fluir en el hecho de que este u otro modelo de verificación sea adoptado por diversos tipos de pensadores en esta época o en otras. Este particular modo de verificación de ningún modo ha sido empleado por todos los pensadores de todos los tiempos. En realidad, hay muchos hoy que no lo aceptan. Este modelo particular no existió ni pudo haber existido antes del surgimiento de las ciencias físicas en Europa Occidental, ya que fue extraído de este tipo de investigación"[38].

Nos toca a nosotros, ahora, analizar brevemente, desde el punto de vista de la sociología del conocimiento, este cambio de valoración de las ciencias que pasan de ciencias de *segunda clase*, inferiores y sirvientas de la ciencia suprema que es la teología, sujeta a su control judicial, a ciencias cuya verdad es de primer orden.

Se trata, en efecto, de un cambio radical, de una inversión en las actitudes valorativas del hombre, de la época.

Si la supremacía de la teología se debía a la valoración de su altísimo objeto aquellas cosas que por su elevación transcienden la capacidad de la razón humana (*rationem transcendunt*), ahora a partir del Renacimiento, de ese movimiento cultural que es la potenciación de lo humano sobre lo *transcendente* –lo que se va a valorar es precisamente lo contrario–: sólo aquellas cosas que están sometidas a la razón (*ea tantum quae rationi subduntur*). Esta vocación terrenal que se enfatiza en los tiempos modernos, supone una crisis en los valores. Pero esta crisis de valores hay que inscribirla en la gran transformación estructural de Occidente que hemos estudiado en el capítulo segundo, al cual nos remitimos.

La ciencia se interesa por la nueva situación socio-económica y política de los tiempos modernos y responde a ella.

El nuevo saber diseñado por Bacon es un ideal que lleva una carga de entusiasmo porque en él, el hombre cree poder realizarse plenamente.

El valor social de la ciencia, vinculado al de la técnica había sido garantizado. Sólo faltaba que la ciencia, ya en las mentes de los científicos a partir de Galileo, considerada como el saber ejecutivo, adquiriera una organización respaldada por la sociedad y el poder económico y el político, esto es, se institucionalizara.

Este paso se dio en la época del mercantilismo, y no por casualidad.

Es, en efecto, en el siglo XVII mercantilista, cuando todos los problemas técnicos provocados por la revolución comercial adquieren una importancia e interés proporcionados a la magnitud del desarrollo comercial e industrial de aquella época oceánica. Véase por ejemplo el problema de hallar instrumentos adecuados para la situación de los navíos en el Océano a los que se abocan científicos como Huyghens.

Es el momento en que la burguesía y el poder político aunados toman muy en serio el papel de la ciencia elevando a ésta a una situación de organización, planificación y colaboración desde su situación anterior de actividad aislada, dispersa y desorganizada.

38 Ibídem, pág. 147.

En Inglaterra es la burguesía comercial la que promueve la institucionalización de la ciencia. En cambio en Francia, es el estatismo el que de modo directo establece la ciencia institucionalizada.

Para abordar el tema, aclaremos los conceptos claves: *institución, institucionalización.*

Entre las muchas definiciones del término *institución*, tan importante en sociología, elijamos la que nos brinda Mac Iver: "Entendemos por instituciones las formas y condiciones de procedimiento establecidas que caracterizan la actividad de un grupo"[39].

En esta definición se hace referencia a los grupos o asociaciones. Mac Iver tiene especial interés en distinguir *instituciones* de *asociaciones* y en mostrar, a la vez, su mutua vinculación. Normalmente, las asociaciones entre humanos crean unas reglas y procedimientos para resolver sus asuntos y necesidades. En ellas, por tanto, se dan instituciones. De ahí que a veces se confundan éstas con aquéllas.
Sin embargo, es importante distinguirlas teóricamente.

Las asociaciones dicen relación a grupos organizados. Ejemplos de asociaciones son, por ejemplo, la familia, la empresa mercantil, un partido político, un sindicato, la Iglesia, y en lo que a nuestro asunto concierne un colegio o una academia. Se trata siempre de un grupo de personas que están asociadas en vista a conseguir un fin. Así, un colegio como asociación es una reunión de profesores y estudiantes.

Las instituciones, por el contrario se desligan, en cierto sentido de las personas y de las relaciones personales y constituyen esencialmente, las formas de proceder de los miembros de dicha asociación, es decir, el sistema de normas y relaciones sociales. Así el colegio visto como institución ya no se compone de alumnos y profesores, sino de un determinado sistema educativo en el que se fijan las metas de la educación, los "pensa", métodos de evaluación, derechos de inscripción, normas de ingreso, roles de estudiantes y profesores, normas administrativas, etc.

Este sistema de normas y relaciones sociales se justifica ante una necesidad colectiva fundamental, que trata la institución de satisfacer: en este caso, la educación de los jóvenes, su preparación y capacitación cívico-profesional.

Las instituciones han sido establecidas unas veces por las comunidades, y otras, por las asociaciones.

Esta caracterización sumaria de lo que es institución, se puede completar con los rasgos señalados por F. Stuart Chapin: modelos de actitud y comportamiento como solidaridad, lealtad, cooperación; rasgos culturales utilitarios (edificio o sede, laboratorios, etc.); código de normas orales o escritas; documentos que recogen las experiencias y resultados: revistas, memorias, periódicos, etc.[40].

39 R.M. Mac Iver y Ch. H. Page. *Sociología*. Madrid. Editorial Tecnos 3ra. reimp. 1972, pág. 16.

40 Don Martindale. *La teoría sociológica. Naturaleza y Escuelas*. Madrid, Edit. Aguilar, 1971, pág. 393.

Todos los elementos de estas caracterizaciones se dan en las Academias científicas que luego vamos a estudiar.

El segundo término que empleamos es el de *institucionalización*.

Lo podemos definir como un proceso en virtud del cual las pautas estandarizadas se desarrollan e integran en la estructura normativa de la sociedad[41]. Se pasa del plano de la existencia de ciertas 'mores' al plano de la 'organización' que se integra en el sistema social de normas.

Aclarados estos términos estamos ya en disposición de hacernos cargo del proceso cultural que culmina en la constitución de las Academias científicas cuyos ejemplos más notables e importantes fueron las de Londres y la de París con las que Leibniz estuvo directa y persónalmente vinculado.

5. *Las Academias científicas*

Las Academias científicas, como todos los fenómenos decisivos de la historia cultural, no surgen de un modo repentino, sin un proceso cuyos comienzos se pueden datar desde muchas centurias en el pasado.

Pero se puede decir, para dar un breve bosquejo de las mismas, que dichas Academias tienen un claro e inmediato antecedente, por lo que se refiere a la de Londres y París, en pequeñas y reducidas *asociaciones*, formadas espontáneamente por grupos de hombres interesados en la ciencia y en sus aplicaciones, conscientes de los problemas que planteaban la navegación, la balística, la hidráulica y la mecánica en general.

La Sociedad de Londres tuvo su antecedente inmediato en una asociación informal de simpatizantes de Francis Bacon que comenzaron a reunirse semanalmente en Londres hacia 1645 para discutir problemas sobre la Naturaleza.

Vinculado a este grupo que enseguida estudiaremos, estaba el famoso *Gresham College* fundado ya en 1579 por voluntad de Sir Thomas Gresham (1519-79) que fue uno de los grandes comerciantes de Londres, y, fundador de la Royal Exchance. Perteneciente, por tanto, a la alta burguesía mercantil, tuvo conciencia del valor de la nueva ciencia.

La orientación general de este centro de formación fue principalmente científica. De sus siete profesores, dos de ellos tenían a su cargo las ciencias de geometría y de astronomía, encomendándose a este último la enseñanza de los instrumentos de navegación para la capacitación de marinos. El interés primario era fundar y desarrollar la navegación astronómica en base a los estudios de astronomía y de matemáticas.

41 P.B. Horton y L. Horton. *Introducción a la Sociología.* Buenos Aires, El Ateneo, 1973, pág. 49.

Además de este acuciante problema de la situación de los navíos en los Océanos, los temas de balística y de las artes mecánicas, junto con las investigaciones de anatomía y fisiología, acaparaban la atención del Gresham College.

Aparte de su función como centro de educación científica, de acuerdo a las necesidades de la época mercantilista, hay que recordar que este Colegio sirvió de albergue a los fundadores de la Royal Society, que utilizaron sus salones para sus primeras reuniones, y prestó más tarde a la Academia londinense algunos de sus prestigiosos profesores[42].

El mencionado grupo al que antes nos referimos, denominado Colegio filosófico, estaba encabezado por John Wilkins que fue su animador principal y llegó a ser después Obispo de Chester. Entre sus insignes miembros, figuraban además John Wallis eminente matemático; un grupo de científicos como Jonathan Goddard, George Ent y Christopher Merret; Samuel Foster, profesor de Astronomía del Gresham College y Teodoro Haak, un alemán que propuso las reuniones semanales del grupo.

El espíritu científico que predominaba en estos investigadores les llevó a la exclusión de temas teológicos y políticos, tan en boga en aquellos tiempos tumultuosos, para asegurar la unión, colaboración y espíritu comunitario de la asociación[43].

Desde el año 1642, Carlos I había convertido a Oxford en su capital y había expulsado de sus puestos a varios puritanos y parlamentarios universitarios. Oxford cayó en poder de Cronwell en 1645 y dos años más tarde fue establecida una comisión parlamentaria para reformar la Universidad, expulsando a los monárquicos y sustituyéndolos por parlamentarios. El grupo londinense de científicos que componían el Colegio filosófico fue llamado enseguida a ocupar los puestos vacantes.

Con el traslado de Wallis, Wilkins y Goddard a Oxford alrededor de 1649, la asociación se dividió en dos secciones: la de Londres y la Oxford. Esta última fue incrementada con William Petty, uno de los fundadores de la estadística moderna y con el famoso químico Robert Boyle. Pero hacia 1690 esta sociedad de Oxford se disolvió.

La rama, sin embargo, de Londres, tuvo por el contrario un gran florecimiento.

Entre sus miembros figuraban Christopher Wren, Laurence Rooke, Sir Robert Moray. Estos científicos adoptaron la costumbre de reunirse en los salones del Gresham College, como antes decíamos. En 1658 estas reuniones se vieron interrumpidas, por algún tiempo, debido a trastornos políticos de la época tumultuosa por la que se atravesaba.

42 John D. Bernal, o.c. pág. 319-320.

43 A. Wolf. *A History of Science, technology and philosophy in the* 16 th and 17 th Centuries. Gloucester, Mass. Peter Smith, 1969, vol. I pág. 59.

Con la restauración de Carlos II este grupo reanudó sus sesiones en el mismo Gresham College. Al mismo tiempo elaboraron en 1660 un plan para el establecimiento de una definitiva sociedad dedicada a la prosecución del conocimiento experimental[44]. Dos años más tarde, Carlos II sellaba la carta que incorporaba formalmente la institución como La Real Sociedad para el Fomento del Saber Natural.

Los primeros secretarios adjuntos fueron John Wilkins y Henry Oldenburg, este último hombre de negocios con extensas relaciones en el Continente, y amigo de Spinoza[45], siendo nombrado presidente o Curator, Robert Hooke.

En la creación de esta Academia científica, sus miembros, fervorosos simpatizantes de F. Bacon se inspiraron en su espíritu y en los grandes lineamientos de su programa. Eran conscientes de que estaban llevando a la realidad el sueño baconiano. Los estatutos redactados por Robert Hook lo dejan traslucir.

"El propósito y objetivo de la Real Sociedad es fomentar el conocimiento de las cosas naturales y de todas las artes útiles, manufacturas, prácticas mecánicas, máquinas e invenciones por medio de experimentos (sin mezclar en ello la metafísica, la moral, la política, la gramática, la retórica o la lógica). Tratar de recuperar aquellas artes e invenciones que ahora se han perdido. Examinar todos los sistemas, teorías, principios, hipótesis, elementos, historias y experimentos de cosas naturales, matemáticas y mecánicas, inventadas, registradas o practicadas por algún autor importante, antiguo o moderno. Para compilar un sistema completo de sólida filosofía explicando todos los fenómenos producidos por la naturaleza o el arte y realizando un registro racional de las causas de las cosas"[46].

La organización de las reuniones estaba centrada en la presentación de los experimentos realizados por sus miembros con el análisis y la discusión que las mismas pudieran ofrecer.

Las actividades se dividieron en ocho comités. Uno de ellos, el comité para la Historia del Comercio y la Industria se interesó en los principios de la tecnología industrial y se presentaron reportes sobre los procedimientos empleados en la industria de construcción naval, de minas, y manufactura textil. Había también, siguiendo los planes de Bacon, un Comité encargado de coleccionar informaciones sobre los fenómenos naturales y otro para promover las invenciones mecánicas. También existían comités de astronomía, anatomía y química, etc.

Este vasto programa de investigación nació sin embargo en la penuria de medios oficiales. Tuvieron que pasar varios años antes de que la Academia, que no disfrutaba de subvenciones reales como la de París, pudiese disponer de un adecuado laboratorio.

Es importante señalar, como un rasgo característico de las instituciones, que la Academia dispuso en 1665 de una publicación importante: La *Philosophical*

44 A. Wolf o.c. pág. 60.
45 Ibídem.
46 St. F. Mason, o.c. pág. 299.

Transactions of the Royal Society. Su contenido incluía resúmenes de la actividad de la Sociedad, reportes científicos enviados del extranjero y controversias con investigadores de otros países, con reseñas, finalmente de las publicaciones editadas en el exterior[47].

La importancia de la Real Sociedad de Londres hay que medirla más bien que por sus contribuciones, por su labor en el proceso de institucionalización de la ciencia.

El espíritu de colaboración, la división de trabajo, la apelación a la experiencia y a la libre discusión de los temas, la intersubjetividad, la creación de laboratorios, bibliotecas y publicaciones periódicas fueron a partir de este momento cánones y normas que interiorizó la sociedad en el plano científico.

En 1671 la presidencia de la Sociedad recayó en la figura egregia de Isaac Newton que imprimió a la institución una orientación más bien galileana[48] por la combinación de las matemáticas con la experiencia.

Es interesante observar, cómo una de las características de la Real Sociedad de Londres, el predominio en número de los miembros de la misma de orientación puritana. El hecho de que más del 60% de la lista de individuos que forman la Sociedad en 1663 fuesen puritanos, siendo éstos una minoría realmente pequeña en la población inglesa, no deja de ser un dato curioso y sorprendente[49].

Alphonse de Candolle, en 1873 observó en su Historia de las ciencias y de los sabios que de los noventa y dos miembros elegidos para la Academia de Ciencias de París durante los dos siglos desde su fundación en 1666, unos setenta y uno habían sido de religión protestante y dieciséis católicos, en tanto que los cinco restantes eran de credo indeterminado o judaico[49 bis].

Sobre el predominio de puritanos en la Real Sociedad; Robert Merton se plantea la cuestión sociológica de la relación entre el puritanismo y la ciencia inglesa en el siglo XVII, siguiendo las orientaciones y estudios de Max Weber[50].

Figuras tan prominentes de la institución como John Wilkins, John Wallis, Robert Boyle, Sir William Petty y Theodore Haak, fueron hombres de profunda religiosidad.

"Difícilmente puede ser una circunstancia fortuita el hecho de que las principales figuras de este grupo nuclear fuesen teólogos y hombres eminentemente religiosos. Es completamente cierto que los espíritus que crearon la Sociedad estaban marcadamente influidos por concepciones puritanas"[51].

47 A. Wolf, o.c. pág. 63.

48 St. F. Mason, o.c. pág. 299.

49 Robert K. Merton. *Teoría y estructura sociales*. México. F.C.E. 3ra. reimp. 1972, '*Puritanismo, pietismo y ciencia*', pág. 574-75.

49 Bis St. F. Mason, o.c. pág. 201.

50 Max Weber. *La ética protestante y el espíritu del capitalismo*. Barcelona, Ed. Península, 3ra. ed. 1975.

51 Robert K. Merton. o.c. pág. 574.

La tesis que mantiene R. Merton es que la ética puritana como expresión típica ideal de las actitudes hacia los valores fundamentales en el protestantismo ascético en general, canalizó los intereses de los ingleses del siglo XVII de suerte que constituyesen elemento importante en el cultivo de la ciencia[52]. Los arraigados intereses religiosos de la época exigían, en sus inexcusables implicaciones, el estudio sistemático, racional y empírico de la naturaleza para glorificar a Dios en sus obras y para el control del mundo corrompido.

Es decir, existía una adecuación entre los principios del ethos puritano y los principios básicos de la ciencia, de tal modo que ésta fue reconocida, admirada y practicada con vocación religiosa por los hombres de orientación puritana.

Esta adecuación de principios y actitudes se podría describir en los siguientes puntos:

1) El estudio de la naturaleza, objeto de la nueva orientación del saber era asimismo, para el puritanismo, un modo de expresar la religiosidad: se trataba en efecto de descubrir las leyes de la naturaleza y en ellas la gloria de Dios, su poder y sabiduría infinitas, y por otra parte el bien del hombre, dispuesto así por Dios, en el aprovechamiento de ese conocimiento de las cosas naturales. Así pensaban Boyle y Wilkins.

2) La Reforma había roto con la tradición del magisterio eclesiástico que interfería en el contacto directo de la "sola fides". Las Escrituras, eran las solas fuentes a consultar.

La ciencia a su vez, se apartaba de la tradición erudita, de las especulaciones escolásticas, para dirigirse al libro abierto de la Naturaleza. Este parangón fue subrayado por el historiador de la Sociedad Thomas Sprat[53].

3) La Reforma había trasladado de la Iglesia al individuo el peso de la salvación individual. Pero esta responsabilidad individual exigía el éxito en los asuntos prácticos de la vida en este mundo. La señal de la predestinación –el misterio agobiante para los calvinistas– era una actividad mundana, ejercida con entera dedicación, disciplina y ascetismo.

Era una exigencia religiosa el tratar con éxito los asuntos prácticos de la vida. Y por tanto, para lograr este éxito, prenda segura de predestinación, había que tomar contacto directo con las cosas, y erigir, por tanto, en principio fundamental, el empirismo. Un empirismo vinculado a la racionalidad. "Con el protestantismo, la religión impuso la obligación de concentrarse intensamente en la actividad secular, dando especial importancia a la experiencia y a la razón como bases para la acción y la creencia"[54].

Ahora bien, la combinación de empirismo y racionalismo eran las bases de la ciencia físico-matemática que culminó con Newton.

52 Ibídem, pág. 565.
53 St. F. Mason, o.c. pág. 202.
54 R.K. Merton. o.c. pág. 572.

Aquí podemos encontrar uno de los momentos del viraje, de la transformación valorativa de las ciencias que pasan de sirvientas bajo la jurisdicción de la ciencia suprema que es la teología, a ciencias que constituyen un saber autónomo. No se rompe, todavía la vinculación a la teología, mejor, a la doctrina sagrada (la revelación), sino que se aúnan revelación y ciencia, pero privando el saber sobre las cosas que están sometidas a la razón.

4) La ciencia exige una dedicación, disciplina y ascetismo por parte del investigador. Estas virtudes eran precisamente las que exaltó y fomentó el puritanismo.

R. Merton resume muy bien sus indagaciones sobre el tema con las siguientes palabras: "La estimación positiva por parte de los protestantes de un utilitarismo muy poco disimulado, de intereses intramundanos, de un empirismo total, de derecho y aún del deber del libre examen, y de la discusión individual explícita de las autoridades erán afines con los mismos valores que se encuentran en la ciencia moderna. Y quizás por encima de todo está la importancia del impulso ascético activo que exigía el estudio de la naturaleza para poder controlarla. De ahí que los dos campos estuvieran bien unificados y, en lo esencial, se apoyasen mutuamente no sólo en la Inglaterra del siglo XVII sino en otros tiempos y lugares"[55].

No sólo, pues, el campo de los problemas investigados por los científicos ingleses del siglo XVII estaba apreciablemente influido por la estructura socio-económica de la época, como el mismo Merton analiza en su capítulo XIX: *Ciencia y Economía en la Inglaterra del siglo XVII*[56], sino que la religión protestante ejerció una gran influencia en el desarrollo de la ciencia y sobre todo en su institucionalización ya que el espíritu científico que se organizó bajo pautas comunes fue en parte, una expresión del ethos puritano.

Digamos, ahora algunas palabras de la Academia de Ciencias de París. A semejanza de su homóloga de Londres, la Academia científica de París tuvo su antecedente inmediato en un grupo o asociación de científicos que se reunían en la celda del franciscano Marino Mersenne. Este grupo integraba a hombres como Descartes, Pascal, Gassendi y Fermat.

Las reuniones versaban sobre problemas científicos, investigaciones de tipo experimental y matemático alternando con discusiones de tipo filosófico. El P. Mersenne sirvió además de enlace y centro corresponsal de diversos pensadores franceses y de otros países.

Las reuniones en la celda del franciscano se hicieron más tarde en las casas de Montmort y de Thevonot.

Bajo la sugerencia de Charles Pierrault, Colbert propuso a Luis XIV el establecimiento de una Academia científica, la cual fue aprobada por el Rey en 1666, cuatro años después de instituirse la Real Sociedad de Londres.

55 Ibídem, pág. 584-585.
56 Ibídem, pág. 596-615.

Las investigaciones de la Academia parisina estaban divididas en dos grandes grupos: el de matemáticas (que incluía la mecánica y la astronomía) y la física (que abarcaba la química, botánica, anatomía y fisiología).

Los académicos se reunían en un salón de la Biblioteca real con un laboratorio adjunto y llevaban sus investigaciones en común, dedicando sus sesiones a la física y a la matemática, alternativamente[57].

La diferencia entre estas dos academias responde al diferente tipo de mercantilismo inglés y francés. La Sociedad londinense se apoyaba en los recursos de sus propios miembros, algunos de los cuales eran grandes financieros y comerciantes. Lo que necesitaban era simplemente la aprobación real de los estatutos. Carlos II no ofreció ninguna subvención a este organismo.

En cambio, la Academia parisiense, creada por el voluntarismo estatal, gozaba de una generosa ayuda financiera por parte del Estado.

Esto permitió que se dispusiera de un instrumental adecuado y que se reclutaran científicos del extranjero. Una de las mejores adquisiciones fue la del holandés Ch. Huyghens que tanta influencia iba a ejercer sobre el joven Leibniz. Junto a esta figura académica hay que señalar también la del italiano Cassini que se hizo cargo del Observatorio de París y el danés Roemer famoso óptico.

En torno al Observatorio de París se hicieron progresos notables en relación al perfeccionamiento de instrumentos de observación astronómica como los presentados por Picard y Auzout.

Se hicieron también expediciones científicas. Una de las más notables fue la de Jean Richer en 1672, el año que Leibniz llega a París. Esta expedición dirigida a Cayena tenía el propósito de observar una oposición del planeta Marte con miras a la navegación. Entre otras medidas se obtuvieron el paralaje del planeta Marte y las dimensiones gigantescas del Sol y de los planetas mayores junto con la escala inconmensurable del sistema solar[58].

Es en este mundo científico de las Academias, en esta época gloriosa de la institucionalización de la ciencia donde hace su aparición el joven Leibniz. El fruto de su contacto personal con estos organismos de la ciencia va a ser el descubrimiento de su Cálculo Diferencial.

57 A. Wolf. o.c. pág. 63-64.

58 W.C. Dampier. *Historia de la ciencia y sus relaciones con la filosofía y la religión*. Madrid. Edit. Tecnos, 1972, pág. 177.

CAPITULO VI

EL DESCUBRIMIENTO LEIBNIZIANO DEL CALCULO

1. *Pascal y el triángulo característico*

La estancia parisina de Leibniz le deparó el descubrimiento del Cálculo como fruto espléndido de la ciencia institucionalizada. La enorme importancia de las ecuaciones diferenciales, de las que Leibniz sentó las primeras bases se puede vislumbrar si advertimos que hoy día "los cálculos que requiere la construcción de maquinaria eléctrica o de dispositivos radiotécnicos, el cálculo de trayectorias de proyectiles, la investigación de la estabilidad de aeronaves en vuelo o del curso de una reacción química, todo ello depende de la solución de ecuaciones diferenciales"[1].

A pesar de las deficiencias, oscuridades y limitaciones del cálculo leibniziano (compartidas asimismo por el de Newton) que tendremos ocasión de examinar, el descubrimiento por parte de Leibniz de esta rama de la matemática no deja de ser una proeza intelectual digna de recordarse.

En cuanto a la trayectoria que conduce a Leibniz al descubrimiento de su Cálculo, nos serviremos como fuente de información y texto básico de la *Historia et origo calculi differentialis*, obra escrita por Leibniz en los últimos años de su vida, en donde el pensador de Hannover trata de reivindicar el mérito y la originalidad de su descubrimiento frente a las acusaciones de plagio que venían de los secuaces de Newton, narrándonos biográficamente la génesis de dicho descubrimiento, esto es, las fases por las que atravesó su mente, desde los años adolescentes, hasta el año 1676[2].

Siguiendo las notas biográficas de Leibniz, nos cuenta éste que al llegar a París, en 1672, conoció al "egregio varón Cristian Huyghens por cuyo ejemplo y con-

1 I.G. Petrovski, 'Ecuaciones diferenciales ordinarias' en A.D. Aleksandrov. *Las matemáticas: su contenido, métodos y significado*, vol. 1 Madrid Alianza, 1973, pág. 374.

2 Leibniz. *Historia et origo calculi differentialis*.Gerhardt Math. V, 392-410.

sejos se dedicó a la matemática superior". Huyghens dirigirá su formación matemática.

El mismo Leibniz reconoce las deficiencias fundamentales de sus conocimientos matemáticos. Nos confiesa: "Sin embargo, la aplicación de las verdades numéricas a la Geometría y la consideración de las series infinitas eran desconocidas para nuestro adolescente por aquel entonces, y se contentaba con observar gustosamente aquellas cosas en las series numéricas. No tenía conocimiento alguno de la Geometría, a excepción de las reglas más corrientes, no habiéndose fijado en Euclides atendiendo a estudios completamente distintos. Sólo conocía la obra de Vicente Leotaud sobre las líneas curvas y la Geometría de los indivisibles de Cavalleri, pero todavía no se había sumergido en la matemática profunda"[3].

Es decir, Leibniz, sintió desde muchacho una vocación por la Aritmética, de la que resultó ser un virtuoso. Pero estaba ajeno a la importancia que iba cobrando la geometría, a partir, sobre todo, de la geometría analítica de Descartes. En esta rama de las matemáticas se planteaban los problemas de las tangentes y de las cuadraturas en torno a los cuales giraban las cuestiones más candentes de la época. Nuestro autor se vio abocado a informarse de estos problemas y cuestiones. Sin embargo, su inclinación por la aritmetización se hizo patente a través de sus exposiciones posteriores. Así le veremos dar las reglas de suma, resta, multiplicación, división, etc. en su cálculo diferencial.

En un momento importante: "Is tunc forte suum *de Pendulis* opus edebat"[4], "daba la casualidad que éste (Huyghens) publicaba por aquel entonces su obra sobre el péndulo". Se trataba, en efecto, de la preocupación de este gran físico por crear un cronómetro más preciso e idóneo para los barcos en vista de resolver la longitud por medio de la diferencia exacta entre la hora de un meridiano O como el de Grenwich y el meridiano en que se encontraba el navío. El reloj de péndulo perfeccionado por Huyghens ofrecía ciertas perspectivas de éxito.

En sus conversaciones con el físico holandés, Leibniz comprendió su ignorancia acerca de la naturaleza del centro de gravedad y el modo de indagarlo, y un tanto avergonzado, se decidió a estudiar esta cuestión. Pero no pudo dedicarse a estos estudios porque enseguida tuvo que partir para Inglaterra en la comitiva del legado de Maguncia. Allí estuvo unas pocas semanas y conoció a Enrique Oldenburg, secretario de la Real Sociedad de Londres quien le introdujo en esta famosa institución. Conoció, en esta ocasión a los destacados miembros de la Sociedad, Robert Boyle eminente químico y al matemático Pell quien al conversar con el joven Leibniz sobre series numéricas, le dijo que sus observaciones no eran nuevas, pues ya Nicolás Mercator había descubierto que las diferencias de las potencias numéricas, al progresar se desvanecen, lo cual le movió a nuestro autor a consultar la obra de Mercator[5].

3 Ibídem, pág. 398.
4 Ibídem, pág. 398.
5 Ibídem, pág. 398-399.

Estando todavía en Londres recibió la noticia de que su protector, el Elector de Maguncia Juan Felipe había fallecido.

La misión diplomática retornaba a París (había viajado a la capital inglesa en enero y regresaba en marzo).

A pesar del disgusto y contratiempo del deceso del Elector, Leibniz sin embargo se sintió más libre para dedicarse a sus estudios de física y matemática. Y así, bajo la exhortación del mismo Huyghens, comenzó a estudiar el Análisis de Descartes y a introducirse en la geometría de las cuadraturas estudiando a Honrato Febri, Gregorio de San Vicente y sobre todo el *Tratado de los senos del cuarto de círculo* de Dettonville (Pascal).

Al leer este opúsculo pascaliano *lux ei subito oborta est*[6], le vino de repente la luz. Podemos decir que esta iluminación constituye la intuición fundamental del cálculo de Leibniz.

Debido a la importancia de esta intuición, vamos a detenernos un poco en la cuestión del tema pascaliano.

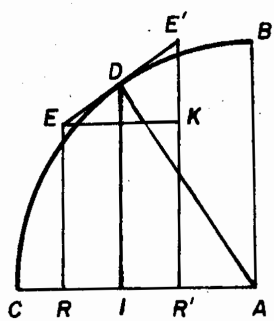

FIG. 2.

Sea ABC un cuarto de círculo, cuyo radio AB sea considerado como eje, y el radio perpendicular AC como la base; sea D un punto cualquiera en el arco, desde el cual trazamos el seno DI sobre el radio AC; sea la tangente DE en la cual se tomen los puntos E donde se prefiera, desde los cuales trazamos las perpendiculares ER sobre el radio AC.

"Afirmo –dice Pascal– que el rectángulo formado por el seno DI y la tangente EE' es igual al rectángulo formado por la porción de la base (encerrada entre las paralelas) y el radio AB".

En efecto, si advertimos que los triángulos DIA y EKE' son semejantes, podremos establecer que DI/ DA = EK/ EE', de donde DI. EE' = DA . EK.

6 Ibídem, pág. 399. Ver también la carta de Leibniz al marqués de l'Hospital, Gerhardt, Math. II, pág. 259.

Sustituyendo DA por su equivalente AB, y EK por su equivalente RR' tenemos entonces: DI.EE' = AB.RR'.

De ahí que la suma de los senos de un arco de cuarto de círculo es igual a la porción de la base comprendida entre los senos extremos, multiplicada por el radio [7].

El centro de interés de la mirada de Leibniz está en el triángulo EKE'. Al considerar que los puntos EE' pueden ser tomados a voluntad como señala Pascal –los lados de dicho triángulo pueden ser tan pequeños como uno quiera. Es decir, que partiendo de un triángulo que tiene lados en una cantidad asignable podemos concebirlo cada vez más reducido, con lados que constituyen cantidades inasignables. Este triángulo inasignable, es, sin embargo, enteramente semejante al triángulo IAD que permanece invariable, mientras el triángulo EKE' va reduciendo progresivamente sus proporciones.

"Al contrario –nos dice Brunchsvicg, explicando este momento crítico de las matemáticas– Leibniz considera este triángulo EKE' por sí mismo. Habiéndose tomado los puntos EE' *ôu l'on voudra*, los lados del triángulo pueden llegar a ser tan pequeños como se quiera; pero aunque lleguen a ser *inasignables* permanecen perfectamente determinados por la semejanza del triángulo *inasignable* EKE' con el triángulo *asignable* DIA. Ahora bien, esta determinación subsistirá fuera del caso particularmente simple en que la normal al punto de contacto es un radio del círculo. Basta explicitar los elementos de los dos triángulos, inasignable y asignable para darse cuenta lo que había quedado oculto a Pascal, que tenía cerrados los ojos por una especie de fatalidad: la posibilidad de tratar como un elemento característico de la curva el triángulo constituido por una parte infinitamente pequeña de la tangente y las porciones infinitamente pequeñas de las paralelas a la abcisa y ordenada. La consideración del "triángulo característico" es el primer paso dado por Leibniz fuera del método corriente de los indivisibles. Desde el punto de vista teórico. esta consideración permite establecer la homogeneidad, rota en apariencia por los supuestos de Cavalieri, entre los elementos de las sumas y las sumas ellas mismas; la superficie estará compuesta por pequeñas superficies, como la línea, de pequeñas líneas o el cuerpo de corpúsculos.

Al mismo tiempo se introduce en el dominio de lo infinitamente pequeña la notación de relación; ahora bien, mientras que la imagen del indivisible es incapaz de exactitud, la forma de semejanza, no estando ligada en absoluto a tal o cual magnitud dada, se conserva en el pasaje de lo finito a lo infinitesimal, como ella subsistía en el pasaje de lo racional a lo irracional [8].

La idea fundamental del método de los indivisibles de Cavalieri, que conocía Leibniz, consistía en considerar la línea como una suma infinita de puntos; la super-

7 Pascal. Oeuvres completes. París. Gallimard. La Plejade, p. 275.

8 L. Brunschvicg. *Les étapes de la Philosophie Mathématique.* París A. Blanchard, 1972, pág. 173-174.

ficie, como una suma infinita de líneas, y el sólido como una suma infinita de superficies. Así por ejemplo, el volumen del cono se podía concebir como la suma infinita de superficies circulares que van decreciendo desde la base. Y la superficie del cuarto de círculo, como la suma de todos los senos –desde cero hasta la unidad– o sea la suma de las líneas perpendiculares al eje Ox.

Pero el fallo de este método se detecta fácilmente si consideramos la parte de la cicloide o de la sinusoide que corresponden al cuarto del círculo. Estas porciones de superficie, equivaldrían, según el método de Cavalieri, a la suma de todos los senos comprendidos entre cero y la unidad, y por tanto dichas partes de la cicloide y de la sinusoide serían iguales a la del círculo. Lo cual es falso.

La razón de ello consiste en que la pendiente a dichas curvas en cada punto no es igual, es decir, que la tangente trigonométrica de la tangente para un mismo punto de la ordenada en cada una de dichas figuras, no es la misma.

Este fallo básico es el que Leibniz subsana.

En el comentario que, con su habitual claridad, hace J. Moreau al pasaje que estamos estudiando, este gran conocedor de Leibniz nos dice:

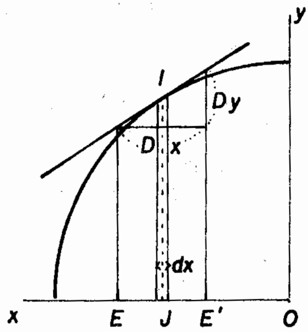

FIG. 3.

"El triángulo en cuestión está delimitado por la tangente en el punto Y y los segmentos de recta Dx, Dy correspondiendo respectivamente a una porción de la abcisa y a una porción de la ordenada. Ahora bien, Leibniz señala que si se hace decrecer la distancia Dx hasta el extremo de que las ordenadas E E' tiendan a coincidir con la ordenada I J, el segmento Dy decrece correlativamente, de tal modo que el triángulo considerado permanece siempre semejante a sí mismo. La relación Dy /Dx conserva un valor constante, que es característica de la pendiente de la curva en el punto I. La distancia Dx puede decrecer tanto como se quiera, hasta el punto de que la superficie comprendida entre las ordenadas en E y E' se confunda con la línea I J, y el triángulo considerado, con el punto I. Este triángulo permanece siempre caracterizado por la dirección de la tangente a la curva en I, dirección cuya expresión analítica será dy / dx, designando los símbolos dy dx el incremento infinitesimal de la abcisa y de la ordenada, una diferencia que no es ya asignable, como Dy y Dx, sino inasignable, pudiendo llegar a ser tan pequeña como se quiera".

"Entonces por esta definición de la diferencia infinitesimal y la elección de un símbolo para designarla, se hace posible formar una expresión precisa de una suma infinita, lo que no permitía la geometría de los indivisibles. Con los indivisibles de Cavalieri no se podían formar sumas, porque eran como ceros de extensión, y por ello mismo, indiferenciados; tampoco la suma de los senos comprendidos en el cuarto de círculo no se podían distinguir en su expresión de la suma, de los senos comprendidos en las porciones correspondientes de la cicloide y de la sinusoide. Pero desde el punto de vista intuido por Leibniz, la superficie no es ya una yuxtaposición de líneas sin espesor; es una yuxtaposición de superficies tan pequeñas como se quiera, de diferencias infinitesimales de superficie, teniendo como base un incremento infinitesimal (dx) de la abcisa, y por altura, la ordenada (y) correspondiente. Ahora bien, no son en absoluto los mismos incrementos infinitesimales, las mismas superficies infinitesimales las que constituyen el área del cuarto del círculo y el de la cicloide; estas curvas no crecen, en efecto, siguiendo una misma ley. Así, las diferencias infinitesimales de las que debemos hacer la suma no son absolutamente indeterminadas, como lo eran los indivisibles. Estos inifinitamente pequeños no los concebimos, dice Leibniz, como ceros simples y absolutos, sino como ceros relativos... es decir, como cantidades evanescentes, que tienden hacia cero, pero que conservan la marca de lo que eran, antes de desvanecerse (Math. IV, 218)"[9].

Antes de terminar con este tema queremos exponer un texto Leibniz, poco conocido, a pesar de constituir una de las páginas extremadamente diáfanas que escasean en su literatura matemática, a veces demasiado densa y sintética. Se trata del opúsculo que lleva el título de *Mathesis Universalis (Matemática Universal)*, manuscrito recogido por Gerhard de la Biblioteca de Hannover[10].

En este texto leibniziano, se explica claramente el "triángulo característico y la relación de este triángulo *inasignable* a otro *asignable*, relación de semejanza que funda la relación entre las cantidades inasibnables y las asignables en general, que constituye la base para el cálculo diferencial de Leibniz".

"Queda por añadir algo sobre la cantidad inasignable, ya sea ésta infinitamente grande o pequeña, por lo menos para tener algún conocimiento de ella, puesto que en su ocasión el resto será explicado".

"Supongamos que la recta TC sea secante de la curva ACC' en los puntos C y C' desde los cuales trazamos al eje AB las perpendiculares CB y C'B'. Desde C tracemos ahora la normal CD sobre B'C'. Es evidente que CD es la diferencia entre las abcisas AB' y AB; y análogamente que DC' es la diferencia entre las ordenadas B'C' y BC ".

9 Joseph Moreau. L'Univers leibnizien. París. E. Vitte, 1956, pág. 119-120.
10 Leibniz. Mathesis Universalis. G. Math. VII, pág. 49-76.

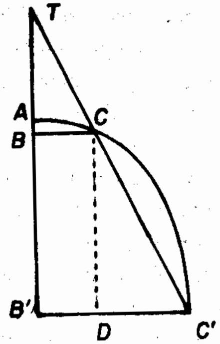

FIG. 4.

Igualmente, si la recta TC corta el eje en el punto de intersección T, es evidente que los triángulos TBC y CDC' son semejantes. Ahora bien, en caso de contacto, cuando la recta TC no es secante, sino tangente de la curva ACC', es decir, cuando los puntos C y C' coinciden o lo que es lo mismo, distan entre sí en un intervalo infinitamente pequeño, es evidente que el triángulo CDC' resulta inasignable ya que posee lados infinitamente pequeños, y que CD es el elemento de la abcisa y DC' es el elemento de la ordenada y CC', como en su lugar se aclarará, es el elemento de la curva; y especialmente que *este triángulo inasignable CDC' es semejante al triángulo asignable u ordinario TBC. Más aún, por medio de este triángulo inasignable, es decir, mediante el cociente de las cantidades inasignables CD y DC' –que nuestro cálculo diferencial designa por medio de las cantidades ordinarias o asignables, se halla el cociente de las cantidades asignables TB y BC, y por tanto, el modo de trazar la tangente TC* "[11].

2. *La reciprocidad de los problemas de las tangentes y de las cuadraturas*

Utilizando el triángulo característico, cuya importancia había descubierto al estudiar el tratado pascaliano, Leibniz realiza importantes averiguaciones.

Una de ellas, quizás la más importante consiste en establecer que el problema de las cuadraturas es el problema inverso de la tangente. Este es el gran mérito y la gran aportación de Leibniz.

Tenemos dos textos principales donde nuestro autor establece dicha reciprocidad: uno en la *Historia et origo calculi differentialis*; otro en la carta de Leibniz a de L'Hospital del 27 de noviembre de 1694.

11 Ibídem, pág. 75. (Los destacados son míos).

En el primer texto afirma nuestro autor: "Por tanto, dada una figura o curva a cuadrar, se buscará la curva cuyas subperpendiculares (subnormales) sean iguales a las ordenadas de la figura dada, y dicha curva será la cuadratriz (o función primitiva) de la curva dada. De este modo, deducimos las cuadraturas de las curvas *al problema inverso de las tangentes*"[12].

En el segundo texto, que es el que analizaremos nos cuenta Leibniz: "Reconociendo, pues, esta gran utilidad de las diferencias y viendo por el cálculo de Descartes que se puede expresar la ordenada de la curva, me di cuenta que encontrar la cuadratura o la suma de las ordenadas no es otra cosa que encontrar la ordenada de una cuadratriz cuya diferencial sea proporcional a la ordenada dada. *Pronto descubrí también que encontrar las tangentes no es otra cosa que diferenciar y hallar las cuadraturas no es otra cosa que sumar, con tal que se supongan las diferencias incomparablemente pequeñas*"[13].

Examinemos este último texto. Para orientarnos consideremos la curva C, en la que A es la posición de un móvil que la recorre, en el instante inicial, siendo su abcisa *a*

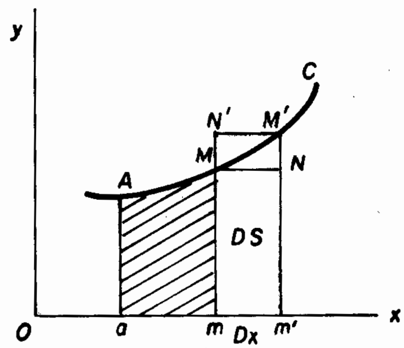

FIG. 5.

Cuando este móvil describe C, el área rayada, comprendida entre Aa,C,Mm y Ox está determinada en cada instante: se trata de una función de x.

Examinemos la posición de M' del móvil, un pequeño instante más tarde. Esta área recibe un incremento DS y la abcisa del móvil, un incremento Dx. Esta porción de área, DS, está comprendida entre las áreas de los rectángulos mm' NM y mm' M'N', o sea: mM.Dx y m'M'.Dx.

Por tanto, la relación DS/Dx (o sea, la derivada de la función representada por el área) está comprendida entre mM y m'M'. Por tanto, cuando M' tiende hacia M

12 *Historia et origo calculi differentialis*, G. Math. V, 400.

13 G. Math. II, pág. 260.

(y por lo mismo, Dx hacia cero) esta relación tiende hacia mM, esto es, hacia la ordenada de la curva f (x) que resulta así la derivada del área rayada en relación a x. Por consiguiente, el área comprendida entre una ordenada fija cualquiera Aa, la curva C, el eje x y una ordenada variable mM es una función de la abcisa de M que admite por derivada la ordenada de M. Se dice que esta función es una primitiva de f(x) y se anota con Leibniz: $\int_a^x f(x)\,dx$ para recordar que se la puede considerar como el límite de la suma de las áreas rectangulares inscritas en el contorno del área que ella mide cuando se aumenta indefinidamente el número de estos rectángulos haciendo tender su anchura a cero[14].

Vemos, por lo dicho, que el área bajo una curva es una variable que crece o decrece con x, es por tanto una función de x. Esta función la llama Leibniz *cuadratriz*, y equivale a lo que se acostumbra llamar *función primitiva de la curva.* Lo decisivo es que esta *función primitiva* o *cuadratriz* está vinculada estrechamente a la curva. Es decir, la ordenada de la curva es precisamente la derivada de la función *primitiva.* Para pasar, por tanto, de la curva f(x) al área, hay que encontrar otra función F(x) tal que: d F(x) / dx = f(x), o lo que es lo mismo, que d F(x) = f(x) dx, siendo el área o F(x) el límite de la suma de las diferenciales, o sea, de las f(x)dx.

De ahí se explica que Leibniz diga: "*Me di cuenta que encontrar las cuadraturas o sumas de las ordenadas* (hoy día diríamos, de los rectángulos f(x) dx), *no es otra cosa que encontrar la ordenada de una cuadratriz* (a saber, la *y* o función primitiva) *cuya diferencial es proporcional a la ordenada dada*". La diferencial de la cuadratriz, en efecto, es dF(x) = f(x).dx, es decir, está en razón directa de f(x). Así, pues, termina Leibniz, "pronto reconocí que encontrar las tangentes no es otra cosa que diferenciar y que hallar las cuadraturas no es otra cosa que sumar, con tal que se supongan las diferencias incomparablemente pequeñas".

Una explicación que da el mismo Leibniz se encuentra en el mencionado opúsculo *Mathesis Universalis*, que debido a su extraordinaria claridad me permito traer a colación.

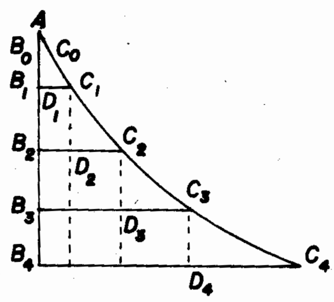

FIG. 6.

14 André Delachet. *L'Analyse mathématique*. París, PUF, 7ma. ed. 1977, pág. 28-29.

"Sea en efecto, la serie representada en la figura donde las abcisas AB a saber AB_1 AB_2 AB_3 etc. significan el lugar de la serie de los números naturales; y las ordenadas BC como B_1C_1 B_2C_2 B_3C_3 etc., significan los términos mismos de la serie".

Llamemos ahora a cualquier AB con el nombre general de x y a cualquier ordenada correspondiente a x llamémosla *y*, de tal modo que si la x es AB_2 la *y* será B_2C_2. Supuesto esto, podemos ahora considerar ciertos incrementos o diferencias tanto en las abcisas próximas como en las ordenadas. Por ejemplo: la diferencia entre las dos abcisas próximas AB_1 y AB_2 es B_1B_2 o sea, C_1D_2; y la diferencia entre las dos ordenadas próximas B_1 C_1 y B_2C_2 será D_2C_2. Análogamente, la diferencia entre las otras dos abcisas próximas AB_3 AB_4 es B_3B_4, es decir, C_3D_4 y la diferencia entre las otras dos ordenadas próximas (correspondientes a aquéllas) es decir entre B_3C_3 y B_4C_4 es D_4C_4.

"Así como llamamos *x* a cualquier abcisa como AB_1 AB_2 AB_3 AB_4, y llamamos *y* a cualquier ordenada como B_1C_1 B_2C_2 B_3C_3 B_4C_4, así también, a cualquier incremento o elemento de la abcisa como B_1B_2 B_2B_3 B_3B_4 lo llamaremos en general *dx*, esto es, la diferencia entre las próximas *x*. Del mismo modo, cualquier elemento o incremento de la ordenada como D_1C_1 D_2C_2 D_3C_3 D_4C_4 lo llamaremos en general *dy*, esto es, diferencia de dos próximas *y* ".

"Empleamos también una notación para las sumas; pues si a cualquiera de estas diferencias D_1C_1 D_2C_2 D_3C_3 D_4C_4 la llamáramos *v*, a la suma de todas ellas (a saber, de $D_1C_1 + D_2C_2 + D_3C_3 + D_4C_4$) o sea B_4C_4, yo la llamo, para abreviar $\int v$. De ahí resulta que así como la adición y sustración son recíprocas al igual que la multiplicación y división, la potencia y la raíz, así son recíprocas entre sí las sumas y diferencias. Pues en la figura precedente, a cualquiera de las mencionadas D_1C_1 D_2C_2 D_3C_3 D_4C_4 las hemos llamado *v*, de modo que *v* sea DC; pero a las mismas también las hemos llamado *dy* refiriéndonos a las mismas *y*, es decir, a BC, de las cuales son incrementos.

Tenemos, por tanto, que $dy = v$; y viceversa, que $\int v = y$.

Porque la suma de todas las *v* esto es, de todas las DC, tomadas desde el comienzo, equivalen a la última *y* ($D_1C_1 + D_2C_2 + D_2C_3 + D_4C_4 = B_4C_4$). Por tanto, ya que $\int v = y$, y $v = dy$, resulta $\int \bar{d}y = y$, esto es, la suma de las diferencias entre las y da el mismo término $\underline{y}$; exactamente como en las potencias y raíces $\sqrt{3^2} = 3$ "[15].

Ahora bien, como las mismas DC, o sea las *v* o *dy* tienen, al igual que las *y* sus incrementos y también sus diferencias, surgen de ello diferencias de las diferencias es decir *ddy*. Incluso se dan diferencias terceras etc., hasta donde sea necesario.

Adviértase, no obstante, que al cálculo sumatorio pertenecen principalmente las *cuadraturas de las figuras, mientras que al cálculo diferencial pertenecen las tan-*

15 G. Math VII, pág. 58-59.

gentes o direcciones, y al cálculo diferencio-diferencial, los ósculos o flexiones. De los cuales se darán oportunamente nociones más claras [16].

En este texto ejemplar nos habla Leibniz de los incrementos dx y dy o diferencias, que más exactamente habría que formularlas como Dx y Dy porque en el fondo se trata de cantidades asignables. La falta de claridad y precisión en distinguir entre Dx y dx por una parte y Dy, dy a saber entre incremento de una variable dependiente y diferencial de la misma es una de las lagunas del cálculo leibniziano de la cual tendremos ocasión de hablar.

La correlación entre el problema de las tangentes y el de las cuadraturas en virtud de la cual, el segundo es inverso del primero, le fue facilitada a Leibniz por la consideración de las series numéricas y de los números combinatorios que, desde su juventud, tanto atrajeron su atención.

En París, el conocimiento del triángulo aritmético de Pascal, esa "maquinaria" fabulosa de producir relaciones interminables, le sirvió de ocasión para crear su triángulo armónico.

Triángulo aritmético

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

Triângulo armónico

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
1/2	1/6	1/12	1/20	1/30	
1/3	1/12	1/30	1/60		
1/4	1/20	1/60			
1/5	1/30				
1/6					

Comparando Leibniz estos dos triángulos, comenta:

"In triangulo arithmetico series data est summatrix proxime praecedentis, et est differentialis proxime sequentis" ("En el triángulo aritmético una determinada serie es sumatoria de la inmediata precedente, y a la vez, es diferencial de la inmediata siguiente")[17].

Es decir, cada elemento de una serie es suma de todos los términos que hay en la línea inmediata superior, y hacia la izquierda; como también es la diferencia de los términos de la serie inmediata inferior, que están directamente debajo de él.

Por ejemplo: el 2 (en la segunda serie) es la suma de 1 + 1 (en la serie superior); y es al mismo tiempo la diferencia (3 - 1) de los términos que están bajo él en la serie inferior. Asimismo, el 6 es la suma de 1 + 2 + 3 y la diferencia 10 - 4.

Leibniz, añade: "at in triángulo Harmónico contra series data est summatoria proxime sequentis et differentialis proxime antecedentis" ("mientras que en el

16 Ibídem, pág. 59.
17 Historia et origo. Ibídem, pág. 405.

triángulo armónico, por el contrario, una determinada serie es sumatoria de la inmediata siguiente y diferencial de la inmediata antecedente")[18].

Es decir, que en el triángulo armónico, un elemento es suma de los términos que están en la serie inferior y a la derecha; y asimismo, es la diferencia entre los dos términos que están justamente encima de él. Así, por ejemplo: $1/6 = 1/2 - 1/3$; $3/6 - 2/6 = 1/6$.

Vemos, pues que en ambos triángulos las series son unas respecto de otras sumatorias o diferenciales, exactamente como el problema de las tangentes, –que depende de las diferencias de las ordenadas–, es inverso del de las cuadraturas, que dependen de la suma de las ordenadas en el sentido de Cavalieri[19].

Sin embargo, aunque la idea general de la correlación de las sumas y diferencias en el triángulo armónico facilitará a nuestro autor dicha correlación entre tangentes y cuadraturas, las diferencias entre los elementos en este triángulo como en el aritmético, son finitas mientras que las diferencias de las ordenadas de una curva son infinitesimales, y por tanto, las fórmulas válidas para el primer caso, no lo son para el segundo.

De ahí que Leibniz se viera precisado a desarrollar un método para determinar la suma y las diferencias infinitesimales correspondientes a las ordenadas de las curvas[20].

Al final de su estancia en París, en 1676, Leibniz ya estaba en posesión de su algoritmo y de las reglas fundamentales del cálculo y de su aplicación a las ecuaciones exponenciales.

"Por lo demás de aquí se podían expresar con el Cálculo todo lo que desde hacía mucho tiempo se daba en las figuras. Pues un elemento (o diferencial) de la curva era $\sqrt{(dx\ dy + dy\ dy)}$; un elemento del área era y dx; y $\int y\,dx$ y $\int x\,dy$ eran complementarias entre sí. De lo cual se derivaba con evidencia que $d(xy) = x\,dy + y\,dx$, o inversamente $xy = \int x\,dy + \int y\,dx$ "[21].

A la vez "ex natura logarithmorum cum calculo differentiali combinata" ("de la naturaleza de los logaritmos combinada con el cálculo") se podían abordar las diferenciales de las ecuaciones mecánicas o trascendentes. Sea, por ejemplo $y^x = z$. Entonces, $x \log y = \log z$. Luego $dx \log y + x\,dy{:}y = dz{:}z$ [22].

18 Ibídem, pág. 405.

19 Carl B. Boyer. *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* Nueva York, Dover, 1959, pág. 204.

20 Carl B. Boyer. o.c. pág. 204-205.

21 Historia et origo, o.c. pág. 408.

22 Ibídem, pág. 409.

3. *Las primeras publicaciones leibnizianas del Cálculo*

No obstante que el descubrimiento del Cálculo diferencial fuera realizado en 1676, Leibniz tardó ocho años en publicar su primer informe sobre éste.

La formulación del cálculo fue publicada por primera vez en las Actas de Eruditos de Leipzig, en forma de breves memorias en 1684 y en 1686, respectivamente.

El primer opúsculo llevaba por título: *Nova Methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*[23].

El segundo se titulaba: *De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*[24].

La primera memoria publicada en 1684 resulta un texto *enigmático*, es decir carente de explicaciones, excesivamente compendioso y sintético. Aún los hermanos Bernuilli, grandes amigos de Leibniz con el que sostuvieron una copiosa correspondencia y que eran matemáticos de vocación experimentaron, al leerlo, esta impresión.

Juan Bernuilli escribe: "Después de estos comienzos por un azar imprevisto mi hermano y yo nos topamos con un pequeño escrito del Sr. Leibniz inserto en las Actas de Leipzig de 1684, donde en cinco o seis páginas solamente, da una idea demasiado ligera del cálculo diferencial, *ce qui était une énigme plutôt qu'une explication*, que más que una explicación era un enigma; pero esto nos bastó para profundizar en pocos días todo su secreto, como testimonian la cantidad de artículos que publicamos en seguida sobre el asunto de los infinitamente pequeños"[25].

Analicemos, pues, esta primera memoria.

En ella Leibniz nos ofrece: 1) Una definición de la diferencial; 2) Las reglas para hallar la diferencial de sumas algebraicas, productos, cocientes, potencias y raíces; 3) Unas cuantas aplicaciones para las tangentes y los problemas de los máximos, mínimos y puntos de inflexión; 4) La derivación de la ley de refracción como un ejemplo del valor práctico del método nuevo.

Dejaremos para una revisión más breve, la segunda memoria que trata del método de la integración. El término "integral" aplicado al cálculo le fue sugerido por su amigo Bernuilli.

Como veremos, para nuestro autor lo principal era el cálculo diferencial, pues el integral se reducía a una inversión del primero.

23 "Un nuevo método para hallar los máximos, mínimos así como las tangentes, que obvia las cantidades fraccionarias e irracionales, y un tipo especial de Cálculo para lograrlo".

24 "Sobre la Geometría recóndita y el análisis tanto de los indivisibles como de los infinitos".

25 G. Math. III/1, nota.

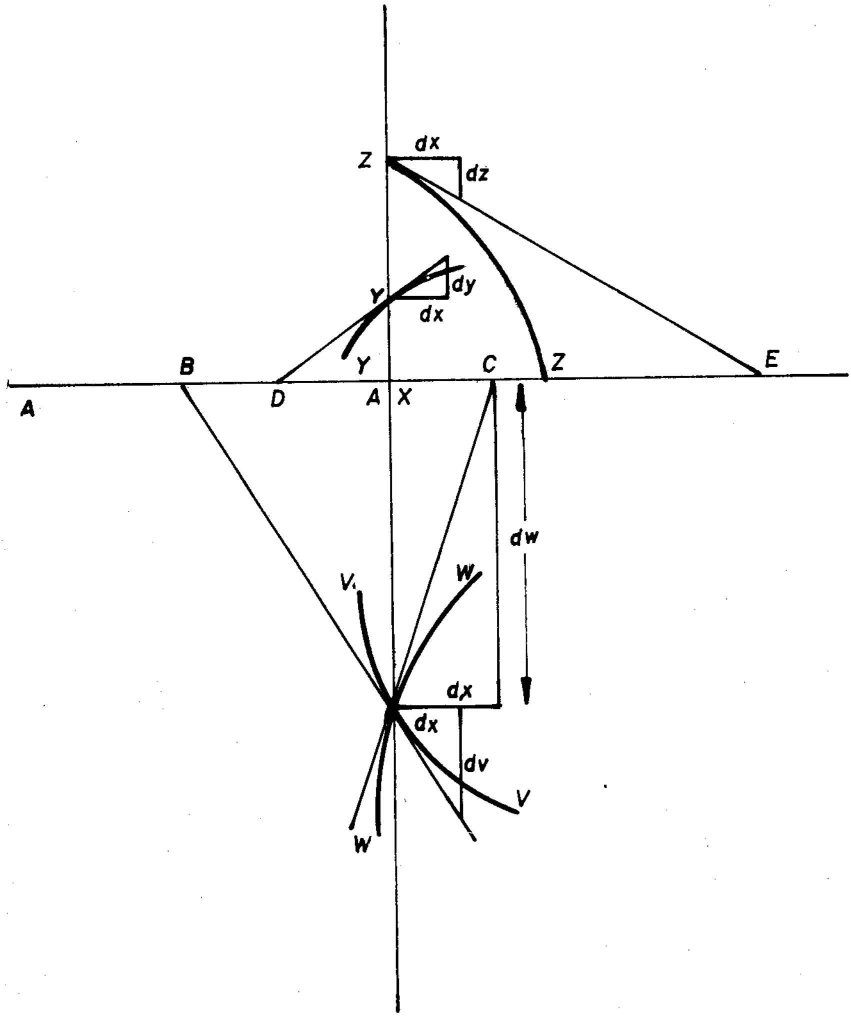

FIG. 7.

Comienza Leibniz sin más preámbulos: "Sea el eje AX y varias curvas VV, WW, YY, ZZ, y llamemos a sus ordenadas, normales al eje, VX, WX, YX, ZX, v, w, y, x respectivamente, y a la misma AX llamémosla también x.

"Sean las tangentes VB, WC, YD, ZE que cortan al eje respectivamente en los puntos B, C, D, E.

"Ahora llamemos dx a una recta tomada arbitrariamente, *y a la recta que sea a dx como v (o como w y o z) lo es a XB (o a XC, a XD o a XE) llamémosla dv* *(dw, dy o dz), o sea la diferencia de las mismas v (o de las mismas w, y o z)*[26].

"De modo que:

dv/dx = v/XB ; dw/dx = w/XC ; dy/dx = y/XD ; dz/dx = z/XE".

Leibniz da aquí, una definición satisfactoria de la diferencial de primer orden.

En esta definición, obsérvese: 1) que la diferencial de la abcisa x (dx) es una cantidad arbitraria. Lo cual se mantiene hoy en el Cálculo; 2) que lo importante para nuestro autor como para Newton, lo importante y significativo en el concepto de diferencial, es la idea de *cociente*, de *razón*. Son las razones dv/dx, dw/dx, dy/dx, dz/dx lo importante. O, en términos modernos, llamando a la ordenada por la letra *y*, la razón dy/dx. Más que la diferencial dy, propiamente tal, lo interesante para Leibniz es el cociente de diferenciales dy/dx; ya que XB, XC, XD, XE son las *subtangentes* o proyecciones sobre el eje AX del segmento de las *tangentes a las curvas* VV, WW, YY, ZZ. *La razón, pues entre la diferencial de la ordenada y la diferencial de la abcisa, dy/dx, es igual a la razón entre la ordenada y la subtangente.*

Por tanto, la definición que da Leibniz de la diferencial la hace depender de la *subtangente*, y en definitiva de la *tangente*.

Ahora bien, nuestro autor define la tangente como una línea que toca a la curva en dos puntos que están infinitamente próximos uno del otro. Como quiera que la distancia infinitamente pequeña entre estos dos puntos se expresa por medio de diferenciales o diferencias entre dos valores consecutivos de la ordenada, hay aquí una *petitio principii.* Se define la diferencial por la tangente y la tangente, por la diferencial[27].

Esto se debe a que Leibniz no se ha desprendido todavía de las cantidades infinitamente pequeñas, o en otras palabras que lo infinitesimal no ha alcanzado la claridad y el rigor que solamente el concepto de límite, empleado por los matemáticos posteriores como D'Alembert, Lagrande y Cauchy, puede dar.

Por otra parte, los matemáticos contemporáneos aceptan con Cauchy que el concepto de diferencial no es, como creía Leibniz, un concepto fundamental, sino subordinado al de derivada y por tanto al de límite[28].

Las diferenciales de orden superior (diferencial segunda, tercera, cuarta, etc.) adolecen, como es natural, de la misma falta de precisión y rigor.

Leibniz duda entre concebir las diferenciales como cantidades asignables o inasignables. Usa los (d)y y (d)x para representar diferencias finitas o asignables. Pero las reemplaza enseguida por los infinitesimales o diferenciales dx y dy, "como una especie de ficción" ya que después de todo, "dy/dx puede ser reducida a la razón (d) y/(d)x, entre cantidades que son sin lugar a dudas reales y asignables"[29].

26 *Nova Methodus*, o.c. G. Math. V, 220.

27 Ver Carl B. Boyer, o.c. p. 210.

28 Ibídem, 210-11.

29 Boyer, o.c. pág. 216, nota 107.

Que existan, en efecto, líneas de longitud infinita y a la vez limitadas es algo para Leibniz dubitable por lo menos. "Dubitari posse an linae rectae infinitae longitudine et tamen terminatae revera dentur" ("Que se puede dudar que se den efectivamente rectas infinitas en longitud y sin embargo, delimitadas").

Así, pues, –le cuenta Leibniz en esta carta a su amigo Juan Bernuilli– no debe extrañarte que dudo si efectivamente se dé una cantidad infinitamente pequeña o infinitamente grande, una y otra delimitadas[30].

Aunque para Leibniz hay una transición de la magnitud finita a la infinitesimal, este paso no es explicado satisfactoriamente por nuestro autor. Recurre para ello al principio de continuidad. Pero este recurso, como veremos, no está debidamente clarificado.

Este principio fundamental en el pensamiento leibniziano, que juega un papel importante en la crítica de nuestro autor a la mecánica cartesiana, lo estudiaremos, en el próximo capítulo.

No obstante, hay un aspecto que deseamos exponer.

En una carta dirigida a Cristian Wolf, publicada en las Actas de Eruditos de Leipzig, expone nuestro autor al profesor de Matemáticas de la Universidad de Halle que es conforme al principio de continuidad que "in continuis *extremum exclusivum tractari possit ut inclusivum* –"que en los continuos, el término exclusivo se puede considerar como inclusivo"–. Es decir, que en una variación en forma de serie que tenga por término un límite, este término (*extremum exclusivum*) no pertenece a la serie, pero puede considerársele como *inclusivum*, es decir, como perteneciente a la misma serie. "De modo que –añade Leibniz– el caso último, aunque de naturaleza totalmente diversa, esté implícito en la ley general de los demás casos, y a la vez, usando una razón paradójica o figura filosófico-retórica, se puede considerar como un caso especial, comprendido en el caso general contradistinto, el que el punto esté contenido en la línea, o el reposo en el movimiento, como si el punto fuera una línea infinitamente pequeña o evanescente, o el reposo un movimiento evanescente, y otras cosas por el estilo que Joaquín Junge un pensador muy profundo, llamó tolerablemente verdaderas y que son de gran utilidad en el arte de inventar o descubrir, aunque implique, a mi juicio, algo de ficción y de imaginario; lo cual, sin embargo, queda rectificado tan fácilmente en la reducción a las expresiones ordinarias que no puede intervenir el error: por lo demás, también la Naturaleza, que procede siempre por grados y no por saltos, no puede violar la ley de continuidad"[31].

Según esto, la condición de límite se justifica mediante la ley de continuidad, mientras que, por el contrario, los matemáticos posteriores a Leibniz, justifican la ley de continuidad mediante el concepto de límite[32].

30 G. Math. III/2, 524.

31 *Epistola ad V. Cl. Christianum Wolfium professorem Matheseos halensem circa scientiam infiniti* G. Math. V, 385.

32 Carl B. Boyer, o.c. pág. 218.

En una carta de septiembre de 1713 Leibniz escribe a Grandi: "Por lo demás, es mi opinión, muchas veces expuesta, que las cantidades infinitamente pequeñas o grandes son, a la verdad, ficciones; pero ficciones útiles para razonar de un modo sintético y a la vez seguro. Y que basta con que se tomen tan pequeñas como sea necesario para que el error sea menor que uno dado, y por tanto como nulo. Tengo de esta tesis argumentos ciertos pero sería prolijo exponerlos en esta ocasión.

Entretanto concebimos los infinitamente pequeños no simple y absolutamente como ceros, sino como ceros relativos (*ut nihila respectiva*) como usted muy bien lo advierte, es decir, como cantidades que se desvanecen en cero, pero que conservan sin embargo la marca o carácter que tenían antes de desvanecerse (*retinentia tamen characterem ejus quod evanescit*)[33].

En torno, pues, al concepto de diferencial, Leibniz adopta una actitud poco clara, considerando las diferenciales, unas veces como cantidades inasignables, otras como ceros relativos y como variables auxiliares.

A pesar de esta confusión o falta de clarificación de los conceptos, lo importante es que Leibniz desarrolló unas reglas para hallar las diferenciales de las sumas algebraicas, productos, cocientes, potencias y raíces.

En el artículo *Nova Methodus pro maximis et minimis* que estamos presentando, ya en la primera página, una vez definido el cociente diferencial dy/dx, añade nuestro autor:

"Supuesto esto, las reglas del cálculo son las siguientes:

(1) Diferencial de una constante:

Si a es una constante, su diferencial será cero: $da = 0$; y $d\,ax = a\,dx$.

(2) Diferencial de una suma algebraica:

Si $v = z - y + w + x$, $dv = dz - dy + dw + dx$

(3) Diferencial de un producto:

$d\,xv = x\,dv + v\,dx$, o también, supuesto que $y = xv$, $dy = x\,dv + v\,dx$.

(4) Diferencial de un cociente:

Suponiendo que $z = v/y$; $dz = \dfrac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$

(5) Diferencial de una potencia:

$d\,x^a = a\,x^{a-1}\,dx$. Ejemplo: $d\,x^3 = 3\,x^2\,dx$

$d\,(1 : x^a) = -\,(a\,dx : x^{a-1})$ Ejemplo: Si $w = 1 : x^3$, $dw = -(3dx : x^4)$

(6) Diferencial de una raíz:

$d\,\sqrt[b]{x^a} = {}^a/b\;dx\,\sqrt[b]{x^{a-b}}$[34].

(7) "Es evidente que también nuestro método se extiende a las líneas trascendentes que no pueden ser reducidas al cálculo algebraico"[35].

33 *Carta de Leibniz. a Grandi*, G. Math. IV, 218.
34 Ibídem, pág. 220-222 (vol. V).
35 Ibídem, pág. 223 (vol. V).

Para terminar diremos que uno de los méritos de Leibniz ha sido la progresiva algebrización del Análisis infinitesimal, es decir, su reducción a un cálculo operacional dotado de un sistema uniforme de notación de carácter algebraico[36].

Acerca del problema de la falta de rigor y precisión en los conceptos hay que decir con Bourbaki que "sólo se abre paso al análisis moderno cuando Newton y Leibniz, volviendo la espalda al pasado, aceptan buscar provisionalmente la justificación de los nuevos métodos, no en demostraciones rigurosas, sino en la fecundidad y la coherencia de los resultados"[37].

El mérito pues de estos pensadores fue el de abrir un camino, que aunque preparado por sus antecesores desde Arquímides, y sus coetáneos como Fermat, Pascal, Hyghens y Barrow, no gozaba de más privilegio que el de su fecundidad y coherencia. Fue esta fecundidad y coherencia que resaltaban en la práctica sobre temas apasionantes de la Física, los que permitieron desarrollar el Cálculo en los siglos siguientes.

36 Nicolás Bourbaki. *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Madrid, Alianza Editorial, 2da. ed. 1976, pág. 262.

37 Ibídem, pág. 239.

CAPITULO VII

CALCULO DIFERENCIAL Y METAFISICA MONADICA

1. *El Specimen Dynamicum y la proyección del Cálculo en la Dinámica*

Cuando en 1686 Leibniz abre su ataque propiamente dicho contra la Mecánica de Descartes[1] está ya en posesión del Cálculo, descubierto en París (1676) y formulado en las *Actas Eruditorum* de Leipzig en 1684 y 1686.

Con este poderoso instrumento, no sólo útil en matemáticas, sino en el análisis y solución de problemas físicos, particularmente mecánicos, nuestro autor va a fundamentar la crítica al mecanicismo cartesiano, y a crear, desde el nivel superior que le otorgaba el cálculo diferencial, una Dinámica vinculada a su metafísica.

Las leyes del movimiento propuestas por Descartes[2], fieles exponentes de su mecanicismo, son atacadas por Leibniz en nombre del principio de continuidad[3].

En efecto, con excepción de la primera, las seis restantes leyes del movimiento expuestas por Descartes suponen, de un modo u otro, que la Naturaleza obra a saltos, lo cual está vedado precisamente por el principio de continuidad que Leibniz llama también, principio del Orden General[4] y que está vinculado a las matemáticas, esto es, al análisis de lo infinitamente pequeño.

A su vez, para rebatir la tesis de la conservación del movimiento, en la que Descartes refleja su concepción mecanicista, Leibniz se vale de las experiencias de Galileo y de Huyghens, así como del principio de la equivalencia entre la causa plena y el efecto íntegro[5].

1 Leibniz. *Brevis demonstratio erroris mirabilis Cartesii*. G. Math. VI, 117, 123.

2 Descartes. *Les principes de la Philosophie*, 2da. parte art. 46-52 París Gallimard. La Pleiade (1953), 639-43.

3 Leibniz, *Animadversiones in partem generalem Principiorum cartesianorum*. G. Phil. IV, 370-72 y 376-80.

4 G. Phil. III, 52.

5 Leibniz. *Discours de Métaphysique*, parag. 17 G. Phil. IV, 442.

Si admitiésemos la ley cartesiana de la conservación del movimiento habría que aceptar que el efecto puede superar la causa, y por tanto que se podría obtener un movimiento mecánico perpetuo[6], y esto viola la adecuación plena entre la causa y el efecto.

En la crítica del mecanicismo cartesiano, lo más interesante de la investigación de Leibniz, es, a mi juicio, que este autor no se haya conformado con rechazar simplemente las leyes del choque entre los cuerpos establecidas por el pensador francés, sino que haya profundizado en esta crítica *subsumiendo* las leyes cartesianas en otra ley superior cual es la de la equivalencia entre la causa plena y el efecto entero, en vinculación estrecha con el principio de continuidad, logrando así una explicación unitaria que abarcara tanto los fenómenos de la Estática como los de la Dinámica al relacionar las fuerzas muertas con las fuerzas vivas.

"Se comprende, pues, —nos dice Leibniz— que la naturaleza concilie tan elegantemente la ley del equilibrio de los cuerpos en pugna, ley que es relativa, con la ley de la equivalencia entre la causa y el efecto, que es absoluta; y ello mediante la ley de la transición gradual que ordena que la transición se dé por incrementos inasignables o infinitamente pequeños, y por ello mismo mediante fuerzas muertas, a la vez que dictamina que la ley del equilibrio sólo se ejerza respecto de las fuerzas muertas"[7].

Aunque la afirmación de René Dugas que "en 1695 Leibniz publica en las Actas de Leipzig un Modelo Dinámico (Specimen Dynamicum) donde se encuentra expresada por primera vez la relación fundamental entre la fuerza viva y la fuerza muerta o estática"[8], nos parece imprecisa, ya que esta relación fundamental había sido ya expresada en el *Essay de Dynamique sur les loix du mouvement*[9], sin embargo aquella obra es ciertamente el texto más acabado en el que nuestro autor explica de un modo unitario dicha relación, utilizando el Cálculo.

Vamos, pues, a abordar el estudio de este difícil, pero interesante texto, en donde se clarifica el paso de la Estática a la Dinámica, y por tanto, se rinde cuenta con mayor profundidad del error de Descartes a la vez que se ofrece una corrección definitiva de las reglas cartesianas dentro de una visión más amplia que es la que se ofrece en dicho Modelo de Dinámica.

Vamos a estudiar las dos nociones capitales que aparecen en la primera parte de esta obra: las nociones de *conatus* y de *ímpetus*, cuyo significado, diferencia y a la vez vinculación va a ocupar nuestra atención.

6 Leibniz, *Animadversiones*, G. Phil. IV, 372.

7 Carta a de Volder, G. Phil. II, 154-155.

8 René Dugas. *La mécanique au XVII siècle*. Neuchatel, Edit. du Griffon, (1954), 489. (Los destacados son míos).

9 G. Math. VI, 218-220. Ver Martial Gueroult. *Leibniz. Dynamique et Métaphysique*. París, Aubier, 1967, p. 23. nota 1, 6.

Para introducirnos en el tema nada nos parece mejor que recurrir a un ejemplo que el mismo Leibniz, con claridad magistral, nos ofrece en su mismo *Specimen Dynamicum*.

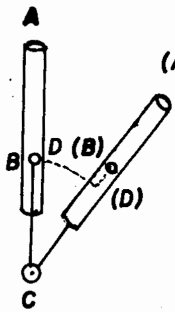

FIG. 8.

"Imaginemos –nos dice– un tubo AC que gira en el plano horizontal de esta página alrededor de un centro C inmóvil, animado de cierta velocidad uniforme; y que una esfera B, existente en la cavidad de dicho tubo, libre de atadura o impedimento, empiece a moverse por la fuerza centrífuga. Es evidente que al comienzo el *conato* o inclinación a alejarse del centro, con la que la esfera B en el tubo tiende hacia su extremidad A, es infinitamente pequeño respecto del *ímpetu* que tiene entonces debido a la rotación, es decir, respecto del *ímpetu* con el que la esfera B, a la vez que el mismo tubo, tiende a ir desde el lugar D a (D) mantenida la distancia al centro. Pero al continuar por algún tiempo la impresión centrífuga, procedente de la rotación, es necesario que surja en la esfera, por el mismo movimiento rotatorio cierto *ímpetu centrífugo completo*, (D) (B) comparable al *ímpetu de rotación*, D (D). Resulta, pues, evidente que hay dos nisus o esfuerzos: por una parte, un *nisus elemental* o infinitamente pequeño que llamo *solicitación*, y por otra parte, el formado por la continua repetición de los nisus elementales, es decir, el *ímpetu mismo*, sin que pretenda con ello que estos entes matemáticos realmente se encuentren así en la naturaleza, sino sólo que valgan para hacer con la mente cuidadosas evaluaciones"[10].

Antes de comentar este texto es para nosotros importante señalar la aplicación del cálculo que en él se hace.

Tenemos una preciosa indicación por parte del amigo de Leibniz, Juan Bernuilli, con el que sostuvo una amplia correspondencia especialmente sobre temas de Matemáticas.

"Fue muy agradable leer tus meditaciones metafísicas que en las Actas de abril publicaste bajo el título de Modelo Dinámico (*Specimen Dynamicum*)... Lo

10 *Specimen Dynamicum*, G. Math. VI, pág. 238.

que dices sobre el tubo que gira alrededor de un centro, sobre la esfera existente en la cavidad de aquél, sobre el esfuerzo o solicitación, la fuerza viva y la fuerza muerta, etc., debe parecerles cosas muy verdaderas a los que según nuestra Geometría recóndita conocen la razón por la que se debe admitir que cualquier cantidad se compone de infinitas diferenciales (*ex infinitis differentialibus*) y cualquier diferencial de otras infinitas y asimismo cualquiera de éstas, de infinitas otras, y así sucesivamente"[11].

Bernuilli, gran conocedor de los textos matemáticos de Leibniz advierte que esta obra, el *Specimen Dynamicum*, se aclara bajo los conceptos básicos del cálculo: las diferenciales y su suma o integración. La diferencial y la integral operan en el fondo del *Modelo dinámico* de Leibniz y es, desde este punto de vista, desde el que hay que analizar los conceptos fundamentales de *conatus* y de *ímpetus*.

Volviendo al ejemplo anterior, fácilmente experimentable, de la fuerza centrífuga, vemos que la esfera tiene en primer lugar un ímpetu rotatorio que le comunica el tubo al girar sobre un centro; es decir, posee una fuerza con la que se mueve con un movimiento circular y una velocidad real.

Pero a la vez, debido a la rotación, surge en dicha esfera otra fuerza, la centrífuga, que al comienzo es infinitamente pequeña si la comparamos con el ímpetu rotatorio. Se trata, en efecto, de una simple tendencia o inclinación a alejarse del centro y tender hacia la extremidad del tubo. A esta fuerza la llama Leibniz *conatus o solicitación elemental*. "Llamo solicitaciones a los esfuerzos infinitamente pequeños o conatos, por los cuales el móvil es solicitado o invitado, por así decir, al movimiento, como es, por ejemplo, la acción de la pesantez o de la tendencia centrífuga, de los cuales hace falta una infinidad para componer un movimiento ordinario"[12].

Mientras que el ímpetu encierra un movimiento real, actual, y está unido a una velocidad real, que a veces Leibniz denomina impetuosidad, el conato, por el contrario, no es realmente movimiento, sino sólo tendencia a él, y no encierra velocidad real, sino sólo un germen de ella, es decir, una velocidad que llama Leibniz *embrionaria*. "Las velocidades de un cuerpo que está en movimiento las llamo también, alguna vez, *impetuosidades*, para distinguirlas de esas velocidades imperfectas o *embrionarias*, tales como las que tiene un cuerpo pesado en el primer instante de su caída y que recibe en cada momento"[13].

Ahora bien, los conatos que no son movimiento engendran por su continua repetición y acumulación, el movimiento, la velocidad real. Esto es, llegan a formar un ímpetu. El ímpetu, por tanto, está formado por la agregación, acumulación o integración de los conatos.

11 Carta a Juan Bernuilli de junio 1695, G. Math. III/1, 188-89.

12 Deux problemes construits par G. Leibniz en employant sa regle génerale de la composition des mouvements, G. Math. VI, pág. 234.

13 Carta a Varignon, agosto 1707, G. Math. IV, 159.

Como quiera que el conato o solicitación elemental no es movimiento, sino tendencia a éste, se le puede considerar como una fuerza muerta, y en efecto, lo es. Mientras que el ímpetu, que es movimiento actual, y por lo mismo velocidad real, está unido a la fuerza viva que nace de infinitas impresiones continuadas de la fuerza muerta.

Dice Leibniz a continuación: "Hay por tanto, dos fuerzas: una que es *elemental*, que llamo *muerta* también, porque en ella no existe todavía el movimiento, sino sólo una solicitación a él. Por ejemplo, la fuerza de la esfera en el tubo mencionado, o la de la piedra en la honda en tanto que está retenida por la cuerda. Y otra que es la fuerza ordinaria, unida al movimiento actual y que llamo *fuerza viva*".

Ejemplos de fuerzas muertas serían la misma fuerza centrífuga, como asimismo la fuerza de la gravedad o centrípeta, o también la fuerza por la que el muelle tiende a volver a su posición. Pero en la percusión sea que ésta se produzca por un grave que cae durante algún tiempo, o por un arco que se distiende durante cierto intervalo, o por otra cosa similar, la fuerza es *viva* y nace de infinitas impresiones continuadas de la fuerza viva. Esto es lo que Galileo sostuvo cuando dijo, con una expresión enigmática, que "la fuerza de la percusión o del choque es infinita, si en efecto, se la compara con la simple tendencia de la gravedad. No obstante, aunque el ímpetu esté siempre unido a la fuerza viva, estas dos cosas son diferentes como luego se demostrará (*diferre tamen haec duo infra ostendetur*)"[14].

La relación matemática entre la fuerza muerta y la fuerza viva, así como entre el ímpetu y el conato fue ya expresada en 1686 en la *Brevis demonstratio*: "Ahora bien, la fuerza viva está en relación con la fuerza muerta, o el ímpetu con el conato como la línea respecto del punto, o el plano respecto de la línea"[15].

Hablando de los grados del infinito (sea éste infinitamente grande o pequeño), Leibniz nos dice: "Si el movimiento se representa por una línea común que el móvil recorre en cierto tiempo, el ímpetu o velocidad se representará mediante una línea infinitamente pequeña, y el mismo elemento de la velocidad cual es la solicitación de la gravedad o lo es el conato centrífugo, por una línea infinitas veces más pequeña"[16]. Es decir, que el ímpetu, aquí identificado con la velocidad es la diferencial primera del espacio que el móvil recorre en un determinado tiempo, y el conato centrífugo, por ejemplo es una diferencial segunda de dicho espacio, o también, la diferencial de la velocidad.

Llegamos aquí a un momento importante en la génesis de la Dinámica leibniziana: *la aplicación del cálculo al movimiento.*

El conato o solicitación, en lenguaje matemático, es un elemento de la velocidad, es decir, es la diferencial de la velocidad. "Y así –nos dice Leibniz en la carta a de Volder– el ímpetu de la fuerza viva está en relación con la simple solicitud de

14 Specimen Dynamicum. G. Math. VI, 238.
15 *Brevis demonstratio erroris mirabilis Cartesii.* G. Math. VI, 121.
16 *Tentamen de Motuum Coelestium causis* (1689), G. Math. VI, 151.

la fuerza muerta como lo finito con lo infinito, o como en nuestras diferenciales la línea con sus elementos"[17]. Es decir, suponiendo que el ímpetu o velocidad sea una ordenada, (v), el conato o simple solicitud será una diferencial de v (d v). Lo que llama Leibniz el elemento o diferencial de una línea, en nuestro caso, de una ordenada, es la expresión matemática de la solicitud elemental o conato.

En la misma carta a de Volder, Leibniz de modo claro y terminante afirma, aplicando su Análisis matemático, que la velocidad se puede expresar por x y las solicitaciones por dx (*solicitationes sint ut dx, celeritates ut x*)[18].

Teniendo en cuenta que nuestro autor tiene costumbre de representar las líneas rectas y curvas con respecto a un eje que llama x, pero que viene a ser nuestro eje (y y') de las ordenadas, las velocidades se pueden considerar las ordenadas: y = v; y las solicitaciones o conatos, las diferenciales de v, o sea, dv.

Por su parte, el ímpetu es la diferencial del espacio (de), pues se puede relacionar con él como la línea con la superficie[19].

Examinemos, pues, estas dos diferenciales: la de la velocidad y la del espacio.

Con respecto a la velocidad existen dos casos típicos: que la velocidad sea una constante o que reciba un incremento (sea positivo o negativo) igual en cada intervalo de tiempo.

En el primer caso, cuando la velocidad es constante, el móvil recorre espacios iguales en cada unidad de tiempo. Se trata del movimiento uniforme.

La representación de dicha velocidad será una paralela al eje de las abcisas

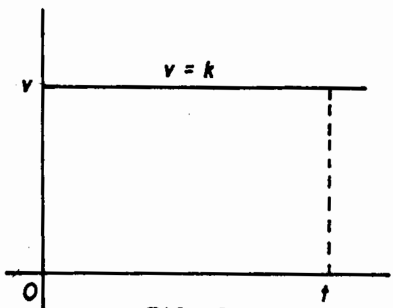

FIG. 9.

En esta recta, que representa la velocidad del movimiento uniforme, no hay inclinación alguna, es decir, no existe entre las velocidades tomadas en distintos tiempos, diferencia alguna. Esto significa, de acuerdo con la primera regla del cálculo dada por Leibniz[20], que la diferencial de v es cero, ya que la diferencial de una constante es cero.

17 *A de Volder*. G. Phil. II, 154.
18 Ibídem, pág. 156.
19 Ver pág. 123, notas 15 y 16.
20 Ver pág. 117.

$v = k$, $dv = dk = 0$ (I)

Ahora bien, el espacio recorrido por un móvil animado por una velocidad constante se representa gráficamente (ver figura 9) por el rectángulo delimitado por los ejes OX, Oy, la recta representativa de las velocidades, y la ordenada correspondiente al tiempo transcurrido.

El área de este rectángulo es igual al producto de su altura por su base, es decir, es igual a vt, y la ley del movimiento uniforme será, por tanto

$e = v\,t$ (II)

Como v es constante, la diferencial de este espacio, de, es la diferencial del producto de una constante por x; y según la primera regla leibniziana, ya mencionada[21], equivale al producto de esa constante por la diferencial de x. De modo que

$d\,e = d\,vt = v\,d\,t$ (III)

Gráficamente se la puede representar por el rectángulo rayado de la figura 10

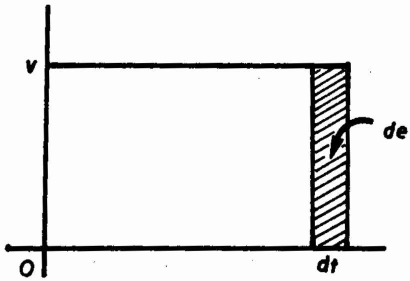

FIG. 10.

cuya base es un incremento arbitrario de t, (dt), y su altura es v.

El rectángulo, que representa al espacio recorrido en un tiempo determinado (t), lo podemos dividir, a su vez, en rectángulos infinitamente pequeños que tengan por altura la ordenada común v y por base la diferencial de t (dt), o sea un intervalo infinitamente pequeño de tiempo.

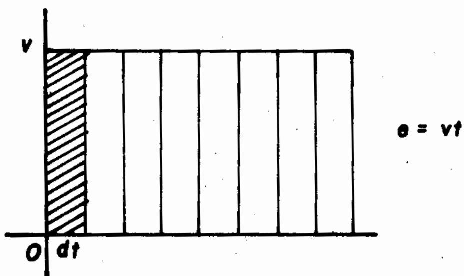

FIG. 11.

21 Ibídem.

De este modo, la suma de estos rectángulos, que son las diferenciales del espacio, equivale al espacio recorrido

$$e = \int v\, dt = v \int dt = v\, t \qquad \text{(IV)}$$

En el segundo caso al que aludíamos, cuando la velocidad no es constante, sino que recibe un incremento o aceleración por cada unidad de tiempo, es decir, cuando aumenta regularmente en razón del tiempo, se trata entonces de un movimiento uniformemente acelerado.

La representación de dicha velocidad es una recta que pasa por el centro, suponiendo que la velocidad inicial es nula, y forma un ángulo con las abcisas

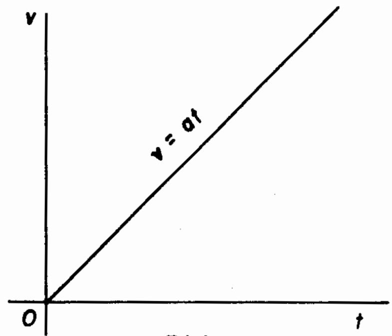

FIG. 12.

La diferencial de esta velocidad (dv) es, en primer lugar una diferencia de velocidades, esto es, un incremento o cambio de velocidad, y por tanto, una *aceleración*[22].

Pero, en segundo lugar, es una diferencia o variación infinitesimal de velocidad (aceleración instantánea), mantenida durante un intervalo infinitesimal de tiempo, (dt)

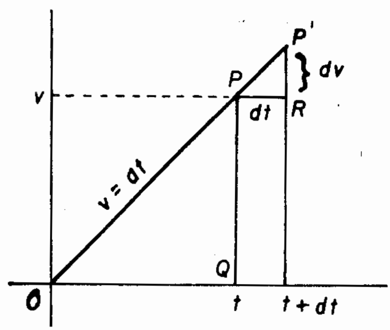

FIG. 13.

22 Recuérdese que la aceleración es el incremento o variación de velocidad en un intervalo de tiempo. La aceleración media es el incremento o variación de velocidad que el móvil experimenta en cada unidad de tiempo, mientras que la aceleración instantánea, que es la que nos interesa ahora, es el incremento infinitesimal de velocidad en un intervalo infinitesimal de tiempo. Sin embargo, en el caso del movimiento uniformemente acelerado, como es el de la caída de los cuerpos, la aceleración es constante, y por tanto, ambas aceleraciones coinciden.

Según el concepto leibniziano de diferencial[23], dv/dt = v/t. Obsérvese que el triángulo P P' R (triángulo característico) puede ser tan pequeño como se quiera. Pero aunque sea un triángulo inasignable, por infinitamente pequeños que sean sus lados, siempre será semejante al triángulo asignable O P Q, y por tanto, la razón dv/dt será siempre igual a la razón PQ/OQ, o sea, a la razón v/t.

Como en este caso particular v = at, tenemos que: dv /dt = at/t = a. De donde

$$dv = a\,dt \qquad \text{(V)}$$

Ahora bien, el espacio recorrido por un móvil animado de una velocidad que crece regular, uniformemente, se representa gráficamente por el área del triángulo delimitado por el eje Ox, la recta representativa de la velocidad y la ordenada correspondiente al tiempo transcurrido

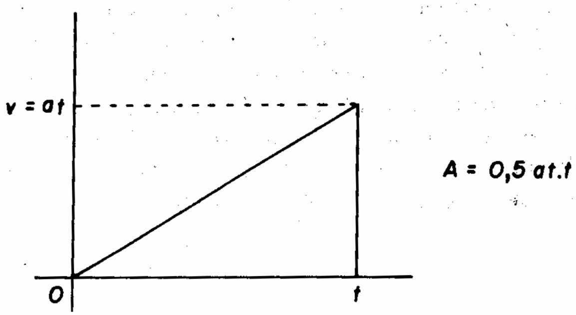

FIG. 14.

Esta área, como se sabe, es igual a $1/2\ at^2$. Por tanto:

$$e = 1/2\ a\ t^2 \qquad \text{(VI)}$$

Recordando la regla leibniziana de la diferencial de una potencia:

$$d\,x^a = a\,x^{a-1}\,dx$$

y aplicándola a la ecuación (VI), obtenemos: $d\,e = 1/2\ a.2t.dt$ y simplificando:

$$d\,e = at\ \ dt \qquad \text{(VII)}$$

La diferencial del espacio (at dt) está representada en la figura 15

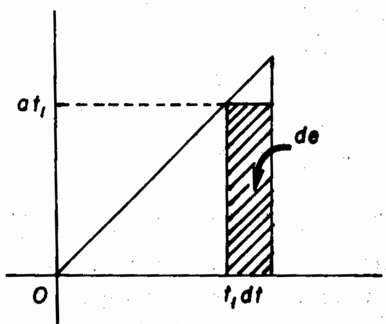

FIG. 15

23 Ver pág. 114-115.

El rectángulo rayado que tiene por altura la ordenada correspondiente a t_1 (at_1) y por base el incremento infinitesimal del tiempo (dt) posee un área equivalente a: at dt. Esta área tan pequeña como se quiera, ya que dt es una cantidad inasignable que puede ser menor que cualquier otra que se desee, es una porción, por tanto, infinitamente pequeña del área del triángulo.

Es importante observar que la diferencial representa *el desplazamiento del móvil en el intervalo dt si la velocidad (at) permaneciera constante en dicho intervalo*, es decir, representa el desplazamiento infinitamente pequeño de un móvil que estuviese dotado de un movimiento uniforme.

Esta consideración es la clave para entender la dinámica leibniziana porque estos desplazamientos que se consideran uniformes, van a engendrar el espacio recorrido por un móvil animado de velocidad variable. Es decir, que desde el punto de vista del análisis matemático, del cálculo diferencial, Leibniz *va a tratar de construir un puente entre el movimiento uniforme que acompaña a la fuerza muerta y el movimiento uniformemente acelerado que acompaña a la fuerza viva, y por tanto, entre la fuerza muerta y la fuerza viva, y esto a través del uso de las diferenciales.*

También podríamos representar la ecuación (VI) mediante una curva. Suponemos, para más sencillez que $a = \frac{1}{2}$ y que $1/2\ a = 0{,}25$

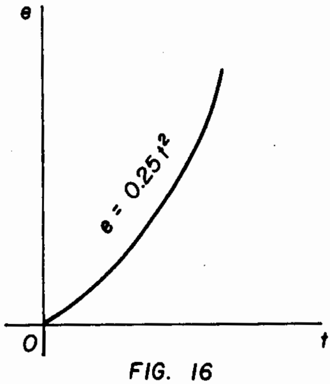

FIG. 16

Tendríamos, pues, la ecuación $e = \frac{t^2}{4}$ de un móvil que posee una aceleración constante a = 1, cuya representación gráfica sería la curva de la figura 16:

Según la exposición que hace *Leibniz* de las curvas y sus diferenciales en su *Nova Methodus por maximis et minimis*, ya señalada[24], la diferencial de espacio, *d* e, estaría representada por el segmento QR que está en relación con el segmento

24 Ver pág. 114-115.

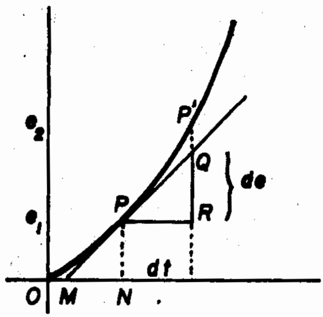

FIG. 17

PR = dt, en la siguiente proporción: QR/PR = PN/MN, donde MN es la subtangente en el punto P y que podríamos llamar stg.

Sustituyendo ahora los segmentos por sus valores en el cálculo tendremos: $de / dt = e_1/stg$.

Expliquemos la gráfica.

Al llegar el móvil en su trayectoria al punto P posee una velocidad instantánea que es igual a de/dt, siendo de/dt lo que llamamos hoy la derivada del espacio respecto del tiempo. Este cociente o razón equivale a la tangente trigonométrica de la recta tangente de la curva en el punto P.

Ahora bien, supongamos que el móvil que está en P se mueve durante el intervalo (dt) pasando así de P a P'. Vemos que habrá recorrido una porción de espacio que será $e_2 - e_1$ = P'R. Si llamamos a este incremento del espacio *D* e, vemos que no coincide con la porción de ordenada QR que es d *e*. D *e* es mayor que d *e*.

Esta diferencia se explica porque en dicho intervalo (dt) la velocidad instantánea del móvil que atraviesa los puntos intermedios entre P y P' va creciendo, aunque sea en magnitud infinitamente pequeña, resultando así un incremento espacial que llamamos D *e*.

Para que en dicho intervalo de tiempo (dt) el móvil recorriese, no el incremento RP' sino el incremento RQ es preciso suponer que la velocidad instantánea que va adquiriendo dicho móvil de modo progresivo en el intervalo (dt) no variase, sino que permaneciera constante.

Si suponemos, pues, que el móvil al llegar al punto P posee una velocidad instantánea y que esta velocidad permanece invariable en el intervalo (dt), el desplazamiento en dicho intervalo sería RQ o sea, d *e*.

La diferencial, por tanto, del espacio d *e* en el intervalo (dt) es *el desplazamiento que experimenta el móvil, si la velocidad instantánea correspondiente a la abcisa t permaneciera constante en el intervalo (t + dt)*[25].

25 F.W. Sears y M.W. Zemanski, *Física General*, Madrid, Aguilar 5ta. ed. 1977, pág. 64-65.

Este desplazamiento que viene a ser un movimiento uniforme porque en ese intervalo la velocidad se considera invariable o constante, equivale al *incremento de la ordenada de la recta tangente en P, cuando la abcisa de ese punto (t) aumenta en (t + dt)*[26].

Observemos de nuevo que el triángulo PQR es un triángulo "característico". Puede, en efecto, reducirse infinitamente y sus lados QR y PQ llegar a ser inasignables como su razón d *e*/ dt. Sin embargo, por infinitamente pequeño que lo imaginemos, siempre será semejante al triángulo asignable MNP; y a su vez, la razón inasignable d *e* / d t, siempre será igual a la razón asignable PN/MN, o sea el cociente de *e* por la subtangente MN.

Al considerar el intervalo (dt) cada vez más pequeño la diferencia entre el incremento D *e* y d *e* será cada vez menor hasta el punto que tienda a desaparecer, es decir, hasta el punto que sea menor que cualquier cantidad dada, según la forma de pensar de Leibniz.

Volviendo a la figura 15 de la página 127 podemos dividir el área del triángulo, representativa del espacio recorrido por un móvil animado de una velocidad v = a t, en franjas rectangulares de igual base(dt) y de altura equivalente a la ordenada *v* en cada instante, franjas o rectángulos que decíamos representan las diferenciales del espacio.

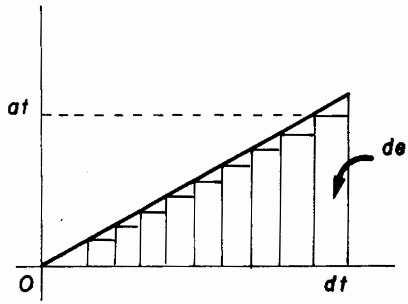

FIG. 18.

Ahora bien, haciendo que en dichas franjas o rectángulos, la base común sea cada vez menor, ya que (dt) es, en la concepción leibniziana conservada hasta hoy día, una cantidad arbitraria, que puede suponerse menor que cualquiera otra dada, dichos rectángulos crecerán indefinidamente en número y decrecerán en superficie, haciéndose, por así decir, más estrechos o delgados. Su suma podría aproximarse tanto como se quiera al área de dicho triángulo, pudiéndose considerar, por tanto, a dicha suma equivalente al área triangular, o sea al espacio recorrido.

26 Ver igualmente Mario O. González, *Nociones de Cálculo diferencial e integral*. Nueva York, Minerva Books, 1965, pág. 74.

$\int de = \int at\,dt = e = 1/2\,at^2$. Tenemos pues que:

$$\int at\,dt = 1/2\,at^2 \qquad \text{(VIII)}$$

Hemos creído conveniente detenernos en estas sencillas explicaciones del cálculo diferencial leibniziano porque consideramos que sin ellas no se puede comprender bien el significado de los conceptos básicos de la Dinámica leibniziana.

Hasta ahora hemos examinado el movimiento uniforme y el uniformemente acelerado desde un punto de vista exclusivamente cinético, pero no dinámico.

Vamos ahora a considerar estos movimientos desde la perspectiva dinámica.

Para ello definiremos los conceptos centrales que intervienen en el Modelo dinámico de Leibniz, expresándolos en el lenguaje del cálculo y representándolos geométricamente, en cuanto sea posible.

El concepto más simple es el de *velocidad embrionaria.* Se la puede considerar como una velocidad infinitamente pequeña que viene a ser como un punto comparado con una línea. Esta velocidad infinita es más bien una diferencia infinitesimal de velocidad o sea un incremento infinitamente pequeño de velocidad.

Analíticamente, la podemos expresar con la fórmula $v_e = dv$ cuya representación gráfica sería la siguiente:

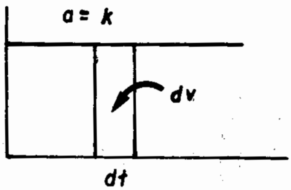

FIG. 19

Ahora bien, $dv = a\,dt$ ya que $v = at$. Gráficamente la podríamos representar también así:

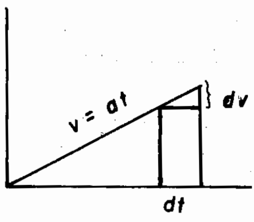

FIG. 20

El segundo concepto que conviene analizar es el de *impetuosidad o velocidad real e instantánea.* Aunque Leibniz usa este término para referirse a la fuerza viva que luego examinaremos, él mismo confiesa que emplea esta palabra para referirse a "las velocidades de un cuerpo que está en movimiento".

Esta velocidad instantánea o impetuosidad es la integral de las diferenciales de velocidad o acumulación de las velocidades embrionarias. La relación, pues, entre la velocidad *embrionaria* y la *actual* es clara: la primera es dev, la segunda $\int dv$ y se representa en la figura 21:

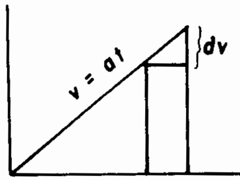

FIG. 21.

Como $v = \int a\, dt = at$ la impetuosidad se puede describir geométricamente por la figura 13:

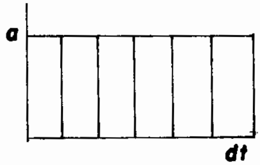

FIG. 22

También cabe expresar la velocidad actual en otra ecuación analítica, a saber, $v_i = de/dt = v\ dt/dt = v$, siendo $v = at$, la velocidad instantánea. Podríamos emplear la siguiente figura:

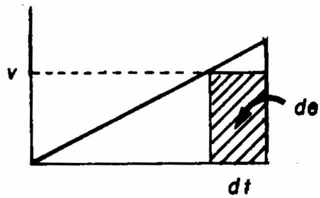

FIG. 23

En ella vemos que rectángulo que tiene por altura v y por base dt es una porción de superficie que equivale a: a.dt es decir a *d* e. La razón, pues, de/dt significa la porción de espacio recorrido por unidad de tiempo (dt) con una velocidad constante.

También la razón de/dt se podría representar análogamente en la figura 15:

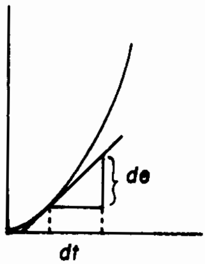

FIG. 24

en donde también se puede observar que el espacio *d* e es el desplazamiento que experimenta el móvil, si la velocidad instantánea correspondiente a la abcisa t permaneciera constante en el intervalo dt (ver página 129). Al dividir esta porción de espacio o de desplazamiento por una unidad de tiempo (dt) obtenemos la velocidad instantánea.

Poseemos, ahora, los elementos necesarios para hacernos cargo fácilmente de lo que significa el concepto de *conatus* en Leibniz: El *conato o solicitación elemental* lo podemos definir analíticamente como el producto de la masa por la diferencial de la velocidad.

$C_n = m\ dv = m\ a\ dt$. Es por tanto, el nisus elemental, la simple tendencia al movimiento que posee una masa (m) que tiene una velocidad embrionaria (a dt). Cuando este nisus o esfuerzo está contrarrestado por una fuerza contraria es una fuerza muerta. La velocidad del conato es una velocidad embrionaria (un embrión de velocidad) tal "como la que tiene un cuerpo pesado en el primer instante de su caída o la que recibe en cada momento de su descenso" (Ver página 122).

Nos toca ahora ver el significado del *ímpetu* y su relación con el concepto de conato. El ímpetu lo podemos considerar, en primer término, como la integral de los conatos: "El ímpetu mismo, aunque es algo momentáneo se hace a su vez de infinitos grados impresos en el móvil, poseyendo un elemento del que no puede surgir a menos que se repita éste infinitas veces"[27].

Como los conatos, según decíamos, se expresan analíticamente como m. adt, el ímpetu será $Im = \int m\ adt = m\ at$ siendo at la velocidad instantánea, por tanto $Im = m\ v_i$. *El ímpetu es, pues, el producto de la masa del cuerpo por la velocidad, siendo ésta una velocidad instantánea*: "Por su parte –nos dice Leibniz en el Specimen Dynamicum–, el ímpetu es el producto de la masa del cuerpo por la velocidad (*ímpetu autem est factum ex mole corporis in velocitatem*), y su cantidad es lo que los cartesianos suelen llamar cantidad de movimiento, entiéndase momentánea (*quantitatem motus, scilicet momentaneam*)"[28].

Cabe considerar la velocidad instantánea de dos formas: primero como la integral de las aceleraciones elementales o instantánea. La velocidad sería, como hemos dicho anteriormente $v = \int adt = at$.

Pero a su vez, la velocidad instantánea cabe considerarla como propia de un movimiento uniforme, es decir, como una velocidad constante.

La velocidad es, así, el espacio recorrido en la unidad de tiempo $v = e/t$. La velocidad es entonces igual al espacio, se sobreentiende al espacio recorrido en la unidad de tiempo.

En nuestro caso, este desplazamiento infinitamente pequeño que el móvil recorre en una unidad de tiempo, que podemos llamar vdt, es precisamente una diferencial del espacio asignable: $d\ e = v\ dt$, y lo podemos representar en el rectángulo de la figura siguiente:

27 Specimen Dynamicum, G. Math. VI, 238.
28 Ibídem, pág. 237.

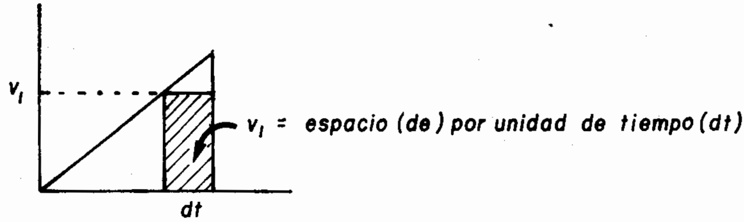

FIG. 25

mientras que la velocidad como integral de sus diferenciales se puede representar así

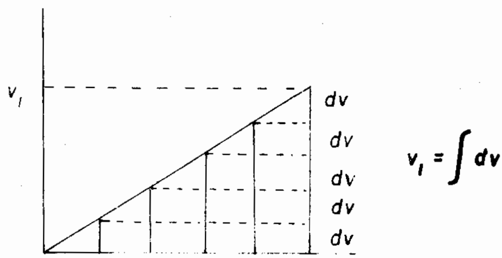

FIG. 26

Ahora bien, como el ímpetu es, según decíamos el producto de la masa por la velocidad, si consideramos la velocidad instantánea de la segunda forma, esto es, como diferencial del espacio (*d* e) podemos también definirlo como *el producto de la masa por la diferencial del espacio* I_m = m. vdt.

Ahora bien, esta fórmula m v dt, según el modo de considerar lá velocidad instantánea, se presta a dos interpretaciones.

Por una parte, la podemos ver como el producto mv por la diferencial del tiempo: *mv* dt; por otra, como el producto de m por *vdt*, o sea como el producto de la masa por la diferencial del espacio.

En este segundo caso, como el trabajo realizado por un cuerpo que se eleva a una altura h se expresa por la ecuación T = m h, si consideramos que *h* es un espacio infinitesimal al que se puede, por ejemplo, elevar la masa de un cuerpo, la diferencial m *vdt* representa una parte infinitesimal del trabajo que una masa (m) realiza al elevarse a una porción de espacio infinitamente pequeña (v. dt).

En el primer caso, si en vez de considerar el ímpetu como m *vdt*, lo consideramos como *mv* dt, el ímpetu sería, entonces, la acción de una masa en movimiento (mv) durante un infinitesimal de tiempo (dt)[29].

29 J. Moreau, o.c. pág. 141.

El sentido de estas dos interpretaciones o aspectos del ímpetu se aprecia mejor al considerar la acumulación de ímpetus, es decir, al realizar la integración de los mismos.

Si consideramos el ímpetu como m. vdt, la integral correspondiente será $\int$ m. vdt = m $\int$ v dt = m h, siendo h, más específicamente: h = $\int$ at dt = 1/2 a t^2 = e.

Es decir, la fuerza que posee un cuerpo al final de su caída (después de recorrer el espacio h) es la fuerza capaz de realizar el trabajo de elevar dicho cuerpo a la altura h, de la cual ha descendido, como se puede apreciar en el péndulo; trabajo éste que Leibniz llama "efecto violento" en cuanto que la fuerza se consume totalmente en levantar tal cuerpo a tal altura[30].

Por otra parte, si consideramos el ímpetu según *mv* dt, su integral correspondiente será: $\int$ mv. dt = mv^2 (o más precisamente 1/2 m v^2) que es la expresión matemática de la fuerza viva. "La fuerza que posee un cuerpo al término de su caída, fuerza que puede ser recogida y utilizada, es una fuerza viva o impetuosidad, es la suma de sus ímpetus. F = $\int$ mv dt = 1/2 mv^2"[31].

La fuerza viva es, pues, la integral de los ímpetus considerados como cantidades instantáneas de movimiento, esto es como *motiones*, y es proporcional, no a la velocidad adquirida por el móvil al término de su caída (at) sino al cuadrado de esta velocidad (a^2 t^2 = v^2).

En resumen, la correspondencia de estas dos formas de integrar los ímpetus, de las que venimos hablando, se aprecia si advertimos que la fuerza viva: mv^2 (o más precisamente 1/2 m v^2), se evalúa por el producto mh, que es el trabajo que puede producir, el efecto futuro que puede realizar la fuerza.

El término que emplea Leibniz de fuerza viva es un término correlativo que alude al término de *fuerza muerta*. Existen para nuestro autor dos fuerzas, por tanto, *la fuerza viva y la fuerza muerta*.

Lo que nos interesa, para terminar este estudio de la proyección del cálculo en la dinámica, es definir estos dos tipos de fuerzas y ver en qué relación está una respecto de otra.

Para Leibniz esto es importante, porque según él, se ha confundido frecuentemente el concepto de fuerza en general con el de fuerza muerta, por el hecho de que en algunos casos particulares, como luego se explicará, es ésta la única que existe y aparece. El error ha consistido en que estos casos de identificación entre fuerza en general y fuerza muerta se han querido generalizar, o sea erigir en norma universal.

Al no distinguir entre estas dos fuerzas se han cometido graves errores en Dinámica que Leibniz denuncia, explica e integra en una visión más amplia.

La fuerza muerta, se llama así porque "en ella no existe todavía el movimiento" (*in ea nondum existit motus*), sino sólo una solicitación a él. Mientras que la

30 Leibniz, Essay de Dynamique, G. Math. VI, 218.
31 J. Moreau, o.c. pág. 142.

fuerza viva es la que está unida a un movimiento actual (*cum motu actuali conjuncta*)[32]

La discriminación fundamental entre ellas está, como se ve, en el movimiento. Cuando no existe verdadero (*motus*), movimiento, sino sólo una solicitación a él, es decir "en el caso del movimiento infinitamente pequeño, que tengo por costumbre llamar solicitación, el cual tiene lugar cuando el cuerpo pesado trata de comenzar el movimiento y no ha concebido todavía ninguna impetuosidad, lo cual acontece cuando los cuerpos están en equilibrio y, se contrarrestan mutuamente"[33], entonces se trata de una fuerza *muerta*.

El movimiento aquí se refiere a la velocidad, la cual puede ser embrionaria (dv) o actual (at).

Si se trata de la velocidad embrionaria (dv), el conato que es m dv = m a dt constituye un nisus, un esfuerzo o tendencia al movimiento, por lo tanto una fuerza, pero una fuerza muerta.

Igualmente, cuando se tiene un movimiento infinitesimal de una masa (m), a saber una diferencial mv. dt, es decir un ímpetu aislado, tomado en sí mismo, fuera de la sucesión temporal, se da también una fuerza muerta.

Unicamente, cuando las solicitaciones *elementales* (dv) se han integrado en una solicitación concreta, finita, asignable, o sea en un ímpetu ya crecido, se da la fuerza viva.

Un ejemplo sería el de la fuerza de la esfera en el tubo mencionado, (pág. 121) es decir, el de las solicitaciones elementales o conatos (m adt).

En efecto, al comienzo, el movimiento de la esfera B en el tubo que tiene tendencia a ir hacia su extremidad A es infinitamente pequeño respecto del movimiento del ímpetu de rotación que ya posee. Pero estas solicitaciones elementales dan lugar, por integración, a un ímpetu incompleto, en el sentido de que se trata de un ímpetu que siendo una integración de conatos y a su vez de primeros ímpetus, no posee sino un movimiento incipiente de la masa, en este caso, de la esfera. Cuando, sin embargo, la acumulación de ímpetus ha llegado a cierto grado, entonces se produce un ímpetu que llama Leibniz *completo* porque su movimiento es ya visible, diríamos notorio, equiparable al movimiento del ímpetu de rotación[34].

Otros ejemplos de fuerzas muertas serían el de la piedra en la honda en tanto que está retenida por la cuerda[35], es decir, el de la fuerza centrífuga, como asimismo la fuerza de la gravedad o centrípeta y también la fuerza por la que el muelle tiende a volver a su posición o el del equilibrio de la balanza[36].

32 Specimen Dynamicum, p. 238.
33 Essay de Dinamique, Math. VI, 218.
34 Ver Specimen Dynamicum, G. Math. VI, 238.
35 Ibídem, 238.
36 G. Phil. IV, 398; ver también, Essay de Dynamique, G. Math. VI, 218.

Por su parte, ejemplos de fuerzas vivas son las fuerzas que adquieren los cuerpos al final de su caída, o después de haber recorrido cierto espacio y engendrado un ímpetu asignable.

Lo importante es considerar que estas dos fuerzas están relacionadas entre sí desde el punto de vista del cálculo. Es decir, la fuerza muerta pertenece a la fuerza viva a título de diferencial de la misma ya que la fuerza viva nace de infinitas impresiones continuadas de la fuerza muerta (*vis est viva, ex infinitis vis mortuae impressionibus continuis nata*)[37].

La fuerza absoluta es la fuerza viva, siendo la fuerza muerta algo relativo, un caso particular de la fuerza en general. Esta es la tesis leibniziana, quintaesencia de su teoría dinámica.

"Los antiguos —nos dice nuestro autor— sólo tuvieron, hasta donde nos consta, un conocimiento de las fuerzas muertas en lo que se llama Mecánica que versa sobre la palanca, la polea, el plano inclinado y otras máquinas similares"[38].

Igualmente, los cartesianos al considerar que la fuerza muerta está en razón compuesta de la masa por la velocidad, confundieron la fuerza en general con la cantidad de movimiento[39].

"Lo que ha contribuido más a confundir la fuerza con la cantidad de movimiento es el abuso de la doctrina estática, pues se encuentra en la Estática que dos cuerpos están en equilibrio cuando en virtud de su colocación sus velocidades son recíprocas a sus masas o pesos, o cuando tienen la misma cantidad de movimiento"[40].

La discriminación de estas dos fuerzas, la aclara Leibniz relacionando tanto la fuerza muerta como la viva con los espacios o alturas.

En el caso de los cuerpos en equilibrio, es decir, en el caso de fuerzas muertas, las alturas son como las velocidades y viceversa, las velocidades son como las alturas y de este modo —nos dice— "los productos de los pesos por las velocidades son como los productos de los pesos por sus alturas"[41].

Analicemos esta primera parte de la argumentación leibniziana. Tenemos, en efecto, la siguiente proporción:

$$h/h_1 = v/v_1 \text{ ; o también } v/v_1 = h/h_1$$

Si ahora multiplicamos ambos miembros de la igualdad por m/m_1, tendremos:

$$mv/m_1v_1 = mh/m_1h_1.$$

Lo cual significa que las cantidades de movimiento son proporcionales a los trabajos realizados, por tanto, a las fuerzas. De ahí que las fuerzas se consideren co-

37 Specimen Dynamicum, Math. VI, 238.
38 Ibídem, 239.
39 Ibídem, 239.
40 Essay de Dynamique, Math, VI, 218.
41 Ibídem, pág. 218.

mo las cantidades de movimiento en los casos de equilibrio de los cuerpos.

"Pero cuando un cuerpo pesado ha hecho progreso descendiendo libremente y ha concebido impetuosidad o fuerza viva, entonces las alturas a las que este cuerpo puede llegar no son proporcionales a las velocidades, sino a los cuadrados de las velocidades"[42].

"Por ello, –concluye Leibniz–, en el caso de las fuerzas vivas, las fuerzas no son como las cantidades de movimiento o como el producto de las masas por las velocidades"[43].

Si en las fuerzas muertas, según decíamos,

$$h/h_1 = v/v_1$$

ahora, al tratarse de las fuerzas vivas tenemos otra proporción:

$$h/h_1 = v^2/{v_1}^2.$$

Para explicar analíticamente esta proporción, acudamos a la famosa carta a de Volder[44], donde nuestro autor dice: "Según la analogía de la geometría o de nuestro Análisis, las solicitaciones serán como dx, las velocidades como x, las fuerzas como xx, esto es, como $\int$ x.dx".

Llamando, pues a las velocidades v y las solicitaciones elementales dv, las fuerzas vivas serán como las integrales de v. *d*v.

Ahora bien, siendo $v = at$ y $dv = a\ dt$, v dv será igual al producto de at por adt: $v.\ dv = at.\ a\ dt = a^2\ t\ dt$. Por tanto $\int v\ dv = \int a^2 t\ dt = a^2 \int t\ dt = 1/2\ a^2\ t^2$; y como $a^2\ t^2 = v^2$, ya que $v = at$, la integral $\int v\ dv = 1/2\ v^2$.

Las fuerzas (F/F) son como $0{,}5\ v^2/\ 0{,}5\ {v_1}^2$; o sea, como $v^2/{v_1}^2$, que era lo que queríamos probar.

La discriminación entre las fuerzas muertas y las fuerzas vivas, que como hemos dicho se hace en base a la relación existente entre espacios y velocidades, se determina en el *Specimen Dynamicum* de un modo particular.

Examinemos el texto central:

En efecto, al iniciarse, pongamos por caso, el movimiento de descenso de los graves, los descensos mismos, a saber, las cantidades de espacio recorrido, todavía infinitamente pequeñas o elementales, son en efecto proporcionales a las velocidades o conatos de descenso[45].

Partamos de las ecuaciones del espacio y de la velocidad:

$$e = \int at\ dt = a \int t\ dt = 1/2\ a\ t^2 \qquad \text{(I)}$$

$$v = \int a\ dt = a \int dt = at \qquad \text{(II)}$$

Como estamos considerando al móvil en su momento inicial de descenso (*in ipso initio motus*), el tiempo (t) que interviene en (I) y (II) es: $t = dt$, es decir, es un lapso infinitesimal de tiempo.

42 Ibídem.
43 Ibídem.
44 A de Volder, G. Phil II, 156.
45 Specimen Dynamicum, Math. VI, 239.

De acuerdo con esto, los descensos iniciales o cantidades de espacio recorrido, son todavía infinitamente pequeñas o elementales, y las velocidades en dichos lapsos inasignables, son infinitamente pequeñas o igualmente elementales.

En efecto: si $t = dt$, por la regla del cálculo[46], $t^2 = dt^2 = 2t\ dt$.

Sustituyendo en (I) t^2 por su valor, tendremos:

$e = 1/2\ a.\ 2t\ dt = at\ dt$, de modo que:

$$\begin{aligned} e_1 &= at_1\ dt \\ e_2 &= at_2\ dt \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

Es decir, que al comienzo del descenso, las cantidades de espacio que se recorren son todavía infinitamente pequeñas o elementales (*adhuc infinite parvae seu elementales*), ya que $a\ t_1\ dt$ y $a\ t_2\ dt$ son los elementos de espacio, es decir, sus diferenciales.

Asimismo, sustituyendo en (II) t por dt, obtenemos:

$$\begin{aligned} v_1 &= a\ dt \\ v_2 &= a\ dt \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

Es decir, las velocidades son conatos de descenso, ya que *a dt* es *dv* conato o diferencial de la velocidad.

Si ahora comparamos (III) con (IV) vemos que:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{at_1\ dt}{at_2\ dt} = \frac{a\ dt}{a\ dt}\ \frac{t^1}{t_2} = \frac{v_1}{v_2}\ \frac{t_1}{t_2} \qquad \text{(V)}$$

donde *a dt* son los conatos de descenso o *dv*.

Por tanto, los espacios infinitamente pequeños que recorre el móvil en el inicio de su descenso (e_1/e_2) son proporcionales a las velocidades (v_1/v_2) o conatos de descenso (a dt).

Pero una vez que se recorre cierto espacio y nace una fuerza viva, las velocidades adquiridas ya no son proporcionales a los espacios recorridos en el descenso[47].

En efecto: si en (I) y (II) *t* ya no es *dt* sino una *cierta* cantidad asignable de tiempo, tenemos que:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{a\ t_1^2}{a\ t_2^2} = \frac{t_1^{\,2}}{t_2^{\,2}} \quad \text{mientras que} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{at_1}{at_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

Es decir, que las velocidades adquiridas (v_1/v_2) no son proporcionales a los espacios, es decir, a los cuadrados de los tiempos, *sino que son proporcionales a sus elementos (sed tantum earum elementis)*[48].

46 Ver pág. 117.
47 Specimen Dynamicum, Mat. VI, 239.
48 Ibídem, 239.

En efecto, según la definición leibniziana de diferencial tantas veces utilizada[49], $dv/dt = v/t$. De donde, $v = \frac{dv.\ t}{dt}$

De este modo $v_1 = \frac{dv_1\ t_1}{dt}$, y $v_2 = \frac{dv_2\ t_2}{dt}$

Por consiguiente:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{dv_1\ t_1}{dv_2\ t_2} \qquad \text{(VI)}$$

Es decir, que las velocidades adquiridas (v_1/v_2) son proporcionales a sus elementos, es decir a sus diferenciales (dv_1/dv_2), –además de ser proporcionales a los tiempos–, que era lo que deseábamos demostrar.

Hemos visto cómo las fuerzas muertas y las fuerzas vivas se distinguen entre sí. Pero se trata de conceptos que están correlacionados.

La vinculación que existe entre fuerzas muertas y vivas se realiza mediante el concepto de ímpetu que sirve de intermediario entre ambas[50].

Por una parte, el ímpetu es integral de los conatos (m a dt), $Im = \int m\ a\ dt = m\ at = mv$, siendo *v* una velocidad instantánea. En este sentido, el ímpetu es cantidad de movimiento (instantánea) y por lo mismo se relaciona con la fuerza muerta (mv).

Por otra parte, si consideramos la velocidad instantánea (v_i) como *v dt*[51], el ímpetu es, como dijimos, la acción de una masa en movimiento (mv) durante un lapso infinitesimal de tiempo (dt); es decir, $l_m = mv\ dt$. Pero *mv dt* es precisamente la diferencial de la fuerza viva ($1/2\ m\ v^2$). En efecto, tomando 1/2 m como constante, $d(o{,}5\ m\ v^2) = 0{,}5\ m.2v\ dt = mv\ dt$. Luego el ímpetu se relaciona a su vez con la fuerza viva por ser una parte infinitesimal de ella, aunque no se identifique ni confunda con ella: "No obstante aunque el ímpetu está siempre ligado a la fuerza viva estas dos cosas son diferentes"[52].

Así pues, los ímpetus que son "resultado de la integral de las fuerzas muertas, engendran a su vez, por su integración, las fuerzas vivas"[53].

2. *La caracterización de la fuerza activa como realidad absoluta y espontaneidad autónoma.*

Como hemos podido ver en la primera parte de este capítulo, la Dinámica leibniziana está, en el fondo, vinculada al cálculo diferencial, del que recibe en última ins-

49 Ver pág. 115.
50 M. Guéroult, o.c. pág. 40/41.
51 Ver págs. 134.
52 Specimen Dynamicum, Math VI, 238.
53 M. Guéroult, o.c. pág. 41.

tancia su definitiva fundamentación clarificadora. Debido a esta vinculación, la teoría dinámica de Leibniz es una visión integradora.

Si en efecto, en un principio surge como oposición y discusión crítica frente a la mecánica cartesiana, las mismas exigencias del Cálculo conducen, no a excluir al mecanicismo basado en las fuerzas muertas y en el uso de la Estática, sino a corregirlo y en definitiva, a integrarlo en una visión más amplia. La Dinámica leibniziana se hace cargo, de un modo unitario, de las fuerzas muertas y de las fuerzas vivas, de los movimientos uniformes y de los uniformemente acelerados; de la ley del equilibrio y de la ley de la equivalencia entre la causa y el efecto, y esto mediante la ley de la transición gradual que evita todo salto[54].

Con su espléndida aportación al Cálculo y la aplicación de éste a la Dinámica, nuestro autor no hace más que demostrar un vivo interés por la temática de la época, en especial por uno de los problemas más acuciantes: el de la determinación de las leyes del movimiento.

Ya se tratara del movimiento de los astros en la bóveda celeste, de los veleros en la inmensidad de los mares, o de los cuerpos graves en su caída libre, las leyes que regían a los móviles en cuanto tales constituían un foco de preocupación científica dentro de la nueva orientación baconiana del saber.

Leibniz, como los demás pensadores de su época, a partir de Galileo estaban convencidos del valor social de la ciencia, del impacto que estaba produciendo y del que estaba destinada a producir en cuanto a la explotación de la naturaleza en favor del hombre.

A través de la ciencia físico-matemática se perfilaban los problemas prácticos que planteaba la nueva sociedad pre-industrial, y por tanto, las estructuras socio-económicas, políticas y religiosas involucradas en el mercantilismo que desarrolla su apogeo en el siglo XVII.

Pero además de hombres interesados en la ciencia, Leibniz —al igual que Descartes, Malbranche y Spinoza—, eran filósofos, y como tales su Física, es decir, su imagen del Mundo, no era simplemente científica, sino que estaba enraizada y fundamentada en una metafísica.

El impacto de la sociedad pre-industrial con todas sus transformaciones socio-económicas, políticas y culturales había convertido a la ciencia de un saber secundario en un saber ejecutivo, y lo había sancionado como institución social. Pero en la mente de los filósofos racionalistas, esta ciencia que había demostrado por otra parte su eficacia y proyección social y había adquirido, por así decir, un grado de madurez nunca alcanzado en el pasado, necesitaba un complemento: su fundamentación. Y a esta tarea de fundamentar la ciencia mediante principios metafísicos, se entregaron estos pensadores racionalistas. No eran simples científicos, aunque algunos de ellos como Descartes y Leibniz hicieran valiosísimas aportaciones a la ciencia

54 A de Volder, G. Phil, II, 154.