFPor%20qu%C3%A9%20es%20as%C3%AD%20para,%2C%203%2C%207%20u%208.

Hofmann, Joseph Ehrenfried (2002). Historia de la Matemática. Editorial Limusa. España. ISBN 968-18-6286-4

Hernández Gutiérrez, Jaime (2018). La suma de los primeros n cuadrados. Consultado en la página web https://arquimedes.red/post/suma-de-los-primeros-n-cuadrados

Ibáñez, Raúl (2019). Demostraciones sin palabras: suma de cuadrados. Consultado en https://Aprenderapensar.Net/2019/01/22/Demostraciones-Sin-Palabras-Suma-De-Cuadrados/

Mansfield, Daniel y Wildberger, N. J. (2017) "Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry". Historia Mathematica, agosto de 2017 http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/ S0315086017300691

[Palella y Martins (2017). Metodología de la Investigación Cuantitativa. Editorial Fedupel 286 Págs. Formato: Digital Versión: PDF Idioma: Castellano. ISBN: 980-273-445-4

Parulekar Kiran. Propiedades asombrosas de los cuadrados y sus cálculos. Consultado en Kiran Anil Parulekar, 2012 https://books.google.com/ books?id=njEtt7rfexEC&source =gbs_navlinks_s Número cuadrado - https://es.qaz.wiki/wiki/ Square_number8. revistaespacios.com

Stillwell, John (1996). Introduction to Theory of Algebraic Integers by Richard Dedekind. Cambridge University Press. ISBN 0-521-56518-9

Velarde E. Luis (2015) Teoría de Números y Planteamiento de Ecuaciones Matemáticas. Universidad Andina del Cusco

Weisstein, Eric W. «Square Number». En Weisstein, Eric W, ed. Math World (en inglés). Wolfram Research.