Revista Arbitrada Venezolana
del Núcleo Costa Oriental del Lago

Impacto Científico

Universidad del Zulia

Junio 2023
Vol. 18 Nº 1

ppi 201502ZU4641
Esta publicación científica en formato digital
es continuidad de la revista impresa
Depósito Legal: pp 200602ZU2811 / ISSN:1856-5042
ISSN Electrónico: 2542-3207

Impacto Científico
Revista Arbitrada Venezolana
del Núcleo LUZ-Costa Oriental del Lago
Vol. 18. N°1. Junio 2023. pp. 129-162

Nuevas propiedades de números perfectos pares y las razones matemáticas que sugieren que no existen números perfectos impares

Alexander Villarroel
Investigador Independiente
Carúpano, Venezuela
https://orcid.org/0000-0002-4628-1894
trabajos_alexvilla@hotmail.com

Francisco Villarroel
Investigador Independiente
Carúpano, Venezuela
https://orcid.org/0000-0002-9159-5892
fjvillr02@gmail.com

Resumen

En este artículo, se persigue hacer una revisión de las propiedades ya conocidas de los números perfectos pares, relacionados con la triangularidad, hexagonalidad y otras características, para plantear nuevas propiedades de los números perfectos pares, generando relaciones cada vez más notables con respecto a las potencias de dos y a los números de Mersenne, tanto primos como no primos y con la función phi de Euler, que disminuyen la posibilidad de la existencia de un número perfecto impar. De estudiar las implicaciones de dichas propiedades en relación con la existencia de los supuestos números perfectos impares, surgen una serie de cuestionamientos y aspectos que muestran que es imposible que pueda existir un número perfecto impar. Para ello, se realiza un análisis de los factores que tendrían que existir por separado y se compara con los factores asociados a la naturaleza de los perfectos pares, lo cual permite inferir que en ninguno de los casos se hallan elementos que puedan sustentar su existencia.

Palabras claves: Función phi de Euler, números perfectos pares, números perfectos impares, números triangulares, números hexagonales.

RECIBIDO:06/12/2022 · ACEPTADO: 21/04/2023

New properties of even perfect numbers and the mathematical reasons that suggest there are no odd perfect numbers

Abstract

In this article, the aim is to review the already known properties of even perfect numbers, related to triangularity, hexagonality and other characteristics, in order to propose new properties of even perfect numbers, generating increasingly remarkable relationships with respect to the powers of two and Mersenne numbers, both prime and non-prime and with Euler's phi function, which decrease the possibility of the existence of an odd perfect number. From studying the implications of these properties in relation to the existence of the supposed odd perfect numbers, a series of questions and aspects arise that show that it is impossible for an odd perfect number to exist. To do this, an analysis of the factors that would have to exist separately is carried out and compared with the factors associated with the nature of the perfect pairs, which allows us to infer that in none of the cases are there elements that can support their existence.

Keywords: Euler's phi function, even perfect numbers, odd perfect numbers, triangular numbers, hexagonal numbers.

Introducción
Historia de los números perfectos

Según Cadavieco (2002) fueron los griegos y particularmente Pitágoras y sus seguidores (los alumnos de la escuela pitagórica) quienes definieron los números perfectos como aquellos en la que la suma de sus divisores positivos propios es igual al mismo número (excluyéndose así mismo). Este investigador afirma que los pitagóricos llegaron a conocer los primeros 4 números perfectos 6, 28, 496 y 8128, los cuales se representan o factorizan en la siguiente forma:

$$6 = 1 + 2 + 3,$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$
$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$
$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$$

Alrededor del año 300 a.C., Euclides, mostró los primeros conocimientos matemáticos de los que se tiene información concerniente a los números perfectos en el cual afirmaba:

> Si colocamos los números que queramos comenzando desde una unidad en proporción doble de forma continuada, hasta que su suma se convierta en un primo, y si esa suma es multiplicada por el número final, el producto será perfecto. (proposición 36 del libro IX de los Elementos)

Aquí 'proporción doble' significa que cada número de la secuencia es dos veces el número precedente. Para ilustrar esta Proposición considera $1 + 2 + 4 = 7$, que es primo. Entonces (la suma) × (el último) = $7 \times 4 = 28$, es un número perfecto.

Tomemos como segundo ejemplo $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$, que también es primo. Entonces $31 \times 16 = 496$ es un número perfecto.

Es decir, Euclides planteaba una progresión geométrica de razón 2 que comenzaba en 1 continuaba hasta donde se obtuviera una suma prima, la cual se multiplicaba por la ultima potencia de dos, con lo que se obtenía un número perfecto.

Ahora Euclides nos proporciona una prueba rigurosa de la proposición y tenemos el primer resultado significativo de números perfectos. Podemos definir la proposición de una fórmula ligeramente más moderna usando el hecho, conocido por los Pitagóricos, de que

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1.$$

La proposición se lee ahora:

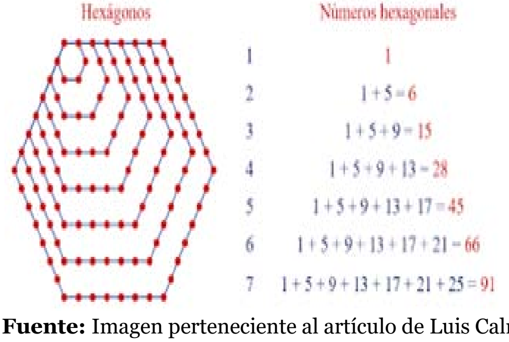
Si, para algún $k > 1$, se tiene que entonces:

$$2^{(k-1)} (2^k - 1) \text{ es un número perfecto si } 2^k - 1 \text{ es primo (ecuación 1)}$$

Numeros hexagonales

Según Calmaestra (2020) Un número hexagonal es un número que se obtiene al sumar los puntos necesarios para construir la sucesión de hexágonos de la figura.

Figura I: Los números hexagonales en gráficas y números



Fuente: Imagen perteneciente al artículo de Luis Calmaestra

Es decir, que los primeros números hexagonales son: 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, ... y es una sucesión infinita de valores cuya fórmula general es

$$H(n) = 2n^2 - n = n(2n-1), \quad \forall n \geq 1 \; con \; n \in \aleph \quad (ecuación\ 2)$$

Nùmeros triangulares

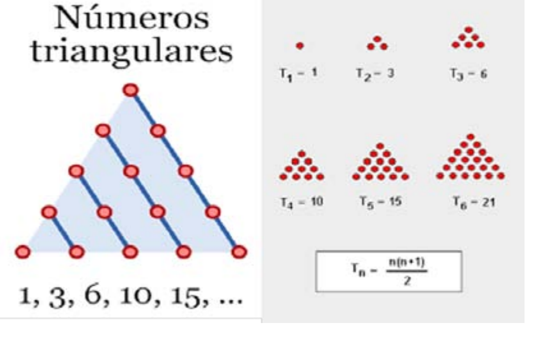
Según García y Martinón (1997) en su artículo sobre números poligonales afirman que "Un libro de Nicómaco de Gerasa (sobre el año 100 d.C) dedicado a los descubrimientos aritméticos de los pitagóricos incluye cierta información sobre los números poligonales (Heath, 1981). Nicómaco indica que los números triangulares, los poligonales más simples, forman la sucesión 1, 3, 6, 10, 15, ..."

Los primeros términos de la sucesión de triangulares se obtienen a partir de 1 como suma de números naturales sucesivos:

$$1 = 1$$
$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Cada uno de estos números se representa mediante una configuración plana de puntos basada en la forma triangular, tal como se indica en la figura 1.

Figura 2. Números triangulares



Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Número_triangular

Por otra parte, Pérez (2014, p.138) señala que "los números triangulares son los que se obtienen sumando varios enteros consecutivos a partir de 1. La sucesión de los números triangulares comienza así: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ... Es decir, que los números triangulares se definen con la suma de los n primeros términos de la

Progresión Aritmética con primer término 1 y de razón 1. Esta progresión aritmética es la de los Números Naturales 1, 2, 3, 4, 5, ... la fórmula para calcular el n-ésimo Número Triangular está dada por la expresión:

$$T_n=1+2+3+4+...+n=(n)(n+1)/2 \quad \text{(ecuación 3)}$$

El orden de un triangular viene a ser siempre el valor de n que lo genera. así el triangular de orden 3 es 6, el de orden 7 es 28, el de orden 15 es 120, el de orden 31 es 496 y así sucesivamente.

Progresión aritmética

Según Sapiña (2020) y Llopis (2020) en matemáticas, "una progresión aritmética es una sucesión de números tales que la diferencia de cualquier par de términos sucesivos de la secuencia es constante, dicha cantidad llamada «diferencia de la progresión», «diferencia» o incluso «distancia»".Por ejemplo, la sucesión matemática 3, 5, 7, 9,... es una progresión aritmética de diferencia constante 2, así como 5, 2, −1, −4,... es una progresión aritmética de diferencia constante −3.

Dependiendo de si la diferencia d en una progresión aritmética es positiva, nula o negativa, se tiene que:2

- Si d>0, la progresión es **monótona creciente.** Cada término es mayor o igual que el anterior (a_(n+1)– a_n>0) . Como la progresión 3, 6, 9, 12, 15, 18... (d=3).
- Si <0, la progresión es **monótona decreciente.** Cada término es menor o igual que el anterior (a_(n+1)– a_n<0). Como la progresión 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7... (d=-2).
- Si d=0, la progresión es **constante**. Todos los términos son iguales (a_(n+1)= a_n). Como la progresión 2, 2, 2, 2, 2... (d=0).

Definición de número perfecto

Pérez (2014, p.138) afirma que "entre los números triangulares destacan algunos que tienen características peculiares. Así reconocemos al 6 y al 28, que son números perfectos (iguales a la suma de sus divisores propios). De hecho, todos los números perfectos pares son triangulares". Dicho de otra forma, un número N se llama perfecto cuando es amigo de sí mismo o en el cual su suma alícuota (la suma de sus divisores propios) es coincidente consigo mismo, es decir, la suma da el valor de N.

Pérez Sanz (2007) indica que “Un número perfecto es aquel que coincide con la suma de sus partes alícuotas.” Y añade este autor que “En lenguaje más prosaico: el que es igual a la suma de sus divisores, excluido él mismo como divisor.”

Así, 6 es un número perfecto porque sus divisores propios son 1, 2 y 3; y 6 = 1 + 2 + 3. Los siguientes números perfectos son 28, 496 y 8128.

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$$

Los primeros 39 números aún son perfectos que cumplen la fórmula $2^{n-1}(2^n - 1)$ para valores primos de n de la secuencia A000043 en OEIS dada a continuación:

> n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787, 1398269, 2976221, 3021377, 6972593, 13466917, ...
>
> Los otros 5 números de Mersenne (números de la forma 2^n-1 primos que tienen con n primo) que son conocidos se dan para n = 20996011, 24036583, 25964951, 30402457, 32582657. No se sabe si “además de” ellos hay otros.]

Aún no se sabe si existen infinitos números primos de Mersenne y números perfectos. La búsqueda de nuevos números primos de Mersenne es el objetivo de la GIMPS (Great Internet Mersenne Primes Search) que opera por medio de una gran plataforma de búsqueda distribuida de números primos de Mersenne Según GIMPS (2018) en ese] año, Patrick Laroche, descubrió el número primo más grande $2^{82\,589\,933} – 1$ (o $M_{82\,589\,933}$ en la notación usual), se obtuvo entonces el mayor número perfecto encontrado hasta esa fecha, número 51 de la lista, con 49.724.095 dígitos, el cual es: $2^{82\,589\,932}\,(2^{82\,589\,933} – 1)$.

Sobre el origen de estos números perfectos, Crilly (2011) señala que “Euclides al darse cuenta de que 2n – 1 es un número primo, demostró que la fórmula 2n–1(2n – 1) genera en cada caso un número perfecto par siempre que 2n–1 es primo.” En el siglo XVIII, Leonhard Euler demostró que todos los números perfectos pares se generan a partir de la fórmula que ya descubrió Euclides.

Del trabajo, realizado por Euclides y Euler en dos épocas muy diferentes surgió el famoso Teorema Euclides-Euler el cual establece que

“Un número par es perfecto si y solo si es de la forma

2^{p-1}*(2p - 1),con p y 2^p- 1 números primos.” (ecuación 4)

Propiedades conocidas de los números perfectos

El estudio de los números perfectos a lo largo de 25 siglos aproximadamente ha permitido a los matemáticos desarrollar un conjunto de propiedades importantes acerca de los números perfectos pares.

Muchas fuentes bibliográficas, entre ellas Wikipedia y Zaldívar (2012, p73) entre otros tratan acerca de os números perfectos y sus propiedades, entre las cuales pueden mencionarse las siguientes:

1. Los números perfectos son triangulares, es decir, que se pueden escribir en la forma n(n+1)/2 y hexagonales, esto es que son de la forma n(2n-1). Esto puede verse en que la fórmula generadora de los números perfectos pares es $2^{n-1}(2^n - 1)$ donde n y 2^n-1 son ambos primos.

2. Desde 28 en adelante todos los números perfectos pares son congruentes 1 modulo 9, es decir, al dividir entre 9 siempre queda resto 1. Puede decirse entonces que la adición de los dígitos de cualquier número par perfecto (excepto 6), hasta obtener un solo dígito.

   Según Novarese (1886, pp.11-16) y Dickson (1919, p.25) "Todo número perfecto par termina en 6 o 28, base diez; y, con la única excepción de 6, termina en 1, base 9. Por lo tanto, en particular, la raíz digital de todos los números perfectos pares distintos de 6 es 1". Por ejemplo, la raíz digital de 8128 = 1, ya que 8 + 1 + 2 + 8 = 19, 1 + 9 = 10, y 1 + 0 = 1.

3. Todo perfecto es la suma de los números naturales consecutivos desde 1 hasta el primo de Mersenne de cada caso

4. Según Gallardo (2010) "28 es también el único número perfecto par que es una suma de dos cubos positivos de números enteros" y según Makowski (1962) afirma que el 28 es el único número perfecto par de la forma x^3 + 1

5. Todo perfecto desde 28 es la suma de potencias cúbicas de números impares. Es decir, todos los números perfectos pares, excepto el primero, son la suma de $2^{(n-1)/2}$ primeros cubos impares. Por ejemplo:

$$28=1^3+3^3$$

$$496=1^3+3^3+5^3+7^3$$

$$8128=1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3$$

6. La suma de las fracciones egipcias (es decir, aquellas de numerador igual a la unidad) y cuyos denominadores son los divisores del número perfecto par es siempre igual a 2.

Para 6, tenemos

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=2$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{28+14+7+4+2+1}{28}=2$$

7. El número de divisores de un número perfecto (ya sea par o impar) tiene que ser par, ya que N no puede ser un cuadrado perfecto.

   Nota: la reducción de sumas hasta un solo digito también se conoce en matemáticas como Navasesh.

8. Según Redmond (1996) El único número perfecto sin cuadrados (esto es que no es factorizable o divisible entre un cuadrado) es 6.

9. El número de divisores de un número perfecto (par o impar) debe ser par, porque N no puede ser un cuadrado perfecto.

Es preciso aclarar que existen muchas más propiedades de los números perfectos pares, pero aquí se limita a mostrar un conjunto de ellas que son las propiedades más comunes.

Sobre los números perfectos impares

Según Monografías.com (2011), No se conoce la existencia de números perfectos impares. Sin embargo, existen algunos resultados parciales al respecto. Si existe un número perfecto impar debe ser mayor que 10300, debe tener al menos 8 factores primos distintos (y al menos 11 si no es divisible por 3). Uno de esos factores debe ser mayor que 107, dos de ellos deben ser mayores que 10 000 y tres factores deben ser mayores que 100.

Parodia de numeros perfectos impares

Se llama a un número natural N una parodia de número perfecto impar si N es impar y N=km para dos enteros k, m>1 tal que σ(k(m+1))=2N donde σ es la suma de los divisores de la función.

En una carta a Mersenne de noviembre 15, 1638, Descartes demostró que d=3^2 . 7^2 11^2 . 13^2 . 22021=198585576189 sería un número perfecto impar si 22021 fuera un número primo, pero según Della (2020) ocurre que 22021 =19^2*61 con lo cual la suma de divisores ya no es 2N, sino que toma un valor diferente. Es decir, que la idea de Mersenne es una falsificación de un número perfecto.

Función PHI de Euler

La función φ de Euler (también llamada función indicatriz de Euler) es una función importante en teoría de números. Si n es un número entero positivo, entonces φ(n) se define como la cantidad de enteros positivos menores o iguales a n y coprimos con n, es decir, formalmente se puede definir como:

$$\varphi(n) = |\{m \in \aleph \therefore m \leq n \cap mcd(n,m) = 1\}| \quad (ecuación\ 5)$$

Euler introdujo la función phi en 1763. Sin embargo, en ese momento no eligió ningún símbolo específico para denotarlo. En una publicación de 1784, Euler estudió más a fondo la función, eligiendo la letra griega π para denotarla: escribió πD para "la multitud de números menores que D, y que no tienen ningún divisor común con él". Esta definición varía de la definición actual de la función totient en D = 1, pero por lo demás es la misma.

Según Sandifer (2007, p. 203) y Graham *et al.* (1994, p. 133) en la teoría de números, la función totient de Euler cuenta los enteros positivos hasta un número entero dado n que son primos relativos a n. Se denota por la expresión φ(n), y se llama función phi de Euler. En otras palabras, es el número de enteros k en el rango 1 ≤ k ≤ n para los cuales el máximo común divisor mcd (n, k) es igual a 1.

Según Graham *et al.* (1994, pp. 134-135) la notación ahora estándar φ(A) proviene del tratado Disquisitiones Arithmeticae de Gauss de 1801, aunque los investigadores Hardy & Wright (1979, thm. 328), afirman Gauss no usó paréntesis alrededor del argumento y escribió φA. mientras que Sylvester (1879, pp. 357-393) al referirse a la misma función acuñó el término totient para esta función, por lo que también se la denomina función totient de Euler

Por ejemplo, los primos relativos al 9= 3^2 son los seis números 1, 2, 4, 5, 7 y 8, ya que ninguno de ellos es divisible entre 3 o 3^2 pero los otros tres números en este rango, 3, 6 y 9 no soncoprimos con 9, ya que 3 divide a 3 , 3 divide a 6 y 9 divide a 9. Además al buscar el máximo común divisor entre pares de números se obtiene que mcd(9, 3) = mcd(9, 6) = 3 y mcd(9, 9) = 9. Por lo tanto, φ(9) = 6.

Otro ejemplo, φ(1) = 1 ya que para n = 1 el único entero en el rango de 1 a n es el mismo 1, y mcd(1, 1) = 1.

Según Cajari (1929) "La función totient de Euler es una función multiplicativa, lo que significa que, si dos números m y n son primos relativos, entonces φ(mn) = φ(m) φ(n).". Es decir, que se puede expresar phi (n) para un número n, como el producto de la phi de Euler para cada uno de los factores primos que dividen al número. Lo que permite poder expresar el número en sus factores primos y luego trabajar cada factor por separado para estimar la contribución de cada uno de ellos en la obtención de phi(n).

Además, Sylvester (1879, p.361) al referirse a la función phi de Euler señaló que "esa función da el orden del grupo multiplicativo de enteros módulo n (el grupo de unidades del anillo). Además de lo anterior, la función phi de Euler es de importancia, ya que También se utiliza para definir el sistema de cifrado RSA".

Ya vimos los valores de $\varphi(1) = 1$ y $\varphi(9) = 6$. A continuación presentamos la tabla de valores que incluyen los valores de phi de Euler para números de 1 al 100

Tabla 1. valores de phi de Euler desde n=1 a n=100

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ϕ (n)	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8
N	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Φ (n)	12	10	22	8	20	12	18	12	28	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24	16
N	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
ϕ (n)	40	12	42	20	24	22	46	16	42	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58	16
N	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Φ (n)	60	30	36	32	48	20	66	32	44	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78	32
N	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
ϕ (n)	54	40	82	24	64	42	56	40	88	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60	40

Fuente: Elaboración propia de los autores

Resultados

A raíz de estudiar muy detalladamente el conjunto de los números triangulares y los hexagonales (que son también triangulares de orden impar), de analizar la relación de la función phi de Euler con los números perfectos pares y ver que su aplicación genera valores pares desde 2 y hasta infinito, considerar aspectos geométricos, entre otros temas surgió un conjunto de propiedades que presentamos a continuación y que son interesantes, ya que tienen implicaciones de valor en el caso de la posible existencia de los números perfectos.

Propiedad 1:
Suma de potencias de 2

Todo número perfecto par es una suma de potencias de 2, donde el primer exponente el valor de k en la potencia de 2, hasta llegar a la potencia de 2 con exponente igual al doble del primero,

$$Si\ N = 2^k(2^{k+1}-1)\ es\ perfecto\ entonces\ N = \sum_{i=k}^{2k} 2^i\ (ecuación\ 6)$$

Ejemplos:

$6=2^1+2^2$

$28=2^2+2^3+2^4$

$496=2^4+2^5+2^6+2^7+2^8$

$8128= 2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+2^{11}+2^{12}$

$33550336= 2^{12}+2^{13}+2^{14}+2^{15}+ 2^{16}+2^{17}+2^{18}+2^{19}+2^{20}+2^{21}+2^{22}+2^{23}+2^{24}$

Implicaciones de esta propiedad

Si hubiese un perfecto impar el cual se pudiera expresar en términos de una sola base (similar a lo anterior) “el primer exponente”, tendría que ser par y la cantidad de términos debería ser impar, por lo cual una propiedad similar a esta en caso de un perfecto impar es desde todo punto de vista inexistente

Si hubiese un perfecto impar con varias bases impares y cada una se debería repetir (similar a lo anterior), no se podría tomar cada base a exponente impar, pues la suma sería par y habría disparidad entre la suma y el número original y si cada base se repitiera un número impar de veces se requeriría que el supuesto perfecto impar tuviese una cantidad impar de términos en la suma, ya que la suma impar de potencias impares es impar.

El lector puede ver que en el caso de perfecto par se inicia cada suma en la potencia de 2 contenida en el perfecto par y en el caso de un impar formado por muchos diferentes factores, sin embargo, esperar una propiedad de esta forma con la presunción de que un número fuera perfecto impar tendría muchos factores y esto sería prácticamente imposible.

Propiedad 2:
Todo perfecto par es una diferencia de dos cuadrados

Todo perfecto par p tiene una expresión: $p=a^2-b^2$ y los valores a y b forman parte de dos sucesiones infinitas.

Tenemos que los primeros números perfectos pueden expresarse por diferencia de cuadrado como:

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6$$
$$8^2 - 6^2 = 28$$
$$35^2 - 27^2 = 496$$
$$143^2 - 111^2 = 8128$$
$$9215^2 - 7167^2 = 33550336$$
$$147455^2 - 114687^2 = 8589969056$$

De igual manera los demás números perfectos pueden expresarse como diferencia de cuadrados donde se cumple lo siguiente:

1. el 6 es el único perfecto par que es resultado de la resta de cuadrados de dos números no enteros
2. Los demás números son parte de dos sucesiones que se pueden presentar en las formas a_n y b_n donde se tiene que

$$\boldsymbol{a_n = \{4a_{n\_1} + 3\}\ para\ n \geq 2\ y\ a_1 = 8\ (ecuación\ 7)}$$

Los primeros 20 términos de esta sucesión son:

{8, 35, 143, 575, 2303, 9215, 36863, 147455, 589823, 2359295, 9437183, 37748735, 150994943, 603979775, 2415919103, 9663676415, 38654705663, 154618822655, 618475290623, 2473901162495,...}

$$b_n = \{4b_{(n\_1)} + 3\}\ para\ n \geq 2\ y\ b_1 = 6\ (ecuación\ 8)$$

Los primeros 20 términos de esta sucesión son:

{6, 27, 111, 447, 1791, 7167, 28671, 114687, 458751, 1835007, 7340031, 29360127, 117440511, 469762047, 1879048191, 7516192767, 30064771071, 120259084287, 481036337151, 1924145348607,....}

Los primos de Mersenne son una sucesión promedio entre los términos de a_n y b_n, es decir, que si se promedian las dos sucesiones en otra sucesión M_n tomando los valores en rojo que son los que generan los primeros números perfectos surge la sucesión de los Mersenne primos M_n definida como

$$M_n = \{4M_{n\_1} + 3\}\ para\ n \geq 2\ y\ M_1 = 7\ (ecuación\ 9)$$

Los primeros valores de M_n son:

{7, 31, 127, 511, 2047, 8191, 32767, 131071, 524287, 2097151, 8388607, 33554431, 134217727, 536870911, 2147483647, 8589934591, 34359738367, 137438953471, 549755813887, 2199023255551,...}

Lo anterior implica que cada primo de Mersenne es el punto medio (promedio de las bases), es decir, el primo que genera al perfecto par al usar la diferencia de cuadrados entre an y bn de un mismo orden

$$M_n = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (ecuación\ 10)$$

Los cálculos en base a esta fórmula se presentan en la columna 3 del cuadro que se presenta a continuación:

Nota: En el caso de las fracciones generadoras del 6 se tiene que el promedio de 5/2 y 7/2 es 3 que es el primo de Mersenne.

3. La distancia entre las bases de cada diferencia de cuadrado siempre es la mitad de la potencia de 2 que se usa en cada número perfecto, lo cual puede apreciarse en el siguiente cuadro. D

4. De lo anterior se deduce que si el primo de Mersenne es el promedio de las bases (pdb) y la diferencia de las bases (ddb) es la mitad de la potencia de 2 del perfecto, entonces podemos expresar los perfectos según el siguiente cuadro:

Tabla 2. Perfectos Pares usando diferencia de cuadrados

Diferencia de cuadrados	Perfecto	Promedio de bases (pdb)	Diferencia de bases (ddb)	Fórmula del perfecto Perfecto=2 (pdb)(ddb)
$8^2 - 6^2$	28	$\frac{8+6}{2} = 7$	$8 - 6 = 2$	$28 = 2 * 7 * 2$
$35^2 - 27^2$	496	$\frac{35+27}{2} = 31$	$35 - 27 = 8$	$496 = 2 * 31 * 8$
$143^2 - 111^2$	8128	$\frac{143+111}{2} = 127$	$143 - 111 = 32$	$8128 = 2 * 127 * 32$
$9215^2 - 7167^2$	33550336	$\frac{9215+7167}{2} = 8191$	$9215 - 7167 = 2048$	$33550336 = 2 * 8191 * 2048$
$147455^2 - 114687^2$	8589969056	$\frac{147455+114687}{2} = 131071$	$147455 - 114687 = 32768$	$8589969056 = 2 * 131071 * 32768$

Fuente: Elaboración propia de los autores

5. Las sucesiones a_n, b_n y M_n son muy significativas, pues en dichas sucesiones siempre que se encuentre un elemento primo en Mn al tomar la diferencia de cuadrados entre el elemento de a_n y el de b_n en la misma posición que M_n se obtendrá un nuevo perfecto según lo dispuesto en el cuadro anterior. Esto da a entender que los 51 perfectos pares ya descubiertos tienen primos de Mersenne que pertenecen a la sucesión Mn y que el valor de cada perfecto corresponde a la diferencia de cuadrados de las órdenes iguales de a_n y b_n

6. Sin embargo, la cantidad de dígitos de los primos de Mersenne y los perfectos hace casi inalcanzable el propósito de lograr una comprobación, y lo mismo pasa con la grandeza que tendrían los elementos de las sucesiones que se usan en diferencias de cuadrados. No obstante, en las tres sucesiones mostradas siempre habrá valores de an y bn tales que el promedio de esas bases sea un primo M_n y en consecuencia la diferencia de cuadrados será un número perfecto par.

7. Otro hecho significativo es que los números pares se obtienen de la resta de dos cuadrados de bases ambas pares o ambas impares, pero en el caso que existiera un perfecto impar se exigiría que una de las bases fuese par y la otra impar. esto último, es decir, que las bases sean de diferente paridad lleva a que su resta sea impar y lleva a algo significativo, pues al buscar promedio nunca existiría un valor que pertenezca a los naturales, ya que siempre el resultado sería un número decimal, lo que indica que no podría haber ninguna aparente relación para un perfecto impar (si existiese) similar a lo indicado en la tabla ni usando ninguna diferencia de cuadrados.

8. Lo dicho en 7) y el hecho de que los impares son diferencias de dos cuadrados de números consecutivos 1^2-0^2=1,2^2-1^2=3,3^2-2^2=5 y así sucesivamente indica que todos los números impares son representables en formas de diferencias de cuadrados, pero la inexistencia del promedio es un elemento en contra de la posible existencia de los números perfectos impares.

9. El detalle de la diferencia de cuadrado de que el promedio de las bases sea un primo de Mersenne y de que la diferencia de bases sea siempre la mitad de la potencia de dos del perfecto correspondiente es un aspecto sumamente sorprendente, ya que se cumple en todos los casos sin fallas. Muestra que hay una relación muy estrecha entre estos dos elementos, es decir, entre las potencias de 2 y los números de Mersenne que condiciona la existencia de los números perfectos.

   Esta relación se da entre dos elementos de forma repetitiva en las propiedades de los perfectos pares. Queda preguntarse: ¿Entre cuantos factores de los supuestos perfectos impares podría darse una propiedad similar de factorización del supuesto perfecto impar en forma similar a la antes descrita para los perfectos pares?

NOTA: En el caso de la propiedad 2 no se presentará demostración, ya que su abordaje es por si solo material importante y suficiente para la realización de otro artículo de investigación. Es por ello, que aquí no se muestra la forma en la que se generó esta propiedad.

Propiedad 3:
Perfecto como suma de 3 triangulares

Todo perfecto par es la suma de tres triangulares, donde el resultado es siempre el perfecto que ocupa la posición de un triangular T(n) donde n (es un primo de Mersenne

$$\boldsymbol{T_n + T_{2n} + T_{2n+1} = T_{3n+1}} \quad (\textbf{ecuación 11})$$

Ejemplos:

$$T_2+T_4+T_5=T_7 \Rightarrow 3+10+15=28$$
$$T_{10}+T_{20}+T_{21}=T_{31} \Rightarrow 55+210+231=496$$
$$T_{42}+T_{84}+T_{85}=T_{127} \Rightarrow 903+3570+3655=8128$$
$$T_{2730}+T_{5460}+T_{5461}=T_{8191} \Rightarrow 3727815+14908530+14913991=33550336$$

Demostración de la propiedad 3

Sustituyendo $T_n = \frac{n(n+1)}{2}, T_{2n} = \frac{2n(2n+1)}{2}, T_{2n+1} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2}, T_{3n+1} = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2}$ (*)

Resolviendo el lado izquierdo:

$$T_n + T_{2n} + T_{2n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n(2n+1)}{2} + \frac{(2n+1)(2n+2)}{2}$$
$$T_n + T_{2n} + T_{2n+1} = \frac{n(n+1) + 2n(2n+1) + (2n+1)(2n+2)}{2}$$
$$T_n + T_{2n} + T_{2n+1} = \frac{n^2 + n + 4n^2 + 2n + 4n^2 + 6n + 2}{2}$$
$$T_n + T_{2n} + T_{2n+1} = \frac{9n^2 + 9n + 2}{2}$$
$$T_n + T_{2n} + T_{2n+1} = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} \quad (\textbf{ecuación 11.1})$$

Al comparar con lo indicado en (*) es fácil ver que:

$$T_n + T_{2n} + T_{2n+1} = T_{3n+1}$$

Así, la ecuación queda demostrada.

Todo número perfecto par (excepto el 6) tiene como propiedad que es un número triangular cuyo orden n es un primo de Mersenne

Implicaciones de la propiedad

El lector puede observar que en cada caso el perfecto par es el triangular cuyo orden es un número de Mersenne primo (T(3)=6, T(7)=28, T(31)=496, T(127)=8128, entre otros) y que cada orden del primer triangular es un tercio del Mersenne disminuido en 1. En el primer ejemplo, se tiene que el Mersenne es 7, el cual al disminuir en 1 queda 6 y al tomar su tercio resulta 2.

Otra condición es que la suma de los órdenes del primer y tercer triangular es siempre igual al Mersenne primo y el orden del segundo triangular es siempre el doble del orden del primer triangular. Sabiendo que un perfecto impar nunca será un número triangular es imposible pensar en una relación de este tipo. Ahora bien, si un supuesto perfecto impar tiene varios factores primos:

- ¿cómo se llega a pensar en la existencia de un posible primo especial al estilo de Mersenne que permita hacer conexiones con otro determinado tipo de números (así como aquí los triangulares)? y
- ¿Cuál sería este tipo de números que soportaría las terribles condiciones formuladas para un caprichoso y escurridizo número perfecto impar?

Propiedad 4:
Sobre los vecinos triangulares

Todo número perfecto par es triangular y su diferencia con el triangular anterior es siempre un primo de Mersenne y la diferencia del triangular consecutivo superior con el perfecto es siempre el doble de la potencia de 2 que se usa en el número perfecto. De la lista de números triangulares (abreviada) hasta el 561 resaltamos los perfectos 6, 28 y 496 y sus vecinos en cada caso.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, ..., 435, 465, 496, 528,561

en el caso del 6 tenemos:

6-3=3 y 10-6=4⇨3*4=12 y perfecto=3*2=6

en el caso del 28 tenemos:

28-21=7 y 36-28=8⇨7*8=56 y perfecto=7*4=28

en el caso del 496 tenemos:

496-465=31 y 528-496=32 ⇨ 31*32=992 y perfecto=31*16=496

Se puede apreciar que la cualidad de triangularidad de los perfectos pares hace obligante que:

- Se de la presencia de un primo de Mersenne que es la diferencia entre perfecto y el valor del triangular a la izquierda del perfecto
- Quede siempre una potencia de 2 que es la diferencia entre el valor del triangular a la derecha del número perfecto y el mismo número perfecto.

- Es decir, la lista de los números de Mersenne (sean estos primos o no) guarda el secreto de los perfectos pares, al igual que la lista de las potencias de 2, pero esto se precisará mucho más adelante.

Esto da a entender que de existir perfectos impares debería haber una lista de números sumamente especial que tenga aspectos muy similares a los triangulares en cuanto a los factores primos generadores del número perfecto impar, lo cual es muy difícil de encontrar si solo son dos primos y mucho más si un numero perfecto impar es el resultado de un número primo por un cuadrado compuesto por varias bases primas como afirma Euler en su teorema de números perfectos impares.

Lo anteriormente dicho, se complica todavía cuando se consideran los trabajos de Kishore, Cohen, Hagis, Sylvester, entre otros matemáticos que han estimado que un perfecto tenga más de ocho factores primos diferentes con características que los separan excesivamente en cuanto a la cantidad de dígitos de los primos que mencionan.

A medida que existan más factores primos en los nuevos trabajos de los investigadores sobre números perfectos se hace totalmente imposible la existencia de relaciones que se parezcan en lo mínimo a esta propiedad. Esto se complica mucho más cuando los matemáticos dicen que el mínimo factor primo del supuesto perfecto impar es un poco más de cien y que otros son mayores que 10000 o mayores que 10 millones. Todo ello hace muy intrincado la existencia de perfectos impares.

Propiedad 5:
El triple de un triangular mas otro triangular

Todo número perfecto par puede escribirse como el triple de un triangular en una posición previa a una potencia de 2, más el triangular de una posición que es una potencia de 2. Dicha suma es igual al triangular de una posición consecutiva a la posición del Mersenne anterior. En tal sentido los perfectos pueden escribirse como:

$$3T(2^n - 1) + 1T(2^n) = T\left(2^{n+1} - 1\right) \text{(ecuación 12)}$$

En la fórmula anterior siempre se cumple que:

n es siempre alguno de los números de Mersenne que siempre es mitad de un Mersenne primo disminuido en 1.

2^n-1 el número anterior a la potencia de 2, es un número de Mersenne

2^n es una potencia de dos del perfecto

2^{n+1}-1=M_p es siempre un Mersenne Primo

Ejemplos:

$$3T_1 + T_2 = T_3 \Rightarrow 3(1) + (3) = 6$$
$$3T_3 + T_4 = T_7 \Rightarrow 3(6) + (10) = 28$$
$$3T_{15} + T_{16} = T_{31} \Rightarrow 3(120) + (136) = 496$$
$$3T_{63} + T_{64} = T_{127} \Rightarrow 3(2016) + (2080) = 8128$$
$$3T_{4095} + T_{4096} = T_{8191} \Rightarrow 3(8386560) + (8390656) = 33550336$$

Demostración:

Tomando el lado izquierdo de (ecuación 12) al desarrollar se obtiene que:

$$3T(2^n-1)+1\mathrm{T}(2^n)=\frac{3(2^n-1)(2^n)}{2}+\frac{1(2^n)(2^n+1)}{2}$$
$$3T(2^n-1)+1\mathrm{T}(2^n)=\frac{3(2^{2n}-2^n)}{2}+\frac{(2^{2n}+2^n)}{2}$$
$$3T(2^n-1)+1\mathrm{T}(2^n)=\frac{3*2^{2n}-3*2^n}{2}+\frac{(2^{2n}+2^n)}{2}$$
$$3T(2^n-1)+1\mathrm{T}(2^n)=\frac{3*2^{2n}-3*2^n+2^{2n}+2^n}{2}$$
$$3T(2^n-1)+1\mathrm{T}(2^n)=\frac{4*2^{2n}-2*2^n}{2}$$
$$\boldsymbol{3T(2^n-1)+1\mathrm{T}(2^n)=2^{2n+1}-2^n} \quad (\textbf{ecuación 12.1})$$

Por otra parte, al desarrollar la parte derecha de (ecuación 12) se obtiene que:

$$T(2^{n+1}-1)=\frac{(2^{n+1}-1)(2^{n+1})}{2}$$
$$T(2^{n+1}-1)=\frac{(2^{2n+2}-2^{n+1})}{2}$$
$$\boldsymbol{T(2^{n+1}-1)=2^{2n+1}-2^n} \quad (\textbf{ecuación 12,2})$$

Entonces de los dos resultados obtenidos (ecuación 12.1) y (ecuación 12.2) se verifica el cumplimiento de la (ecuación 12)

La sucesión 2^n-1de Mersenne genera la serie de elementos:

1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, 4095, 8191, 16383, 32767, 65535, ….

Implicaciones de la propiedad

Esta propiedad reitera en sus características los siguientes aspectos:

- La relación entre triangulares donde dos de los órdenes son coincidentes con elementos consecutivos de la sucesión de Mersenne sin importar que los dos sean ambos primos o uno de ellos sea compuesto.
- Además, contiene al triangular cuyo orden es coincidente con la potencia de 2 que genera al perfecto correspondiente y es significativo que la suma de los dos órdenes menores es igual al orden del primo de Mersenne en cada caso.
- Aquí se vuelve a establecer la estrecha conexión entre las potencias de 2 y los números de Mersenne y se ve la relación entre dos números de Mersenne que contienen a una potencia intermedia de 2. Estas características muestran que la perfección numérica se reduce a dichos números que guardan una conexión de ser una potencia de 2 y los números de Mersenne que son potencias de 2 disminuidas en 1.

Propiedad 6:
Perfecto como suma de 3 hexagonales

Todo perfecto, excepto 6, puede escribirse como:

$$\boldsymbol{H_{2^{n}-2^{(n-1)/2}} + 2H_{2^{n}} + H_{2^{n}+2^{(n-1)/2}} = H_{2^{n+1}}} \ \textbf{(ecuación 13)}$$

Ejemplos:

$$H_1 + 2H_2 + H_3 = H_4 \Rightarrow 1 + 2(6) + 15 = 28$$
$$H_6 + 2H_8 + H_{10} = H_{16} \Rightarrow 66 + 2(120) + 190 = 496$$
$$H_{28} + 2H_{32} + H_{36} = H_{64} \Rightarrow 1540 + 2(2016) + 2556 = 8128$$
$$H_{2016} + 2H_{2048} + H_{2080} = H_{4096} \Rightarrow 8126496 + 2(8386560) + 8650720 = 33550336$$

En los valores mostrados en los ejemplos de esta propiedad es interesante visualizar que los primeros órdenes de los números hexagonales que son 1, 6, 28 incluyen otras relaciones similares que no generan números perfectos que comienzan con los números H_{120}, H_{496} hasta llegar luego al H_{2016}

Esto permite ver que la sucesión 1, 6, 28, 120, 496, 2016, 8128 contiene en si (extendiéndola al infinito) todos los perfectos descubiertos hasta ahora y los que faltarían por descubrir, es decir, que esto se relaciona con la infinitud de los números perfecto pares y con la de los números de Mersenne, pues lógicamente mientras existan números primos de Mersenne es porque a su vez continuarán existiendo números perfectos

Este detalle es importante porque permite crear una especie de programa iterativo que usando una supercomputadora puede comenzar a iterar a partir del último valor perfecto obtenido usando el valor de n de la potencia de 2 que se encontró, ya que es fácil entender que los números perfectos de posiciones 52 en adelante son tales que estarán contenidos en las iteraciones de la fórmula o algoritmo

$$p=4q+2^{n}, \text{con } q=1 \text{ y } n\geq1, \text{actualizando } q=p$$

$$p = 4(1) + 2^1 = 6$$
$$p = 4(6) + 2^2 = 28$$
$$p = 4(28) + 2^3 = 120$$
$$p = 4(120) + 2^4 = 496$$
$$p = 4(496) + 2^5 = 2016$$
$$p = 4(2016) + 2^6 = 8128$$
$$p = 4(8128) + 2^7 = 32640$$
$$p = 4(32640) + 2^8 = 130816$$
$$p = 4(130816) + 2^9 = 523776$$
$$p = 4(523776) + 2^{10} = 2096128$$
$$p = 4(2096128) + 2^{11} = 8386560$$
$$p = 4(8386560) + 2^{12} = 33550336$$

Se puede apreciar que en el sencillo programa se van generando los números perfectos de una manera que es muy sencilla de implementar.

Propiedad 7

Todo número perfecto par de orden M_{n1} (excepto el 6) es nueve veces un triangular cuyo subíndice es M_n-1 / 3, incrementado en 1,

Como $M_n = 2^n-1$ la propiedad puede escribirse en la forma:

$$\mathbf{9T\left(\frac{2^n-2}{3}\right)+1 = T(2^n-1)} \qquad \textbf{(ecuación 14)}$$

Ejemplos:

$$9T_2 + 1 = T_7 \Rightarrow 9(3) + 1 = 28$$
$$9T_{10} + 1 = T_{31} \Rightarrow 9(55) + 1 = 496$$
$$9T_{42} + 1 = T_{127} \Rightarrow 9(903) + 1 = 8128$$
$$9T_{2730} + 1 = T_{8191} \Rightarrow 9(3727815) + 1 = 33550336$$
$$9T_{43690} + 1 = T_{131071} \Rightarrow 9(954429895) + 1 = 8589869056$$

Demostración:

Al desarrollar el lado izquierdo de la igualdad obtenemos:

$$9T\left(\frac{2^n-2}{3}\right)+1 = 9 * \frac{\left(\frac{2^n-2}{3}\right)\left(\frac{2^n-2}{3}+1\right)}{2}+1$$
$$9T\left(\frac{2^n-2}{3}\right)+1 = 9 * \frac{\left(\frac{2^n-2}{3}\right)\left(\frac{2^n+1}{3}\right)}{2}+1$$
$$9T\left(\frac{2^n-2}{3}\right)+1 = \frac{(2^n-2)(2^n+1)}{2}+1$$
$$9T\left(\frac{2^n-2}{3}\right)+1 = \frac{(2^{2n}-2*2^n+1*2^n-2)+2}{2}$$
$$9T\left(\frac{2^n-2}{3}\right)+1 = \frac{2^{2n}-1*2^n}{2}$$
$$9T\left(\frac{2^n-2}{3}\right)+1 = 2^{2n-1}-2^{n-1} \quad \textbf{(ecuación 14.1)}$$

Al desarrollar el lado derecho e la igualdad nos queda:

$$T(2^n-1)=\frac{(2^n-1)(2^n)}{2}$$

$$T(2^n-1)=\frac{2^{2n}-2^n}{2}$$

$$\boldsymbol{T(2^n-1)=2^{2n-1}-2^{n-1}} \quad (\textbf{ecuación 14.2})$$

Al desarrollar ambos lados se obtienen los mismos resultados en () y en () por lo cual la propiedad queda demostrada

Cada lector puede apreciar que aquí nuevamente prevalece como característica de la propiedad la interrelación entre la posición primo de Mersenne M_n y otro triangular cuya posición $(M_n-1)/3$.

Ahora bien, esto tiene una conexión interesante con la conjetura de Collatz que indica que si un número es par se divide entre 2 y si es impar se multiplica por 3 y se le suma 1.

En efecto, si se toma los órdenes de los triangulares multiplicados por 9 en los ejemplos mostrados de esta propiedad resulta que al aplicar Collatz dos veces siempre se cae en obtener la potencia de 2 que genera al número perfecto par con el primo de Mersenne indicado en la posición del triangular luego de la igualdad.

Aplicando el proceso Collatz tenemos:

Para el 2: 2 es par genera 2/2=1 y 1 es impar genera 1*3+1=4 y 4*7 =28

Para el 10: 10 es par genera 10/2=5 y 5 es impar genera 5*3+1=16 y 16*31 =496

Para el 42: 42 es par genera 42/2=21 y 21 es impar genera 21*3+1=64 y 64*127 =8128

Para el 2730: 2730 es par genera 2730/2=1365 y 1365 es impar genera 1365*3+1=4096 y 4096*8191 =33550336

Para el 43690: 43690 es par genera 43690/2=21845 y 21845 es impar genera 21845*3+1=65536 y 65546*131071 =8589869056.

Otro aspecto interesante es que los números 2, 10, 42, 2730, 43690 son elementos de una sucesión cíclica. Es preciso indicar que una sucesión cíclica es aquella en la cual no se evalúan en ella todos los naturales, sino que partiendo de un valor inicial cualquiera se evalúa el primer resultado en la forma general de la sucesión y así se trabaja sucesivamente. En efecto, aquí se tiene una sucesión cíclica de la forma 4n+2, ya que usando n=0 se obtiene

$$4n + 2 = 4(0) + 2 = 2$$

Al evaluar el 2 resultante queda:

$$4n + 2 = 4(2) + 2 = 10$$

Luego al usar el 10 se obtiene

$$4n + 2 = 4(10) + 2 = 42$$

Al trabajar así sucesivamente se obtiene:

$$4n + 2 = 4(42) + 2 = 170$$
$$4n + 2 = 4(170) + 2 = 682$$
$$4n + 2 = 4(682) + 2 = 2730$$
$$4n + 2 = 4(2730) + 2 = 10922$$
$$4n + 2 = 4(10922) + 2 = 43690$$

La sucesión de subíndices menores para números como los perfectos como suma de 3 triangulares está dada por:

$$m(n) = \begin{cases} 2 & si \quad n = 1 \\ 4m(n) + 2 & si \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (ecuación\ 15)$$

T(2)+T(4)+T(5)=T(7)
T(10)+T(20)+T(21)=T(31)
T(42)+T(84)+T(85)=T(127)
T(170)+T(340)+T(341)=T(511)
T(682)+T(1364)+T(1365)=T(2047)
T(2730)+T(5460)+T(5461)=T(8191)
T(10922)+T(21844)+T(21845)=T(32767)
T(43690)+T(87380)+T(87381)=T(131071)
T(174762)+T(349524)+T(349525)=T(524287)

Es decir, que un perfecto par puede expresarse en la forma

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(2n)(2n+1)}{2} + \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} = \frac{9n^2 + 9n + 2}{2}$$

con algun valor de n de los que se consiguen con la (ecuación 15) antes indicada.

Igualmente, la sucesión antes mostrada de los números de Mersenne es cíclica, ya que si bien se obtienen de 2^n-1 para n≥1, es decir, para todos los naturales, dichos números se obtienen de la mitad de la sucesión anterior 2n+1 comenzando con n=0, es decir,

$$2n + 1 = 2(0) + 1 = 1$$
$$\mathbf{2n + 1 = 2(1) + 1 = 3}$$
$$\mathbf{2n + 1 = 2(3) + 1 = 7}$$
$$2n + 1 = 2(7) + 1 = 15$$
$$\mathbf{2n + 1 = 2(15) + 1 = 31}$$
$$2n + 1 = 2(31) + 1 = 63$$
$$\mathbf{2n + 1 = 2(63) + 1 = 127}$$
$$2n + 1 = 2(127) + 1 = 255$$
$$2n + 1 = 2(255) + 1 = 511$$
$$2n + 1 = 2(511) + 1 = 1023$$

Propiedad 8:
Perfecto par en función de PHI de Euler (versión 1)

Todo número perfecto par N es siempre igual al doble de phi de Euler de N más una potencia de 2. Esto indica una relación de cada perfecto N con los números coprimos a él. Para todo perfecto N se cumple que:

$$N = 2\varphi(N) + 2^k \quad y\ se\ verifica\ que\ N = 2^k M\ (ecuación\ 16)$$

Ejemplos

$$\varphi(6) = \varphi(2)\varphi(3) = 1 * 2 = 2$$
$$\varphi(28) = \varphi(4)\varphi(7) = 2 * 6 = 12$$
$$\varphi(496) = \varphi(16)\varphi(31) = 8 * 30 = 240$$
$$\varphi(8128) = \varphi(64)\varphi(127) = 32 * 126 = 4032$$
$$\varphi(33550336) = \varphi(4096)\varphi(8191) = 2048 * 8190 = 16773120$$

Luego: $6 = 2 * \varphi(6) + 2^1 = 2 * 2 + 2 = 4 + 2$

entonces: $28 = 2 * \varphi(28) + 2^2 = 2 * 12 + 4 = 24 + 4$

Así obtenemos: $496 = 2 * \varphi(496) + 2^4 = 2 * 240 + 16 = 480 + 16$

Se verifica que: $8128 = 2 * \varphi(8128) + 2^6 = 2 * 4032 + 64 = 8064 + 64$

Es fácil ver que: $33550336 = 2 * \varphi(33550336) + 2^{12} = 2 * 16773120 + 4096$

Demostración:

los números perfectos pares son de la forma $N=2^k M$ donde M es un número primo de Mersenne

La función phi de Euler al aplicarse a los perfectos es de la forma:

$$\varphi(N) = \varphi\left(2^k\right)\varphi(M) = 2^{k-1}(M - 1)$$

Entonces:

$$N = 2\varphi(N) + 2^k$$

Sustituyendo $\varphi(N) = 2^{k-1}(M - 1)$ queda:

$$N = 2^{k-1}(M - 1)) + 2^k$$
$$N = 2^k(M - 1) + 2^k$$
$$N = 2^k((M - 1) + 1)$$
$$N = 2^k M$$

Asi queda demostrada la (ecuación 16)

Propiedad 9: Perfecto par en función de PHI de Euler (versión 2)

Todo número perfecto par N es siempre igual a la suma de la phi de Euler del perfecto par N más el cuadrado de la potencia de 2 que genera a N. Esto indica una relación de cada perfecto con los números coprimos a él. En efecto, para todo perfecto par N se cumple que:

$$= \varphi(N) + 2^{2k} y\, se\, verifica\, que\, N = 2^k M \quad (ecuación\, 17)$$

Ejemplos

$$\varphi(6) = \varphi(2)\varphi(3) = 1 * 2 = 2$$
$$\varphi(28) = \varphi(4)\varphi(7) = 2 * 6 = 12$$
$$\varphi(496) = \varphi(16)\varphi(31) = 8 * 30 = 240$$
$$\varphi(8128) = \varphi(64)\varphi(127) = 32 * 126 = 4032$$
$$\varphi(33550336) = \varphi(4096)\varphi(8191) = 2048 * 8190 = 16773120$$

Luego: $6 = \varphi(6) + 2^2 = 2 + 4$

entonces: $28 = \varphi(28) + 4^2 = 12 + 16$

Así obtenemos: $496 = \varphi(496) + 16^2 = 240 + 256$

Se verifica que: $8128 = \varphi(8128) + 64^2 = 4032 + 4096$

Es fácil ver que: $33550336 = \varphi(33550336) + 4096^2 = 16773120 + 16777216$

Demostración:

Debemos probar que $N = \varphi(N) + 2^{2k}$ y se verifica que $N = 2^k M$

vea que en la propiedad 8 teníamos que:

$$N = 2\varphi(N) + 2^k$$

Al despejar φ(N) obtenemos que:

$$\varphi(N) = \frac{N - 2^k}{2}$$

Tenemos que al sustituir lo anterior nos queda: $N=\varphi(N)+2^{2k}$

$$N = \frac{N - 2^k}{2} + 2^{2k}$$
$$2N = N - 2^k + 2^{2k+1}$$
$$N = 2^{2k+1} - 2^k$$

de lo cual factorizando queda

$$N = 2^k\left(2^{k+1} - 1\right), \quad pero\ M = \left(2^{k+1} - 1\right)$$
$$N = 2^k M$$

Así queda demostrada la (ecuacion 17)

¿Pero que pasaría en algunos números impares con N y φ(N)?

Vea que según la definición de perfecto impar el mismo debe ser un número de la forma:

$$N = \left(qp1^{\alpha}p2^{\beta}p3^{\gamma} \dots pn^{\delta}\right) \quad (ecuación\ 18)$$

Donde q es un primo de la forma 4k+1 y cada exponente en *p1 hasta pn* es un número par.

Puede verse que al buscar φ(N) quedaría una expresión de la forma:

$$\varphi(N) = (q-1)p1^{\alpha-1}(p1-1)p2^{\beta-1}(p2-1)^{\gamma-1} \dots pn^{\delta-1}(p-1) \quad (ecuación\ 19)$$

El lector Puede ver que la diferencia entre N y φ(N) siempre es impar (ya que N es impar y φ(N) es par solo por el hecho de que (q-1) es par) y que debe generar nuevos factores primos que no forman al número N, lo cual impide una expresión adecuada de dicho número en caso de existir.

Pongamos unos ejemplos:

Cuadrado de base con un solo factor por un primo

$$N = 3*7^2 = 147\ y\ \varphi(147) = 84, \quad dif = 63 = 3*7*3$$
$$N = 3*13^2 = 507\ y\ \varphi(507) = 312, \quad dif = 195 = 3*13*5$$

Cuadrado de base con dos factores por un primo

$$N = 3*7^2*11^2 = 17787\ y\ \varphi(17787) = 9240, \quad dif = 8547 = 3*7*11*37$$
$$N = 3*17^2*19^2 = 312987\ y\ \varphi(312987) = 186048, \quad dif = 126939 = 3*17*19*131$$

Cuadrado de base con tres factores por un primo

$$= 3*5^2*7^2*11^2 = 444675\ y$$
$$\varphi(444675) = 184800, \quad dif = 259875 = 3*5*7*11*225$$
$$N = 3*7^2*11^2*13^2 = 3006003\ y$$
$$\varphi(3006003) = 1441440, \quad dif = 1564563 = 3*7*11*13*521$$
$$N = 3*11^2*13^2*17^2 = 17729283\ y$$
$$\varphi(17729283) = 9335040, \quad dif = 8394243 = 3*11*13*17*1151$$

Como puede verse en los ejemplos, la factorización de la diferencia entre N y el valor φ(N) siempre es generadora de nuevos factores primos no relacionados con el número N original, por lo cual es imposible que exista algún número de esa forma y mucho más con factores primos tan diferentes que no genere nuevos factores primos no presentes en el número N impar.

Implicaciones de las propiedades 8 y 9

Como puede verse de los ejemplos, el uso de la función phi de Euler ($\varphi(N)$) tiene relación con todo n (o mejor dicho, dicha función está definida en todos los naturales) y en este artículo se manifiesta en dos formas diferentes que debe existir una relación ineludible entre N y $\varphi(N)$ por medio de su diferencia, en la cual dicha diferencia (así como ocurre en los perfectos pares debería ser o bien un factor del supuesto número impar o el cuadrado de uno de sus elementos), pero al ver la factorización de dicha diferencia impar se evidencia la generación de factores primos diferentes a los primos que le dieron origen de lo cual se infiere que haría falta un factor racional (que no pertenece a los naturales y niega la definición formal de perfección de un número) que elimine los nuevos factores y sea generador del número original.

Además, la teorización de perfecto impar que define el producto de un cuadrado por un primo de una forma especial hace que esto sea imposible, ya que conlleva a que la diferencia no sea expresable nunca en términos de parte de las bases primas con los mismos exponentes y que exija que se tomen otros factores (que según la definición deben ser muchos hasta los estudios hechos) que necesariamente ameritan que se comparta por lo menos una base, con lo cual la aportación de un factor es incompleta y ese caso es imposible que pueda suceder.

Es decir, para un determinado primo no puede ocurrir que se tenga en un factor una aportación p13 y en otro p15 sino que debería aparecer p18 como un factor, ya que cada factor debe ser independiente de cada uno de los otros. Esto se debe a que la aportación parcial en la suma de divisores es diferente de la aportación total, ya que la función phi de Euler no es aditiva, sino meramente multiplicativa.

Propiedad 10
Perfecto par por su suma de divisores propios

Todo número perfecto par es tal que existe un primo p (que es un primo de Mersenne) para el cual ocurre que su suma de divisores propios.

$$spd(2^n * P) = (2^n - 1)P + (2^{n+1} - 1) = (2^n * P) \ (ecuacion\ 20)$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{l}
2 * P = 1 * P + 3 \to P = 3 \quad PERFECTO \\
4 * P = 3 * P + 7 \to P = 7 \quad PERFECTO \\
8 * P = 7 * P + 15 \to P = 15 \quad (COMPUESTO) \\
16 * P = 15 * P + 31 \to P = 31 \quad PERFECTO \\
32 * P = 31 * P + 63 \to P = 63 \quad COMPUESTO) \\
64 * P = 63 * P + 127 \to P = 127 \quad PERFECTO \\
128 * P = 127 * P + 255 \to P = 255 \quad (COMPUESTO) \\
256 * P = 255 * P + 511 \to P = 511 \quad (COMPUESTO)
\end{array}$$

El lector puede ver que en cada caso el valor de P que se obtiene es el mismo del término independiente de P que es siempre un número de Mersenne primo o no primo, lo cual muestra una relación casi automática entre los primos de Mersenne y las potencias de 2 cada vez que se forma un número perfecto. estas características hacen inconcebible una expresión de sumas de divisores donde se use un tipo de primos que genere una condición similar.

Propiedad 11
Perfecto en potencia de 2

Al representar un número perfecto par en su forma

$$2^n\left(2^{n+1}-1\right)=2^{2n+1}-2^n \quad (\textit{ecuación } \mathbf{21})$$

Se cumplen una serie de condiciones importantes, entre las cuales se pueden mencionar las siguientes:

- 2n+1 es siempre según el "n" que lleve 2^n en el perfecto la cantidad de divisores propios del número perfecto par.
- La cantidad de potencias de 2 es siempre n+1, comenzando en 2 elevado a la cero.
- La diferencia entre los dos exponentes de la derecha de la (ecuación *) +1 es decir (n+2), es siempre la posición del Mersenne primo al ordenar los divisores en orden creciente
- El valor de n-1 es las veces que se debe multiplicar el número primo por 1, 2, 4, 8 y las demás potencias de 2 según su número

Tabla 3. Detalles que aporta la fórmula de un perfecto par

N	Forma	Cantidad de divisores propios	Cantidad de potencias del 2	Posición del primo Mersenne	Cantidad de múltiplos del Mersenne primo
6	$2^3 - 2^1$	3 propios	2	3	0
28	$2^5 - 2^2$	5 propios	3	4	1
496	$2^9 - 2^4$	9 propios	5	6	3
8128	$2^{13} - 2^6$	13 propios	7	8	5

Fuente: Elaboración propia de los autores

Implicaciones de la propiedad

Si uno asume que la propiedad dada indica tantos elementos de importancia acerca de los números perfectos pares como lo son la cantidad de divisores propios, la cantidad de potencias de 2, la posición del primo de Mersenne y la cantidad de múltiplos que se colocan del número primo. Resulta difícil creer que estos detalles se puedan precisar en un número perfecto impar que tiene tantos números primos como factores. Vea que aquí solo se tendrían como divisores potencias de 2 y productos de potencias de 2 por el Mersenne primo.

En cambio, se tendrían múltiples combinaciones de cada primo con las diversas potencias de los otros primos entendiendo que se trataría de un número ampliamente compuesto en el caso de un supuesto perfecto impar, de lo cual se deduce que la conceptualización de posibles factores o divisores del número atiende a meras suposiciones sin un fundamento verdaderamente lógico y apegado a un conocimiento que se pueda aceptar como real.

Propiedad 12
Perfecto en números de mersenne

Vea que lo números perfectos impares son expresables dentro del mismo conjunto generador de los números de la forma

$$2^n (2^{n+1} - 1) = 2^{2n+1} - 2^n$$

Pero ellos tienen una relación directa con los números de Mersenne que incluso exonera la potencia de 2, previa al Mersenne en dos formas diferentes que son:

A) El cuadrado de un Mersenne menos el producto de ese Mersenne por el anterior

B) El producto de dos Mersenne consecutivos más el último de ellos

Los números de Mersenne son los de la lista

1 3 7 15 31 63 127 255 511 1023 2047 4095 8191

Tabla 4. Expresión de perfecto par usando solo números de Mersenne

Número	Mn^2-Mn*Mn-1	Mn+Mn*Mn-1
6	3^2-3*1	3+3*1
28	7^2-7*3	7+7*3
120	15^2-15*7	15+15*7
496	31^2-31*15	31+31*15
2016	63^2-63*31	63+63*31
8128	127^2-127*63	127+127*63
32640	255^2-255*127	255+255*127
130816	511^2-511*255	511+511*255
523776	1023^2-1023*511	1023+1023*511
2096128	2047^2-2047*1023	2047+2047*1023
8386560	4095^2-4095*2047	4095+4095*2047
33550336	8191^2-8191*4095	8191*4095+4095

Fuente: Elaboración propia de los autores

Según la columna 2 de la tabla anterior pudiéramos conceptualizar que:

"un número es perfecto siempre que a un Mersenne primo al cuadrado se le resta el producto de dicho Mersenne por el anterior"

Según la columna 3 podríamos decir que:

"un número perfecto es aquel que se obtiene de tomar un primo de Mersenne y multiplicar por el Mersenne anterior y sumar con ese mismo Mersenne".

Las implicaciones de esta definición son las siguientes:

- No haría falta usar potencias de 2 para hallar un perfecto
- Cada vez que se halle un Mersenne primo y se use la fórmula de la columna 2 o de la columna 3 se obtendría un número perfecto
- Vea que con esta forma de expresar a los perfectos pares se puede apreciar la dependencia de los números perfectos de la existencia de los números de Mersenne y que si un perfecto impar en su forma es solo producto de primos de potencia par por otro primo de exponente impar se requiere el protagonismo de más de un tipo de dichos primos, lo cual hace complicado la dependencia de un supuesto perfecto impar de algún primo en específico y aún peor de un conjunto de primos formando una base de un hipotético cuadrado por otro supuesto primo.

Propiedad 13
Propiedad del cuadrado y el oblongo previo

Todo número perfecto par es expresable como la suma de un cuadrado de lado la potencia de 2 del perfecto más un oblongo producto de dicha potencia por el natural anterior que siempre es un numero de Mersenne.

$$6=2*2+2*1$$
$$28=4*4+4*3$$
$$496=16*16+16*15$$
$$8128=64*64+64*63$$
$$33550336=4096*4096+4096*4095$$

Esta propiedad es interesante por lo siguiente:

- Remite a la propiedad 9 en forma directa. Vea que el cuadrado es el mismo de la propiedad 9 y el oblongo viene a ser en cada caso el valor de la phi de Euler para el número perfecto. En cada caso tanto un cuadrado de base par como un oblongo (indistintamente de sus valores) también es par y la suma de dos pares es otro número par
- Aunque un defensor de la existencia de los perfectos impares podría alegar que un perfecto impar podría cumplir esto, ya que la suma de un oblongo (formado de un par por el impar consecutivo) es par y el cuadrado del impar es impar y entonces la suma queda impar con lo que puede darse el caso de que exista también un perfecto impar, pero vea que la suma de un oblongo más un cuadrado es siempre triangular y que un perfecto impar no puede ser triangular, con lo cual las posibilidades de que exista un perfecto impar así es totalmente improbable.
- Además, en esta forma de expresión se usa siempre una potencia de 2 de exponente par y luego el número de Mersenne resultante es uno que no es primo. Solo se da el caso de tener un Mersenne primo en el 28, ya que 3 es Mersenne primo porque 3 y 7 son los únicos primos consecutivos de Mersenne. Esto ayuda a conseguir números perfectos de una manera más fácil, es decir, si se encuentra una potencia de 2 de exponente par y un numero de Mersenne no primo se puede (algunos casos) encontrar un número perfecto par

Propiedad 14
Perfecto como una escalera de igual base y altura

Esta propiedad es más geométrica y gráfica que de tipo algebraica.

Todo número perfecto par puede representarse como una escalera de igual base y altura, las cuales son siempre el número primo de Mersenne. aquí se usa la cardinalidad inversa en cuanto al número de tramos da cada peldaño. En el caso del 6 el primo de

Mersenne es el 3 entonces se usa 3 en la base, dos en el siguiente peldaño y 1 el peldaño superior. Esto es equivalente a tener una pirámide o triangular desplazando todos los bloques a la derecha.

- El hecho de que el triangular pueda representarse siempre como una escalera donde la base y la altura es mersenne primo, es sumamente significativo pues indica que siempre hace falta un triangular para completar un cuadrado.
- Un número impar puede cumplir el hecho de generar una escalera de igual base y altura solamente si es triangular, de lo contrario si no es triangular es imposible que genere una escalera así. Sin embargo, aunque obviamente pueda poseer una base y altura prima, dicho primo no es de mersenne

Nota: Al respecto el lector puede intentar con varios números impares e ir verificando a nivel grafico que es imposible poder completar una escalera de igual base y altura. Generalmente o faltarán peldaños o sobrarán algunos de ellos. Vea, por ejemplo, que en el caso de 9 puedes formar un cuadrado, pero nunca puedes formar una escalera de igual base y altura, y que o bien faltaría un cubo o bien sobrarían 3, ya que 6 y 10 son los números triangulares cercanos al 9

Conclusión

Si con las propiedades existentes de cardinalidad hasta un Mersenne primo, de triangularidad, de hexagonalidad, de suma de potencias cúbicas de base impar, entre otras que cumplen los números perfectos pares y eran conocidas previamente a la publicación de este artículo se dificultaba a un impar poder ser perfecto impar, mucho más difícil se hace poder creer en la existencia de dichos números con las características de estas nuevas propiedades en base a aspectos de triangularidad, hexagonalidad, presencia de potencias de 2, de primos de Mersenne (o en general números de Mersenne que no deben ser necesariamente primo), la función phi de Euler en sus dos propiedades y aspectos relacionados vecindad de números triangulares o el uso de diferencia de cuadrados , relaciones con sucesiones, algoritmos de generación de perfectos pares que aquí se incorporan y que evidencian el hecho de que sin lugar a dudas la perfección numérica está íntimamente relacionada con las potencias de 2 y con las características de los números de Mersenne (primo o no primos).

Por otra parte, la existencia de sucesiones como a_n,b_n y M_n, presentadas en la propiedad 2 y la imposibilidad de que existan una serie de valores que cumplan con un mismo patrón para generar diferencias de cuadrados cuyos promedios pertenezcan a los naturales en el caso de bases de diferente paridad constituyen un elemento significativo para dudar que existan sucesiones que contengan algún tipo de primo especial que cumpla con la generación de un número perfecto impar. Es decir, no existen dos sucesiones de la misma forma que generen una sucesión que involucre un conjunto de primos que multiplicados por un primo lleven a la perfección.

Todo esto reitera que las condiciones de triangularidad, de potencias de 2 y de números de Mersenne (siendo estos primos o no) prevalecen en el desarrollo de propiedades de los números perfectos y la abundancia de las propiedades que relacionan dichos elementos son condiciones necesarias.

Por otra parte, el uso de la función phi de Euler ($\varphi(n)$) que tiene relación con todo n (o mejor dicho que está definida en todos los naturales) y que se manifiesta en este artículo en dos formas diferentes evidencia que debe existir una relación ineludible entre n y $\varphi(n)$ por medio de su diferencia, en la cual dicha diferencia debe ser o bien un factor del supuesto número impar o el cuadrado de uno de sus elementos, pero al ver la factorización de dicha diferencia impar se evidencia la generación de factores primos diferentes a los primos que le dieron origen, de lo cual se infiere que haría falta un factor racional (que no pertenece a los números naturales y niega la definición formal de perfección de un número) que elimine los nuevos factores y sea generador del número original.

Además, la teorización de perfecto impar que define el producto de un cuadrado por un primo de una forma especial hace que esto sea imposible, ya que conlleva a que la diferencia no expresable nunca en términos de parte de las bases primas con los mismos exponentes exija que se tomen otros factores (que según la definición deben ser muchos, según los últimos estudios e investigaciones realizadas) que necesariamente exigen que se comparta por lo menos una base, con lo cual la aportación de un factor es incompleta, esto es imposible que pueda suceder, ya que conduciría a sumatorias de divisores propios que serían erradas en relación al verdadero valor que deben dar cuando se toma cada factor primo con su debida aportación. Es decir, se debe considerar todo el exponente y nunca una parte del mismo en el caso de cada primo, pue la pretensión de querer expresar para una misma base prima su exponente en forma compartida conduce a errores en el cálculo.

Referencias bibliográficas

Cadavieco, M. (2002) Pitágoras y los números perfectos. Ingeniería, vol. 6, núm. 2, mayo-agosto, 2002, pp. 47-49. Universidad Autónoma de Yucatán Mérida, México

Cajori, Florian (1929). A History Of Mathematical Notations Volume II. Open Court Publishing Company. §409.

Calmaestra. L. (2020). Nùmeros hexagonales. recursosdematematicas/numeros-hexagonales

Crilly, Tony (2011). 50 cosas que hay que saber sobre matemáticas. Ed. Ariel. ISBN 978-987-1496-09-9.

Della Paolera, Pablo (2020) Divulgación Científica desde Buenos Aires, Argentina –. https://paolera.wordpress.com/tag/numeros-perfectos/ .paolera@gmail.com

Dickson, LE (1919). Historia de la teoría de los números, vol. Yo. Washington: Institución Carnegie de Washington. pág. 25.

Gallardo, Luis H. (2010). "Sobre un comentario de Makowski sobre números perfectos". Elem. Matemáticas. 65: 121-126. doi: 10.4171 / EM / 149 ..

García, J.A. y Martinón A. (1997). Números poligonales. artículo publicado en la revista Educación Matemática Vol. 1 O No. 3 diciembre 1998 pp. 103-108

«GIMPS Project Discovers Largest Known Prime Number: 282,589,933-1». Mersenne Research, Inc. 21 de diciembre de 2018. Consultado el 21 de diciembre de 2018.

Graham, Ronald; Knuth, Donald; Patashnik, Oren (1994), Concrete Mathematics: a foundation for computer science (2nd ed.), Reading, MA: Addison-Wesley, ISBN 0-201-55802-5, Zbl 0836.00001

Hardy, G. H.; Wright, E. M. (1979), An Introduction to the Theory of Numbers (Fifth ed.), Oxford: Oxford University Press, ISBN 978-0-19-853171-5

Llopis, José L. «Sucesiones o progresiones aritméticas». Matesfacil. ISSN 2659-8442. Consultado el 15 de mayo de 2020.

Novarese, H.. (1886) Note sur les nombres parfaits Texeira J. VIII, 11-16.

Makowski,A. (1962). "Observación sobre números perfectos". Elem. Matemáticas. 17 (5): 109.

Pérez Esteban, Dionisio (2014) números triangulares cuadrados y la cuadratura del triángulo. Publicado en la revista de investigación pensamiento matemático.

Pérez Sanz, Antonio (2007) El embrujo de los números perfectos. Artículo publicado en la edición 56 de la revista SUMA noviembre 2007, pp. 105-110.

Redmond, Don (1996). Teoría de números: una introducción a las matemáticas puras y aplicadas. Chapman & Hall / CRC Matemáticas puras y aplicadas. 201. Prensa CRC. Problema 7.4.11, pág. 428. ISBN 9780824796969.

T. Heath (1981) A History of Greek Matlzematics from Thales to Euclid. Dover,NewYork

Sapiña, R. «Problemas resueltos de progresiones aritméticas». Problemas y ecuaciones. ISSN 2659-9899. Consultado el 15 de mayo de 20

Sylvester J. J. (1879) "On certain ternary cubic-form equations", American Journal of Mathematics, 2 : 357-393; Sylvester coins the term "totient" on page 361.

Zaldívar, Felipe Introducción a la teoría de números / Felipe Zaldívar. — México : FCE, 2012 198 p. ; ilus. ; 23 x 17 cm — (Colec. Sección de Obras de Ciencia y Tecnología) ISBN 978-607-16-0738-6.