

Encuentro Educativo

ISSN 1315-4079 ~ Depósito legal pp 199402ZU41

Vol. 15(1) Enero - Abril 2008: 138 - 157

Aproximaciones didácticas al concepto del número entero en docentes de educación básica*

Hugo Parra S.

Universidad del Zulia-Venezuela. E-mail: parraortiz@cantv.net

Resumen

Se analizaron planificaciones de clase formuladas por docentes en ejercicio que estudian la Licenciatura en Educación mención Matemática y Física. La temática versaba sobre la introducción del concepto del número entero en el séptimo grado de Educación Básica. Para el análisis se consideró la fenomenología didáctica (Freudenthal, 1983) y los organizadores del currículo en Matemática (Segovia y Rico, 2001). Los resultados muestran un cruce entre un modelo de enseñanza de las matemáticas caracterizado por la transmisión de habilidades a través de la repetición de ejercicios, a otro basado en la resolución de problemas aplicados al conjunto Z .

Palabras clave: Educación Matemática, formación docente, currículo.

Didactic Approaches to the Concept of Whole Number by Practicing Teachers

Abstract

Class plans formulated by practicing teachers studying for their education degrees in the area of mathematics and physics were analyzed. The topic

* Proyecto de investigación 332-05, financiado por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CONDES) de la Universidad del Zulia.

Recibido: 15-01-2007 ~ Aceptado: 06-03-2007

focused on introduction of the whole number concept in the seventh grade of basic education. The analysis considered didactic phenomenology (Freudenthal, 1983) and mathematics curriculum organizers (Segovia and Rico, 2001). Results showed blending between a mathematics teaching model characterized by the transmission of abilities through repeating exercises and another model based on problem solving applied to the set Z .

Key words: mathematics education, teacher training, curriculum.

El presente trabajo tiene como propósito mostrar resultados preliminares de una investigación en curso acerca del conocimiento didáctico matemático relativo al conjunto de los números enteros, presente en docentes en ejercicio que están en proceso de obtener su Licenciatura para ejercer la docencia en Matemática.

Antecedentes

Los estudios acerca de la enseñanza de los números enteros han sido menos frecuentes que los dedicados a otros conjuntos como el de los números naturales y los racionales, y su dificultad para posicionarse en el campo de la Educación Matemática como objeto de investigación, podría considerarse análoga a lo sucedido en la historia de las Matemáticas. En efecto, la legitimación de los números enteros ocurrió en el siglo XIX debido al paso de una Matemática menos arraigada a la realidad, a una Matemática más formal. Esto permitió que este conjunto numérico lograra su reconocimiento para esa época, a pesar de

que su aparición se remonta al año 628 cuando el matemático hindú Brahmagupta los introduce para utilizarlos en operaciones de tipo mercantil (González et al., 1990). Esta dificultad de los números enteros por posicionarse en las Matemáticas y en la Educación Matemática, también se presenta en el alumno/a al momento de incorporarlo a su campo de conocimiento en la escuela. Tal y como lo reseñan las investigaciones (Vergnaud, 1989) y nuestra propia experiencia como docentes y formadores de profesores de Matemáticas, los números enteros representan una dificultad evidente en la mayoría de nuestros alumnos, de ahí, la importancia que hemos considerado de profundizar en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de este conjunto numérico.

Gallardo (1996) señalaba en la década pasada que las investigaciones respecto al conjunto de los números enteros se habían dirigido -fundamentalmente- en tres direcciones: investigaciones teóricas, aplicadas a la enseñanza y, experimentales. Entre las investigaciones

de carácter teórico destacaron los trabajos de Piaget (1960) en relación con la epistemología de los números enteros; en las referidas a la enseñanza y aprendizaje en la escuela, destacaron los trabajos de Bruno & Martínón (1996), y Ribeiro (1996). En cuanto a las investigaciones de carácter experimental, resaltaron los trabajos de Vergnaud (1989) sobre los obstáculos asociados al aprendizaje de este conjunto numérico.

Por otra parte, Bruno y Martínón (1996), al revisar las investigaciones realizadas hasta ese momento en el campo de la educación matemática, hallaron que en el marco de los números enteros existía un creciente interés en el estudio de los números enteros negativos. Estas investigaciones se podían dividir en dos grandes grupos: un primer grupo se preocupó en conocer las ideas que tenían los alumnos acerca de los números negativos antes de conocerlos formalmente en la escuela (ideas intuitivas). Las conclusiones de este tipo de trabajo señalaban que los alumnos podían comprender conceptos relativos a los números enteros antes de ser sometidos a la educación formal; ello quedaba evidenciado cuando eran interrogados presentándoles situaciones próximas a su contexto, tales como problemas de ganancia-pérdida y uso de la recta. Los alumnos se apoyaban en los conocimientos previos que tenían respecto a los números

positivos y sus operaciones. Un segundo grupo de investigaciones enfocaron su atención en investigar cómo los alumnos utilizaban y comprendían los diferentes modelos que se les presentaban en el proceso de enseñanza de los números negativos, basándose en una clasificación realizada por Janvier (1983), quien destaca que los modelos de enseñanza podrían agruparse en tres: modelo de equilibrio, modelo de la recta y modelo híbrido. El primero de ellos -modelo de equilibrio- representa pares de cosas opuestas entre sí; por ejemplo, cargas positivas y cargas negativas, fichas blancas (positivo) y fichas naranjas (negativo). En el segundo grupo, denominado modelo de la recta, los números son vistos como posición sobre la recta y desplazamiento en la misma. Por último, el modelo híbrido, utiliza, tanto la recta como el equilibrio (el ascensor). Las diferentes investigaciones de este tipo intentaron establecer las ventajas y desventajas de cada uno de estos modelos llegando a la conclusión de que no existe modelo alguno que sea el más adecuado; sin embargo destacan que las mayores dificultades se hallan en la resta de números negativos y, prácticamente, no hacen referencia a la operación del producto en \mathbb{Z} . También, es importante destacar aquellas investigaciones que centraron su atención en determinar los errores, dificultades, concepciones erróneas y

niveles de conocimiento de los estudiantes, a partir de la utilización de alguno de los modelos anteriormente señalados. En ese sentido, evaluaron diversas propuestas de enseñanza y determinaron el nivel de logro de los alumnos en cada una de ellas; los resultados fueron diversos, pero destacan las dificultades en los problemas con datos que contengan diferentes signos (Bruno & Martín, 1996).

Más recientemente, Cid (2003) realiza una revisión de los trabajos relativos a los números enteros negativos y señala que los mismos se podrían clasificar en tres grandes grupos: propuestas de enseñanza; dificultades en el aprendizaje y errores en los alumnos e, implicaciones didácticas de la epistemología del número negativo. Entre las conclusiones a la que llega la autora, una vez realizada una amplia consulta bibliográfica son las siguientes: El estudio de los obstáculos epistemológicos en los números negativos ha generado una gran discusión y a la vez ha generado numerosas acepciones de éste. Los métodos para el estudio de los obstáculos epistemológicos -tanto en la historia de las matemáticas como en los alumnos- no han sido del todo claro. Sobresalen los trabajos de Glaesser (1981) quien propuso que el estudio de los obstáculos epistemológicos en los números negativos en la historia sea considerado al momento de la enseñanza de los números negativos,

afirmación que ha generado igualmente controversia; no obstante -a decir de la autora y basándose en su revisión bibliográfica- el concebir al número como medida resultó ser un obstáculo histórico y a la vez, sugiere reflexionar acerca de la posibilidad de que esta misma situación genere igualmente problemas desde la perspectiva de lo didáctico (Cid, 2003). Sin embargo, la realidad en la escuela es diferente. La utilización de referentes concretos en la enseñanza de los números enteros y específicamente, de los negativos, predomina sobre cualquier otro tipo de referente, como los de tipo algebraico, por ejemplo. Una muestra de ello es la misma bibliografía existente -sobretudo de textos escolares- donde predomina el abordaje de la enseñanza de los números negativos a través de modelos concretos. En el caso particular venezolano, basta ver los textos escolares de 6to y 7mo grado de la Educación Básica para que verifiquemos que lo señalado por la misma autora no es en nada diferente. La gran mayoría de los trabajos de investigación y las diferentes propuestas didácticas, se inclinan por la iniciación del niño/a en el estudio del conjunto de los números enteros, haciendo uso de referentes concretos.

Esta panorama de lo que han sido las investigaciones y trabajos referidos a los números enteros nos lleva a afirmar que los mismos mantienen tres características fun-

damentales: se centran en los números enteros negativos, se organizan en torno a la eficiencia de la utilización de referentes concretos y hay escasa presencia de trabajos donde los docentes – en ejercicio o en formación – son objeto de estudio. Dentro de este último tipo de investigaciones - las referidas a los docentes - nos parece importante destacar el trabajo de Bruno & García (2004). Al respecto, estos autores estudian una población de estudiantes próximos a trabajar en el campo de la docencia en Matemática. Ellos centraron su atención en analizar la clasificación que éstos hacían respecto de los problemas aditivos con números enteros asociados a referentes concretos, según las estructuras de los enunciados; para ello utilizaron como referencia los trabajos de Vergnaud (1990, 1991) sobre los problemas aditivos. Las conclusiones del trabajo se pueden sintetizar en dos: la redacción de los enunciados son relevantes al momento de la clasificación de los problemas y, los criterios utilizados consideraban, mayoritariamente, las tres situaciones numéricas implicadas en los problemas aditivos; estos son, *los estados* “que expresan

la medida de una cantidad de una cierta magnitud, asociada a un sujeto en un instante (debo 2)” (Bruno & García, 2004: 27), *las variaciones* que en un enunciado expresan el cambio de un estado en un lapso de tiempo (perdí...) y, por último, aquellas que manifiestan las diferencias entre dos estados (tengo “n” más que tu...).

Junto a este conjunto de investigaciones relativas a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números enteros¹, nos encontramos también con otro campo de estudio de la Educación Matemática como es el del conocimiento didáctico matemático presente en los docentes. Cualquier proceso de transformación educativa en Matemática pasa necesariamente por la actuación del docente, la cual está condicionada, en buena medida, a su conocimiento profesional (Parra, 2005; Azcárate, 1996). En el presente caso, la población objeto de estudio fueron docentes en ejercicio, en proceso de profesionalización universitaria; quienes constituyen un referente fundamental que nos muestra si el trabajo de formación de nuevas generaciones de docentes de Matemática nos está garantizan-

1 Es preciso aclarar que en el presente trabajo cuando hablemos de *número entero* nos referiremos indistintamente a los negativos o positivos, aun cuando en la población estudiada *número entero* era considerado sinónimo de número negativo. Esto es un error, pero que por los alcances de este trabajo nos limitaremos sólo a realizar esta aclaratoria.

do el logro o no de los propósitos educativos que se plantean las instituciones educativas responsables de su formación. En ese sentido, si queremos mejorar, o mejor, transformar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números enteros, un campo prioritario es el estudio de las relaciones existentes entre la enseñanza de los números enteros y el conocimiento didáctico matemático que se pone en juego por parte de los docentes al momento de planificar, ejecutar y evaluar procesos de enseñanza referidos a este aspecto de las Matemáticas. Al respecto, Segovia y Rico (2001) manifiestan que al momento de planificar, el docente deja claro lo que pretende realizar con sus alumnos y es por ello que toma en consideración varios aspectos, que implican los diferentes significados que desde la Matemática escolar deberían plantearse. Estos aspectos son lo que ellos denominan *organizadores del currículo* y que no son más que "aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (Segovia & Rico, 2001: 88). El término *organizadores del currículo* se enmarca en la perspectiva de la fenomenología de Freudenthal, quien manifestaba que los conceptos matemáticos son los medios que organizan los diferentes fenómenos del mundo (Freudenthal, 1983; Puig, 2004) y en ese sentido,

desde la perspectiva de la matemática escolar, en este trabajo el concepto de número entero fue el organizador del trabajo que se propusieron los docentes estudiados a construir como objeto matemático en el marco del diseño de una situación de aprendizaje.

Freudenthal (1983) distingue cuatro tipos de fenomenologías caracterizadas cada una de ellas en función de los fenómenos que aborda. La primera -de naturaleza epistemológica- es denominada *fenomenología* como tal; en ella los fenómenos están organizados matemáticamente en función de su momento y estado actual; se trata en definitiva de un producto cognitivo en la medida que describe los objetos (Freudenthal, 1983). Otro tipo de fenomenología es la *histórica*, ella aborda los fenómenos que dieron origen al concepto en cuestión y cómo éste se extendió a otros fenómenos. Una tercera fenomenología denominada *genética*, aborda los fenómenos relativos a los procesos cognitivos puestos en juego en las diferentes situaciones de aprendizaje y por último, la fenomenología *didáctica*, que se encuentra en el mundo de los estudiantes y lo que se proponen en la secuencia de enseñanza. Basados en esta clasificación de los diferentes tipos de fenomenología antes descritos, podemos entonces agrupar los siete organizadores del currículo propuestos por Segovia & Rico (2001) de la siguiente manera:

Cuadro 1. Categorización de los organizadores del currículo en función del tipo de fenomenología asociada a un concepto.

Tipo de fenomenología	Organizador(es) del currículo
Fenomenológica	Fenomenología, sistemas de representación, modelos
Histórica	Historia de las matemáticas
Didáctica	Materiales, medios o recursos; resolución de problemas
Genética	Errores y dificultades

Fuente: Elaboración propia. 2006.

Organizadores de tipo fenomenológico

Los organizadores de tipo fenomenológico poseen una naturaleza epistemológica; ellos tienen que ver con la construcción del objeto matemático, en este caso, de los números enteros. El primero de los organizadores del currículo es el referido al conjunto de fenómenos con los cuales un concepto matemático está relacionado y se denomina *fenomenología*. En nuestro caso, son todos aquellos fenómenos vinculados a los números enteros. Los fenómenos, podemos clasificarlos en niveles: un primer nivel es el constituido por objetos del mundo real y las acciones que se generan en torno a ellos, dando lugar a conceptos y estructuras matemáticas; por ejemplo, es usual en el mundo escolar presentar fenómenos de este nivel, tales como, los problemas de aceleración y desaceleración de móviles (un autobús acelera a razón de..., un avión al tocar la pista desacelera...) o las situaciones de ganancia-pérdi-

da (al salir de mi casa tenía tres lápices y al llegar por la tarde sólo me quedaba uno...). Estos fenómenos que frecuentemente se les presentan a los alumnos en su paso por las instituciones educativas son, sin embargo, cuestionados por algunos autores (Cid, 2003) aunque al respecto no existe unanimidad alguna, como se señala en una publicación reciente como lo es *Handbook of Research on Psychology of Mathematics Education* (2006). En el mismo al hacer un balance de los trabajos presentados durante las treinta ediciones de la conferencia anual del PME, se manifiesta

“As pointed out by Linchevski and Williams (1996), there is a continuing debate about whether negative numbers should be introduced through models and/or concrete representations or as formal abstractions, as argued by Fischbein (1987) (p. 66)”.

En el presente trabajo nos limitaremos al análisis de lo presentado por los futuros docentes y es por ello que dejamos a futuro la discusión de la conveniencia o no de la

utilización de los referentes concretos. Sin embargo, es importante señalar que llegar a trabajar este nivel “de lo concreto” exclusivamente, no significa que el concepto de número entero haya sido adquirido; ya que el concepto de número entero en sí mismo es un ente abstracto. En el caso de los procesos de formación docente esta observación es clave; ya que se tiende a creer que al abordar fenómenos del primer nivel es suficiente para consolidar el concepto. La historia misma se ha encargado de demostrar que eso es insuficiente. La legitimidad de los números enteros se logró después de superar diversos obstáculos que lo arraigaban a situaciones reales; superada esta situación los números enteros llegan a consolidarse como un objeto matemático (Glaeser, 1981; Pereira, 2000). Por ello, este primer nivel en todo caso daría pie a subsiguientes niveles; porque estos conceptos y estructuras matemáticas se constituyen en fenómenos que generan conceptos y estructuras de mayor grado de abstracción, constituyéndose en los fenómenos de segundo nivel (Segovia & Rico, 2001). Un caso de ellos relacionado con los números enteros es un problema donde se plantea la interpretación de la expresión siguiente:

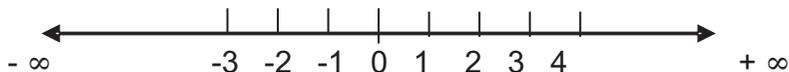
$$A = \frac{-\Delta v}{\Delta t^2}$$

En este caso no se refiere a un móvil en particular, lo cual implica una mayor abstracción, pero la expresión muestra la desaceleración de un móvil, no importando las características de éste. De igual manera podemos continuar sin dejar de lado el concepto de número entero tal y como hoy se entiende. Esta sucesión de fenómenos irá paulatinamente generando conceptos y estructuras de mayor complejidad, lo que podríamos imaginar como una espiral en creciente grado de complejidad.

Otro organizador de este tipo lo constituyen los sistemas de representación, que no son más que los símbolos y gráficos a través de los cuales se expresan los diferentes conceptos y procedimientos matemáticos. Las representaciones podrían ser de carácter simbólico; por ejemplo, los números enteros lo representa un número n cualquiera $(-1, 0, 76, \dots)$. Otro tipo de representación es de carácter gráfico; en nuestro caso la recta numérica es un ejemplo de ello (Gráfico 1).

Un tercer organizador de tipo fenomenológico lo constituyen los modelos; ellos muestran la relación que existe entre los fenómenos y los

Gráfico 1. Representación de los números enteros en la recta numérica



Fuente: Elaboración propia. 2006.

conceptos. Un tipo de modelo puede ser el concreto; éstos representan una idea Matemática mediante un objeto perceptible al tacto. En nuestro caso, mediante fichas de colores diferentes – por ejemplo, azules y verdes – podemos relacionar las fichas verdes como número negativo y las azules como números positivos. Otro tipo de modelo es el de carácter pictórico: representa la idea matemática mediante diagramas o ilustraciones. En nuestro caso, podría ser el siguiente: (Gráfico 2).

Otro tipo de modelos, son los denominados simbólicos; ellos representan fenómenos mediante estructuras o relaciones matemáticas. Un ejemplo, es la ubicación de un punto en el plano utilizando coordenadas cartesianas; por ejemplo, el punto (-2,4).

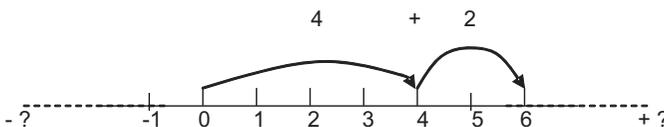
Organizadores de tipo didáctico

Los organizadores de este tipo se ubican en el mundo de los estudiantes e intervienen de manera directa en el proceso de enseñanza. El primero de estos organizadores es el referido a los materiales, medios o recursos; es decir, los elementos que considera un

docente como herramientas que facilitan el logro de los propósitos que se aspira obtener, todo ello desde una perspectiva donde el alumno juega un rol participativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Un ejemplo de ello, mencionado anteriormente, es el caso de la utilización de fichas de dos colores diferentes para trabajar la adición en el conjunto de los Z. Este tipo de recursos es denominados de “equilibrio” (Janvier, 1983) o “modelos de neutralización” (Cid, 1983). Las características de este tipo de recursos es que se refieren a cantidades de magnitud opuestas.

El otro organizador de orden didáctico es el referido a la resolución de problemas; el mismo debería estar presente en la planificación de cualquier situación de aprendizaje, dado que constituye una de las principales estrategias de la Educación Matemática. Entre las razones de su importancia podríamos señalar tres de ellas: en primer lugar, la resolución de problemas está vinculada estrechamente a nuestra cotidianidad; son muchos los problemas matemáticos de diferentes complejidades, que se presentan a lo largo de nuestras vidas. En segun-

Gráfico 2. Modelo de adición de números enteros



Fuente: Elaboración propia. 2006.

do lugar, la resolución de problemas se aplica a muchos otros campos no matemáticos, como el de las Ciencias Naturales y las Ciencias Económicas, por tan solo citar dos ejemplos. Por último, la resolución de problemas contribuye fuertemente a los procesos de razonamiento, ya que al momento de plantearse la solución de un problema, se ponen en juego un conjunto de mecanismos cognitivos importantes, tales como, discriminación de la información y la toma de decisiones.

Organizadores de tipo genético

Este tipo de organizador se caracteriza por abordar los fenómenos desde la perspectiva de los procesos cognitivos. En este caso nos referimos a los posibles errores y dificultades que pueden generarse en los alumnos al momento del desarrollo de situaciones de aprendizaje producto de su desarrollo cognitivo. En el contexto de la tradición escolar estos errores o dificultades son aspectos normalmente ignorados en el aula, dado que la tradición conductual de nuestra educación, caracterizada entre otras cosas, por la linealidad con la que se conciben los procesos de enseñanza y aprendizaje, presupone que éstos no deberían existir si el alumno sigue los pasos planteados. Sin embargo, está demostrado por la experiencia per-

sonal de los docentes y de investigaciones al respecto (Vergnaud, 1989), que esa no es la realidad.

Organizador de tipo histórico

Desde el punto de vista de una fenomenología histórica, se trata de organizar el conocimiento en función del origen, evolución y expansión de dicho concepto a lo largo de la historia. Este organizador es la historia de las Matemáticas y constituye un elemento orientador del proceso de enseñanza, lo cual permite una visión del conocimiento matemático como producto cultural de la humanidad. Al igual que los errores y dificultades, la tradición educativa deja de lado la historia como elemento comprensivo que permitiría a los alumnos concebir la Matemática como producto del desarrollo de la humanidad en continua evolución. Al contrario, la tradición educativa nos muestra en la escuela un saber perfectamente acabado y al que no se le puede agregar nada más.

Acerca de los números enteros -específicamente con los números enteros negativos- podemos señalar que autores como Glaeser (1981) han hecho estudios sobre las diferentes dificultades que se confrontaron en el desarrollo histórico de la conceptualización de los números enteros, destacando los siguientes:

- Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas. A

- través de la obra de Diofanto (S. III d.c.) se evidencian cálculos algebraicos de diferencia y multiplicación y se enuncia la regla de signos, más no se aceptan los números negativos de manera aislada.
- Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas. En obras de D'Alambert y Carnot, entre otros, se hallan soluciones negativas a diferentes ecuaciones, pero se niegan a aceptar los resultados como cantidades "reales"; las consideraron ficticias y manifestaron que las mencionadas ecuaciones tenían su origen en problemas defectuosos.
 - Dificultad para unificar la recta real. Entre los matemáticos de la época -Cauchy, D'Alambert, Mc Laurin, entre otros- aunque se representaban los números negativos y positivos como dos semirrectas opuestas, se concebían los números negativos y positivos como de naturaleza diferente, lo cual impedía considerarlos en una única recta numérica.
 - Ambigüedad de los dos ceros. En la historia de los números enteros hubo una gran dificultad en la época de los matemáticos Stevin, Mc Laurin, Cauchy, y Carnot para superar la idea de un cero vinculado con la noción de cardinalidad, es decir, como ausencia de cantidad y, de esta manera, pasar a una noción de un cero de origen arbitrario. La gran dificultad radicaba en no entender un número "menor que nada".
 - Estancamiento en el estadio de las operaciones concretas. Pasar de unos números "descubiertos" en la vida real a números "inventados" resultó muy difícil a decir de Glaeser (1981). No fue sino hasta el siglo XIX cuando esto sucede.
 - Deseo de un modelo unificador. Por último, este obstáculo aun vigente, consiste en el deseo de poder conseguir un modelo que partiendo de la realidad, pueda ser unificador tanto en lo que se refiere a la adición en Z como a la multiplicación. Esta situación se ve sobretodo en el deseo desde el mundo de la enseñanza, de vincular el producto en Z con elementos de la realidad cercana al alumno, lo cual ha sido muy difícil de lograr (Glaeser, 1981; Pereira, 2000).
- Estos obstáculos que la historia nos muestra, pudiesen constituir un referente importante y como tal, un organizador clave del currículo como lo plantean Segovia y Rico (2001). Glaeser (1981) así lo propone para el caso específico de la enseñanza de los números negativos, aunque al respecto no existe, como ya es común a este conjunto numérico, unanimidad (Cid, 2003).

Finalmente creemos que los organizadores del currículo constituyen parte fundamental de todo proceso de planificación, ejecución y evaluación de situaciones de aprendizaje. En razón de ello, en este trabajo consideramos que un aspecto relevante en los estudios relativos a la formación de docentes de matemática es la necesaria reflexión que debe hacerse en torno a los conocimientos que se ponen en juego por parte de los docentes al momento de planificar un tema igualmente relevante, como es el de la enseñanza de los números enteros. En ese sentido, los organizadores del currículo junto con los estudios acerca de los números enteros antes mencionados, constituyeron los principales referentes teóricos para nuestra investigación, tal y como lo veremos a continuación.

Objetivos de la investigación

Ante la dificultad que representa el estudio de los números enteros en los alumnos y, como formador de profesores, nos planteamos como objetivo describir, analizar y caracterizar los organizadores del currículo presentes en las planificaciones relativas a la introducción del concepto del número entero en la tercera etapa de la Educación Básica, en profesores no graduados que ejercen la docencia en matemática y que están en proceso de cul-

minar sus estudios en el área. El propósito de este análisis fue aproximarnos al modelo de enseñanza dominante en este tipo de grupo de estudiantes, próximos a obtener la Licencia para ejercer a plenitud la docencia en matemática.

Escenario de la investigación

El estudio se llevó a cabo con estudiantes que ejercían la docencia en Matemática, pero carecían de una Licenciatura en Educación. Sus estudios universitarios previos estaban enmarcados en las áreas de las Ciencias Económicas (Administración, Contaduría y Economía) y la Ingeniería; uno solo de ellos tenía estudios de arquitectura. Este grupo estaba conformado en su mayoría -77,8%- por estudiantes cuya residencia y lugar de trabajo estaban situados en poblaciones rurales. La recolección de la data fue realizada durante el desarrollo de sus Prácticas Profesionales cursadas en el último semestre de la carrera. En el marco de ese contexto, se les pidió que presentaran la planificación de una clase, con sus respectivos soportes, en la que iniciaran el tema de los números enteros con niños de séptimo grado, cuyas edades oscilaban entre los 11 y 13 años. No se les señalaron más instrucciones, ya que la idea era que las plantearan, tal y como ellos lo consideraban más acertado.

Recolección y tratamiento de la información

La metodología tuvo características exploratorias. Se realizó un análisis documental de las propuestas de trabajo de clase (planificaciones) presentadas por los estudiantes próximos a obtener su Licenciatura en Educación Matemática, así como la revisión de cuadernos de los alumnos de estos futuros Licenciados. Para el análisis, centramos la atención en los elementos organizadores del currículo que se consideraron en las planificaciones (Cuadro 2). Además, a cada uno se le hizo una entrevista no estructurada donde se escuchaban las explicaciones argumentativas en relación a la propuesta que presentaban.

Tal y como ya lo señalábamos, al inicio de sus Prácticas Profesionales se solicitó a los estudiantes que presentaran una planificación de una clase donde se abordaría el estudio de los números enteros con estudiantes del séptimo grado de la Educación Básica. Las instrucciones fueron mínimas para evitar un sesgo en sus respuestas; de esta manera, se les instruyó a realizar sus planificaciones como ellos consideraran más conveniente y acorde con lo que en realidad ellos hacían en su ejercicio como docentes de Matemática. Con el fin de constatar la veracidad de lo planificado con lo que usualmente realizaban en clase, se les pidió que mostraran cuadernos

de sus alumnos donde habían trabajado el tema, lo que permitió validar en gran medida la coherencia de las planificaciones propuestas con su práctica usual.

Organizadores de tipo fenomenológico. Resultados

En el marco del análisis de las planificaciones de los estudiantes para profesor de Matemática, el primer aspecto estudiado fue la incorporación o no de situaciones – problemas que permitiesen ver si el aspecto fenomenológico estaba presente en la planificación. En ese sentido, se mostró una tendencia dominante en su incorporación con el objetivo de iniciar el tema; ochenta y tres por ciento de las planificaciones analizadas presentan situaciones problemáticas (Gráfico 3), contra 16,6% que obviaron tales situaciones y se inclinaron únicamente por el cálculo de las operaciones como estrategia para el estudio de aspectos relativos a los números enteros. Cuando analizamos los fenómenos planteados, notamos que todos eran del nivel I y a excepción de uno de ellos, utilizaron problemas bajo el contexto de ganancia – pérdida. Ninguno de los tipos de problemas aditivos planteados por Vergnaud (1990, 1991) y Bruno & García (2004) predominó en las planificaciones presentadas; sin embargo, la alta frecuencia de este tipo de fenómenos para utilizarlos en la introducción de temas, nos lle-

Cuadro 2. Categorías de Análisis

Tipo de fenomenología	Categorías	Propiedades
Fenomenológica	Fenómenos	<ul style="list-style-type: none"> • Presencia • Nivel
	Sistemas de representación	<ul style="list-style-type: none"> • Simbólica • Gráfica
	Modelos	<ul style="list-style-type: none"> • Concreto • Pictórico • Simbólico
Didáctica	Materiales, medios o recursos	<ul style="list-style-type: none"> • Presencia • Tipo
	Resolución de problemas	<ul style="list-style-type: none"> • Presencia • Tipos
Cognitiva	Errores y dificultades	<ul style="list-style-type: none"> • Errores • Dificultades
Histórica	Historia de las Matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Anecdótica • Contextualizada

Fuente: Elaboración propia. 2006.

vó a interrogar a los estudiantes al respecto. Todos los entrevistados que hicieron uso de estos fenómenos para iniciar un tema -sin excepción- manifestaron que la única utilidad desde el punto de vista didáctico, era que los mismos ofrecían al docente una vía expedita para introducir al alumno en el tema de los números enteros. Esta tendencia a presentar al inicio fenómenos del nivel I y asociados en su gran mayoría a problemas de ganancia y pérdida, presentaba coherencia con la historia personal de los entrevistados, donde 77,8% de los estudiantes habían cursado carreras relacionadas con en el campo de las Ciencias Económicas.

Un segundo aspecto estudiado se refirió a los sistemas de representación que promovían en las planificaciones. Se halló que los mismos fueron de tipo gráfico; ya que se limitaron exclusivamente a la recta numérica (Gráfico 4).

En cuanto a los modelos se evidenció su presencia en sólo dos de las planificaciones. Una de ellas abordó -a través de una figura de unas balanzas- la introducción a la conceptualización del conjunto de los números enteros utilizando un modelo de tipo pictórico (Gráfico 5). La segunda, contempló la representación de la potencia de los números enteros a través de un árbol genealógico (modelo simbólico).

Gráfico 3. Fenómenos asociados a problemas de ganancia-pérdida

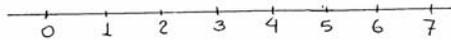
Situaciones:

1. Cómo podrá el Sr. Pedro, quien tiene un abasto, reanotar las anotaciones en su cuaderno cuando le pida a alguien algunos alimentos y esta persona le pague sólo una parte de la deuda.

Fuente: Elaboración propia. 2006.

Gráfico 4. Fenómenos asociados a variaciones

2. Si una persona se encuentra en la posición 1 de la figura:



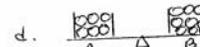
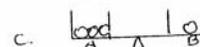
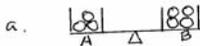
- ¿Cómo indicar si quiere avanzar tres lugares?
 ¿Y si quiere retroceder?

Fuente: Elaboración propia. 2006.

Gráfico 5. Modelo de la balanza

1. Si en la balanza, A representa los números negativos, y la balanza B los números positivos, y colocamos en ellas cajas iguales que contienen metras de igual medida. Responder en cada ejemplo:

1. Hacia donde se inclinará la balanza
2. ¿Por qué?
3. Escribe la operación realizada



... está inclinada en un punto

Fuente: Elaboración propia. 2006.

co); sin embargo, este último modelo no resultó del todo pertinente – a juicio de la misma persona que lo propuso - ya que contemplaba sólo el caso de los números enteros positivos.

Organizadores de tipo didáctico. Resultados

Un segundo tipo de organizadores estudiados fueron los de tipo didáctico; es decir, aquellos organizadores propuestos por Segovia & Rico (2001) que se ubicaban en el mundo de los estudiantes y que tenían que ver directamente con el proceso de enseñanza de los números enteros. El primero de estos organizadores fue el referido a los materiales, medios y/o recursos que se planteaban en las planificaciones. Entre ellas resaltó el hecho de que en ninguna planificación se optó por algo diferente a la utilización de la pizarra y la presentación de una guía de ejercicio. La falta de diversidad de materiales y recursos se justificó de parte de los estudiantes porque señalaban que en las instituciones educativas donde laboraban la escasez de materiales didácticos era evidente; sin embargo, en la entrevista profundizamos en estas respuestas y se evidenció que unido a esta realidad se añade el hecho de que la población objeto de estudio desconoce otro tipo de recursos o materiales.

El otro organizador analizado fue el de la resolución de problemas. Importaba destacar la presencia o no de esta estrategia; ya que ella constituye -como lo señalamos anteriormente- la principal estrategia para mediar en los procesos de construcción del conocimiento matemático. En un 83,3% de las planificaciones se contempló su uso; sin embargo, su papel se limitó a ser un elemento “reforzador del conocimiento aprendido en las clases previas” tal y como fue manifestado por los estudiantes en las entrevistas que se les realizó.

Organizadores de tipo cognitivo. Resultados

Los organizadores de tipo cognitivo son aquellos que tienen que ver con la naturaleza cognitiva de los estudiantes. Interesaba saber si en las planificaciones planteadas era considerada la previsión de las posibles dificultades y errores que se podrían generar por parte de los alumnos. En ninguno de los casos estudiados se previó algo al respecto. Durante la entrevista se evidenció que estos aspectos no se plantearon debido a que no se consideraba necesario presentarlos en la planificación; al fin y al cabo -como señalaba uno de ellos en la entrevista- “no hace falta escribirlo, uno sabe por experiencia que es lo que es difícil y lo que no lo es para el alumno”.

Organizadores de tipo históricos. Resultados

Se trataba de ver si se organizaba el conocimiento en función del origen, evolución y expansión del concepto de los números enteros en la historia; ya que al incorporar la historia de las Matemáticas en la planificación de las situaciones de aprendizaje se pudo haber facilitado la comprensión de lo que es el conjunto de los números enteros como producto de la cultura matemática.

Cabe destacar que aunque inicialmente no se pretendía solamente que se presentaran situaciones o anécdotas aisladas acerca de los números enteros, ninguna de las planificaciones contempló algo al respecto. La ausencia de este organizador se comprendió al momento de realizar las entrevistas; tres personas al interrogarles al respecto mostraron extrañeza al preguntarles las razones de su ausencia y el resto, planteó que si era importante la historia, pero en el caso de los números enteros desconocían su aparición, proceso de evolución y legitimación de dicho conjunto numérico.

Conclusiones

Las conclusiones las podemos agrupar en dos partes. La primera es la presencia o no de los organizadores del currículo en las planificacio-

nes y la segunda, se refiere a las características de éstos.

En cuanto a la presencia o no de los organizadores, una primera conclusión general, es que no todos los organizadores que plantean Segovia & Rico (2001) estuvieron presentes de manera explícita en las planificaciones de clase; esto no quiere decir que no fueron tomados en consideración. Es probable que, de manera implícita, aspectos como el de los errores y dificultades que se presentan en los alumnos hayan sido considerados por los docentes de la población estudiada; ya que en diversas oportunidades en la entrevista ellos manifestaron que dichas planificaciones partían de sus experiencias como profesionales de la docencia de matemática y en las mismas consideraban "que era más fácil o más difícil para los alumnos". En el caso de la historia como elemento constitutivo de las planificaciones, si se evidenció un desconocimiento de su importancia didáctica y un desconocimiento de la historia de las matemáticas en si misma, especialmente en lo que se refiere a la evolución histórica del conjunto de los números enteros.

En cuanto a los organizadores que si estuvieron presentes, podemos destacar la presencia dominante de los de tipo fenomenológico. En ese sentido resaltaron los fenómenos de tipo 1; ya que en las planificaciones se planteó la incorporación de situaciones próximas al

contexto vivencial de los alumnos. Esto podría resultar alentador para los que consideramos que lo fenomenológico es fundamental que esté presente en el proceso de enseñanza de la Matemática. Sin embargo, no es menos cierto que, en los casos estudiados, se restringió a los fenómenos de referencia concreta. De igual manera es importante señalar que el uso que se le dio a estos fenómenos fue de carácter introductorio al tema.

El otro organizador que sobresalió por su presencia fue el de la resolución de problemas, el cual es parte de los organizadores de tipo didáctico. Lo resaltante en este caso fue el hecho de que la resolución de problemas apareció en todas las planificaciones estudiadas; sin embargo se limitó un papel secundario, como "refuerzo de lo aprendido", tal como lo manifestaron los estudiantes entrevistados.

Respecto a las características de los organizadores presentados, la escasez de planteamientos alternativos diferentes a los tradicionales en relación con los sistemas de representación, los modelos y recursos, evidencia la dificultad de trazarse una enseñanza de las Matemáticas que aborde desde múltiples perspectivas su forma de estudiarla. La falta de diversidad en las maneras de abordar el estudio de los números enteros resultó contraria a los

que creemos que uno de los grandes retos de la Educación Matemática es el de ofrecer a los alumnos diversas maneras de abordar la matemática, con el fin de posibilitar el desarrollo de un pensamiento capaz de enfrentar diversas situaciones problemáticas en múltiples contextos.

Todo lo expuesto, permite afirmar que las planificaciones de los estudiantes que han sido objeto de análisis, nos muestran una tendencia a concebir la enseñanza de los números enteros enmarcadas en un modelo en proceso de transición entre una visión conductual, caracterizada por la transmisión de habilidades basada en la repetición de ejercicios o problemas, a otra, basada en la instrucción en el manejo de las habilidades utilizando la resolución de problemas aplicados en este caso al conjunto Z (Gómez & Valero, 1996). Las consecuencias de esta realidad en los estudiantes constituyen un reto para nosotros como formadores de educadores matemáticos. Los que consideramos que la Educación Matemática tiene como finalidad la formación de un pensamiento crítico en los que aprenden, supone el desarrollo de programas de formación docente cuya característica fundamental sea la conformación de un pensamiento profesional donde la discusión, la investigación y el cuestionamiento sean sus aspectos más resaltantes.

Referencias Bibliográficas

- AZCÁRATE, P. (1996). **Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad**. Editorial COMARES. Colección Mathema. España.
- BRUNO, A. & MARTINÓN, A. (1996). Números negativos: sumar = restar. *Uno*, 10, 123-133.
- BRUNO, A. & GARCÍA, J. A. (2004). **Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos**. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (1), 25-46.
- GALLARDO, Aurora (1996). El paradigma cualitativo en matemática educativa. Elementos teórico-metodológicos de un estudio sobre números negativos. En Hitt Espinoza, Fernando (Editor) **Investigaciones en Matemática Educativa** (pp. 197-222). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- GLAESER, G. (1981). *Épistémologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mathématiques*. 2/3. 303-346.
- GÓMEZ C.; VALERO, P. (1996). **Calculadoras gráficas y precálculo: el impacto en las creencias del profesor**. Recuperado el 16 de noviembre de 1998 en <http://www.uniandes/unaempresadocente>
- GONZÁLEZ, José L.; ORTIZ; IRIARTE, María D.; JIMENO, Manuela; ORTIZ, Alfonso; ORTIZ, Antonio; SANZ, Esteban; VARGAS – MACHUCA, Inmaculada (1990). España. Editorial Síntesis.
- JANVIER, C. (1983). **The Understanding of directed numbers**. *Proceedings VIII PME*, 295-301.
- PARRA S., Hugo (2005). **Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto**. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (1), 69-90.
- PEREIRA DA SILVA, D. (2000). **Epistemología dos números relativos**. (Documento en línea).
- PIAGET, Jean (1960). **Introducción a la epistemología genética, I. El pensamiento matemático**. Biblioteca de Psicología Educativa, Paidós, Buenos Aires, Argentina.
- RIBEIRO, R. (1996). Las cuatro operaciones con enteros a través de juegos. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 7, 37-59.
- SEGOVIA, I. & RICO, L. (2001). **Unidades didácticas**. Organizadores. En Castro, Enrique (Editor) **Didáctica de las Matemática en la Educación Primaria**. (pp. 83-104). Síntesis. España.
- VERGNAUD, G. (1989). *L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre*. En Bednarz, A. et Garnier, C. (Eds.) **Construction des savoirs**. (pp. 76-83). Montreal, Canada: Cirade.
- VERGNAUD, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels*. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, 10 (2.3), 133-170.

VERGNAUD, G. (1991). **El niño, las Matemáticas y la realidad**. Trillas. México.

Numerical Thinking Lieven Verschaffel, Brian Greer and

Joke Torbeyns. Handbook of research of the Psychology of Mathematics Education. Ángel Gutierrez & Paolo Boero (Editors). Sense Publishers. Rotterdam/Taipei.