Encuentro Educacional Vol. 5, No. 2 (1998), 217-225

Lo formal y lo significativo de algunas expresiones matemáticas

Carlos Gajardo

Universidad de los Andes. Facultad de Ingeniería.
División de Estudios de Postgrado.

Resumen

Después de algunas especificaciones de términos, se exponen aquí ciertas expresiones, seleccionadas desde la instrucción elemental hasta la superior, las cuales son presentadas corrientemente a los estudiantes sin especial atención; ya que tradicionalmente, han sido consideradas como "naturales" o "asunto que todos pueden entender fácilmente", u otras razones por el estilo. El objetivo del trabajo es llamar la atención con respecto a simplificaciones excesivas que todos los educadores de matemática podemos cometer con mayor o menor frecuencia o responsabilidad. Sólo por mencionar algunas de ellas haré referencia al exponente cero, al cero factorial, a la identificación errónea del número **i** con la expresión raíz cuadrada de menos uno, valores puros y valores límites, series formales de potencias en oposición a series significativas de potencias.

Palabras clave: Expresión formal, expresión significativa, proposición, didáctica, comunicación efectiva.

Formality and Significance in Certain Mathemartical Expressions.

Abstract

After certain term specifications, certain expressions (concepts) are analyzed, selected from elemental up to university level instruction material, which are presently taught to students without any special attention or treatment, since traditionally they are considered as something natural, something that everyone understands easily, or other similar reasons. The objective of this paper is to call attention to the excessive simplifications that all math teachers do commit with lesser or greater frequency or responsability. To mention a few of them we will refer to the exponent 0, the factorial 0, the

Recibido: 11-09-97 • Aceptado: 30-09-98

erroneos identification of the the number **i** with the expression of the square root of (-1), pure values, and limit values, formal series of exponents in contrast with significative series of exponents.

Keywords: Formal expression, significative expression, proposition, didactics, effective communication.

Introducción

Una **expresión** es una forma de comunicación. La comunicación, sin embargo, sólo se produce cuando el transmisor, o sea, el eventual comunicador, codifica el mensaje en un código que resulte significativo para el receptor, es decir, para el decodificador, el cual, si está en sintonía con el código seleccionado podrá interpretar correctamente el mensaje y, sólo entonces, podremos considerarlo informado.

Un **enunciado** es la familia de todas las expresiones que, aún en códigos diferentes, son la manifestación de un mensaje unívoco. Si al mensaje contenido en la expresión no es posible asignarle valor alguno, se dice que la **expresión es estrictamente formal**.

Una **proposición** (binaria) es un enunciado al cual es posible asignarle un único valor de verdad (V) o (F). El objetivo de la lógica formal (binaria) es establecer condiciones bajo las cuales, a partir de ciertos antecedentes, es posible deducir otras proposiciones: Las conclusiones.

Una proposición es cerrada si los objetos referidos son entes identificables absolutamente. En caso contrario, la proposición queda "abierta" y el lugar o lugares que deberían haber ocupado tales objetos suelen ser representados por símbolos como x, y, z, etc. (Gajardo, 1989). Estos símbolos juegan el papel de "indeterminadas", mientras no se adopte un criterio que permita darles algún sentido de valor a la cerradura de la proposición abierta.

Los objetos que pueden otorgarle consistencia al sentido que asuma la clausura de la proposición abierta, serán los "candidatos" a sustituir a las indeterminadas y se les da el nombre de **"variables".**

El conjunto de objetos que sea "asignables" al lugar que ocupa la variable, se llama el "dominio de definición de la variable". Por otra parte, para cada identificación que le asigne a la o las variables en el "dominio de definición", se asumirá un solo valor en el "dominio de valores".

Muchas veces, por razones prácticas, se conviene en asignarle valor a ciertas expresiones a través de "un juicio convencional razonable". En tales casos, hablamos de **"expresiones convencionales".** Este es el caso, por ejemplo, del 0! (cero factorial), que se presenta en la sección 1.2 de este trabajo.

Este trabajo contiene aclaratorias a ciertas preguntas formuladas al autor por profesionales de distintas especialidades y niveles de la ingeniería. Lo común en todas ellas es que respondieron, en su momento, a una inadecuada distinción entre lo que es estrictamente formal y lo que es significativo (de alguna manera) en un dominio de valores.

El propósito de esta comunicación es alertar sobre el énfasis y el cuidado que debemos tener los docentes de Matemáticas cuando nos corresponde instruir sobre lo formal y lo significativo, para lograr una **comunicación efectiva**.

1. El número cero

El símbolo 0, que se usa para representar el valor cero, apareció mucho más tarde que el resto de los símbolos numéricos correspondientes a los números enteros y fracciones positivas. La primera referencia conocida proviene de la cultura Maya (I A.C.) y luego de la Hindú unos quinientos años después de la anterior (Funk y Wagnalls) (Boyer, 1994). No obstante, su universalización es bastante reciente. No es raro, aun hoy, que éste produzca dificultades especiales en el proceso enseñanza - aprendizaje; no sólo por sus notables propiedades sumatorias sino también por su comportamiento multiplicativo: $0.a = a.0 = 0$, para cada elemento a de un sistema numérico que contenga al 0 como neutro aditivo. Pero, además, **la división entre cero no está definida**. Y no lo está, porque dado un número $b \neq 0$ no existe algún número a tal que $a . 9 = b$. Es decir, la expresión $(b \div 0)$ no tiene valor alguno. Por otra parte, si $b = 0$, cualquier número a es tal que $a . 0 = b$. Así, la expresión $(0 \div 0)$ podría asumir cualquier valor y, por lo tanto, sería una expresión ambigua.

1.1 El exponente cero

Cuando se desea extender las propiedades de las potencias de exponentes enteros positivos, se desea que la extensión resulte consistente con las llamadas "leyes de exponentes", sólo que al ilustrar la representación

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, \text{ con } m > n,$$

el instructor, entusiasmado tal vez con su logro didáctico, omite con frecuencia, y los textos también, hacer una referencia importante con respecto a la división. La fórmula es válida sólo si el divisor es diferente de cero. Esta omisión conduce a que en la extensión hecha para m = b, como

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0,$$

el estudiante concluya, erróneamente, y en forma bastante general, que: "Toda potencia de exponente cero es igual a uno", lo cual es evidentemente falso; ya que la expresión 0^0 no está definida, por razones ya expuestas. La expresión simbólica 0^0, simplemente carece de sentido alguno. Pero esto no es todo, al llegar a este punto no se advierte, en forma suficiente, que el concepto de potencia empieza a trascender la noción básica inicial, que consistía en considerar $a^n = a \,.\, a \,.\, a. \ldots .\, a$, n veces, pues desde este punto en adelante, pasa a ser improcedente intentar extender la idea básica original, al extremo de siquiera dejar que el estudiante llegue a plantearse falacias como que si $1^0 = 1$, pero 1^0 = (cero veces uno) = 0, entonces 1 = 0.

1.2. El cero factorial

En este caso se tiene que "Para todo entero positivo n, el símbolo n! - léase factorial de n - designa el producto de los n primeros enteros positivos, esto es n! = 1.2.3. ..... .n. Y resulta conveniente definir, también 0! por la igualdad 0! = 1", (Courant y Robbins, 1964). La conveniencia a la cual se refiere la cita textual, corresponde, entre otras razones a que, de esta manera, la fórmula para los coeficientes de Newton

$$C_k^n = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

no pierda la validez, ni aún en los casos extremos laterales k = 0 y k = n, que terminan por ilustrar el triángulo de Pascal. Una vez aceptada la razón que sustenta dicha conveniencia, aceptamos que la expresión formal 0! pasa a ser una expresión 0^0, que no posee sentido ni justificación razonable alguna en las estructuras numéricas.

2. Valores puros y valores límites

Desde el punto de vista didáctico, uno de los conceptos matemáticos más difíciles de comunicar es el concepto de límite. Sobre todo cuando se intenta enfrentarlo sin un conocimiento fundamental mínimo de lógica matemática, tanto de parte del educador como del educando; porque para poder llegar a comunicarse, ambos necesitan **saber no sólo lo que el concepto es sino también distinguir, muy claramente, lo que el concepto no es**. Esto implica, necesariamente, que ambos conozcan un mínimo de cálculo proposicional y cálculo de predicados, por cuanto, de un modo o de otro, debe establecerse la definición formal y, por su puesto, reconocer en qué casos se produce la negación de la misma.

Superando este obstáculo didáctico (Glaeser, 1980), todavía queda un punto por aclarar. Como no se han originado símbolos diferentes para distinguir valores puros de valores límites, ambos tienden a confundirse. Se presentarán aquí sólo dos ejemplos ilustrativos.

2.1. El cero límite y el símbolo

Se ha tratado de dejar en claro que el símbolo $(\frac{1}{0})$ no tiene definición. Sin embargo, para una variable real x, se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{0} = \infty$$, entonces, ¿En qué se queda?.

Resulta imprescindible aclarar que el símbolo 0, que aparece en el denominador es un **cero límite,** es decir un concepto de valor variable "tan próximo al cero como se desee", pero el cual "nunca" podrá asumir o ser sustituido por el cero, como valor puro.

El símbolo ∞, que aparece a la derecha de la ecuación anterior, no señala hacia algún valor real, sino hacia el concepto totalmente novedoso de valor variable "mayor que cualquier valor real imaginable". Éste, por supuesto, no es posible precisar. Por eso se recurre a este nuevo símbolo que sólo expresa el concepto, mas no refiere a valor específico alguno, puesto que, claramente, no existe ese valor real.

Una diferencia de notación similar debería establecerse, entre un valor numérico puro y un valor límite numérico. Observe incluso que, en este sentido, hasta la semántica es y debe ser diferente, por lo tanto, la simbología debería contemplar esta diferencia. Esto representaría un aporte significativo para la didáctica especial referida a este punto. Así como también para la mejor comprensión de algunos símbolos que se presentan inadvertidamente más tarde y que parecen contravenir todo el sentido lógico formal que fundamenta la matemática. La sección 2.2, que sigue, ilustra sobre este hecho.

2.2 La expresión 1^{∞}

No son pocos los profesionales que insisten en señalar, con una lógica no exenta de fundamento, que si el valor numérico uno se multiplica "cualquier cantidad de veces" por sí mismo, el resultado debe ser 1, ¿Y entonces...?. Para dar respuesta a esta interrogante se debe aclarar, en primer lugar, que el símbolo 1, utilizado como "base" en la expresión dada, no es el valor numérico 1 sino el valor límite numérico 1, lo cual, ya de por sí, es muy diferente. En segundo lugar, el símbolo no representa al infinito enumerable al que se refiere implícitamente el cuestionador como "cualquier cantidad de veces" sino que representa a una determinada función real, preferiblemente continua, que "tiende", de algún modo, hacia un valor real mayor que cualquier cantidad imaginable y lo hace de una manera "similar" a la manera en que la base "tiende" al valor límite 1.

En otras palabras, el símbolo 1^{∞}, usado a veces ligeramente, quiere significar un límite de la forma

$$\mathit{Lim}_{x \to a} (f(x))^{g(x)}, \mathit{donde}$$

$$\mathit{lím}_{x \to a} f(x) = 1 \;\; y \;\; \mathit{lím}_{x \to a} g(x) = \infty$$

En tal caso, basta redefinir f(x) = 1 + h(x), de modo que $\mathit{lím}_{x \to a}$ h(x) = 0 para satisfacer, por lo menos, que la base tienda a 1 cuando $x \to a$ y, en seguida, recurrir al artificio de considerar,

$$\lim_{x\to a}\left\{\left(1+h(x)\right)^{\frac{1}{h(x)}}\right\}^{h(x)g(x)} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to a} h(x)g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]g(x)}$$

donde se ha considerado que:

$$\lim_{x\to a}\left\{[1+h(x)]\right\}^{\frac{1}{h(x)}} = c$$

Para ilustrar sobre la utilidad de este artificio, basta el siguiente ejemplo de un límite de la forma 1^{∞}:

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} =$$

$$\lim_{x\to \infty}\left\{\left(1-\left(1-\frac{x-1}{x+3}\right)\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right\}^{\frac{-4}{x+3}(x+2)} =$$

$$e^{-4\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)} = e^{-4}$$

donde $h(x) = -\left(1-\dfrac{x-1}{x+3}\right) = \dfrac{-4}{x+3}$

3. La identificación de i = $\sqrt{(-1)}$

La primera aproximación didáctica que se suele realizar hacia el concepto de raíz cuadrada de b, se refiere a "obtener un número x tal que $x^2 = b$", luego se hace referencia a que x recibe el nombre de **la raíz cuadrada de b** y, en seguida, se introduce el símbolo $\sqrt{b} = x$. Mientras se trabaja sólo con b no negativo y respuestas no negativas todo suele ir bastante bien, ya que a cada real no negativo corresponderá una única raíz cuadrada no negativa (Thomaidis, 1993).

Los problemas didácticos se inician cuando se introducen los números negativos, porque:

1°) Habrá dos valores (+2) y (-2), tales que $(+2)^2 = (-2)^2 = 4$. Pero esto contradice la concepción de raíz cuadrada como función de variable real a valores reales, la cual como bien se conoce, sólo admite valores no negativos.

Una forma válida de esclarecer este asunto es plantear la ecuación de segundo grado $x^2 = 4$ la cual, por cierto, posee dos raíces $r_1 = \sqrt{4}$ y $r_2 = -\sqrt{4}$, de modo que: $r_1 = 2$ y $r_2 = -2$, pero la $\sqrt{4}$ en ambos casos, es 2.

2°) Los números negativos no admiten raíz cuadrada real. No obstante, la ecuación $x^2 = -1$ requiere de una solución numérica, la cual conduce a la definición de un nuevo tipo de número. La concepción de existencia de estos nuevos números produjo, en el ambiente matemático, un remezón histórico sólo comparable con el descalabro que sufrió la Escuela Pitagórica al enfrentarse a los números irracionales que, casualmente, ella misma había descubierto. Leibniz afirmaba que estos números eran: "algo entre el ser y no ser" y se les denomino **imaginarios** hasta que Gauss los definió como **complejos**. Quien logró darles presencia matemática fue De Moivre al establecer su famosa fórmula trigonométrica, y sentenció que "la raíz cuadrada de menos 1 es un símbolo", al cual, posteriormente Euler designó por la letra

i (Vera, 1969). Este devenir histórico produce, hoy por hoy, algunos inconvenientes didácticos de consideración. Por ejemplo, si el estudiante conoce bien el álgebra de la función f(x) = $\sqrt{x}$ y se le dice que $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$, sin advertirle que el símbolo, en este segundo caso, es conceptualmente diferente al que cree conocer tan bien, puede llegar a la siguiente falacia

$$\boldsymbol{i^2 = i.i = \sqrt{(-1)}\ \sqrt{(-1)} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1}$$

Aquí; no sólo el símbolo ha sido utilizado con ligereza, sino también las propiedades de la raíz cuadrada, que sólo son válidas para cantidades subradicales positivas.

4. Series formales de potencias opuestas a las series significativas de potencias

Una serie formal de potencia (sfp) sobre un campo F es una sucesión de elementos de F (Henrici,, 1974). Por razones prácticas, bastante "sugerentes" para nuestros propósitos didácticos, la sfp $\{a_o, a_1, a_2, \ldots\}$ se suele escribir como

$$a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \quad (1)$$

En esta forma, x no debe confundirse con una variable ya que, hasta este momento, sólo juega el papel de una "indeterminada" y el signo + no se identifica con ninguna suma en particular, puesto que, aparte de saber que los a_k son elementos del campo F, no se posee información alguna sobre la naturaleza de los objetos que podrían, eventualmente, ir en lugar de la x, si es que esto fuera posible y llegara a ocurrir.

La expresión formal $\sum^{\infty} a_k x^k$, sólo resume la indicada en (1), pero ninguna de ellas debe confundirse con una serie ordinaria común. En esta forma sintética aparece el símbolo (a_0x^0), como primer elemento, sobre el cual, para evitar inconsistencias, como 0^0, se conviene que su significado sea $a_0x^0 = a_0$.

Una vez definida la igualdad, término a término, de manera natural, se puede probar que estas series formales, dan lugar a una estructura de dominio de integridad con la suma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$$

y el producto de Cauchy

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} (a_k\ b_k)\right) x^k$$

Observe que la sumatoria encerrada en el último paréntesis representa a una suma finita ordinaria dentro del campo F, mientras que el símbolo de sumatoria externo es puramente formal, como debe ser (Gajardo, 1991).

Si se desea dar significado a una sfp, se debe sustituir la "indeterminada" por algún elemento X que permita definir, de algún modo, el valor de la serie como el límite de una sucesión de sumas parciales. Para lograrlo, los elementos X deben pertenecer a un espacio V que posea, como mínimo, las propiedades de espacio vectorial. Pero, además, debe definirse una métrica $\|.\|$ sobre V, de modo que las sucesiones de Cauchy puedan ser definidas e identificadas.

(V, $\|.\|$) debe ser un espacio vectorial métrico completo. Es decir, toda sucesión de Cauchy de elementos de V debe ser convergente a un elemento de V.

También se debe tener definida sobre V una multiplicación que garantice un comportamiento deseable mínimo para el producto y poder así definir, al menos, potencias significativas, es decir, se desea una nueva ley de composición interna, identificable como multiplicación, la cual sea cerrada, asociativa, distributiva sobre la suma (tanto por la derecha, como por la izquierda) y cumple, también:

a. Si a, b $\in$ F. X.Y$\in$ V, (aX)(bY) = (ab)(XY)
b. Existe un idéntico I $\in$V , tal que (IX) =(XI) = X para cada X$\in$ V

No se requiere, sin embargo, que esta multiplicación sea conmutativa y se permite aún la existencia de divisores de cero. Con esto, V sería un álgebra y la sfp adquiría sentido.

Si además se requiere que para cada X, Y en V

$$\|XY\| \leq \|X\| \; \|Y\| \;\; y \; que \;\; \|I\| = 1$$

es decir, si se exige que V tenga la estructura de álgebra normada completa. En otras palabras, si se exige que V sea un álgebra de Banach, se habrá llegado al punto de poder darle significado a la sfp.

Aún así, las únicas sfp que resultarán ser significativas serán aquellas para las cuales las sucesiones de sumas parciales

$S_n = a_0+a_1X+a_2X^2+ \ldots + a_nX^n$,

resulten ser sucesiones de Cauchy en V, de manera que las expresiones formales

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

pasen a ser expresiones significativas, es decir, que representen, como valor límite, para algún elemento de V (Henrici, 1974), al que suele llamarse **la suma de la serie.**

Las series que sólo tienen sentido, pero carecen de significado para determinados valores de X en el álgebra de Banach V, son llamadas series divergentes en V.

Referencias bibliográficas

BOYER, C. (1984) "Historia de la matemática". Ed. Alianza Universitaria, 3 ed, Madrid, pp. 275-279

COURANT, R. y ROBBINS, H. (1964). "Qué es la matemática", Ed. Aguilar, 4 ed, Madrid. pp. 60 – 118.

FUNK and WAGNALLS, New Encyclopedia. USA.

GAJARDO, C (1989) "Lógica matemática. Elementos Fundamentales". Consejo de publicaciones ULA, Mérida.

GAJARDO, C (1991) "Sucesiones y Series". Consejo de publicaciones ULA, Mérida.

GOCHET, P. (1988) "From standard logic to logic programing" Ed. John Wiley and sons, London.

HENRICI, P. (1974). "Applied and computational complex analysis" John Wiley and Sons, London.

KOLMAN, B. and BUSBY, R.(1986) "Estructuras de matemáticas discretas para la computación". Ed. Prentice – Hall Hispanoamericana, México.

PIAGET, J. CHOQUET, G. DIEUDONNÉ, J. GLAESER, G. y OTROS (1980) "La enseñanza de la matemáticas Modernas". Ed. Alianza, Madrid, 2 ed. Pp 208-218.

ROSS, K and WRIGHT, Ch. "Matemáticas Discretas". Prentice – Hall Hispanoamericana, Caracas.

THOMAIDIS. Y. (1993) "Aspects of Negative Numbers in Early 17th century: An Approach for Didactic Reasons" Science & Education, Vol 2, N 1 pp 69-86

VERA, F. (1969) "Breve historia de la matemática", Ed. Lozada, Buenos Aires.