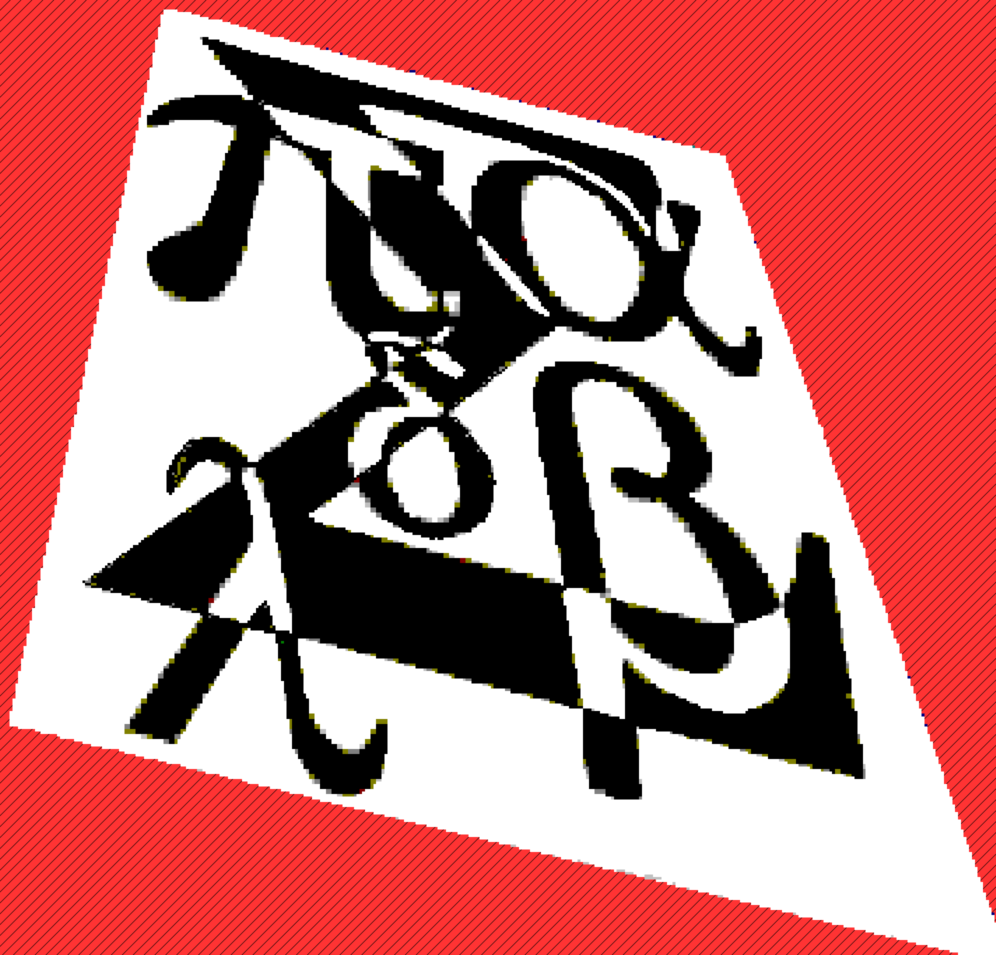
Universidad del Zulia

Divulgaciones Matemáticas



Departamento de Matemática

Depósito legal: pp 199302ZU392
ISSN 1315-2068

Maracaibo - Venezuela

Facultad Experimental de Ciencias

Vol. 19 - No. 1 - 2018

Divulgaciones Matemáticas

Revista Matemática de la Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Departamento de Matemática

Revista arbitrada, publicada de forma digital, de libre acceso, indizada en Mathematical Reviews, MathSci online/CD-ROM, Zentralblatt für Mathematik y Revencyt. Se publica un volumen anual compuesto por dos números, que aparecen en junio y diciembre.

Portada diseñada por Tobías Rosas Soto, basada en un diseño de Javier Adolfo Ortiz.

Dirección Postal:

Revista Divulgaciones Matemáticas
Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526
Maracaibo, Estado Zulia
Venezuela

Correo electrónico: `divulgaciones@demat-fecluz.org`

URL: `divmat.demat-fecluz.org`

Depósito Legal pp 199302ZU392

Compuesta con LaTeX y AMS-LaTeX en el Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de ciencias, Universidad del Zulia.

Universidad del Zulia

Maracaibo, Venezuela

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS

Vol. 19 2018 No. 1

Presentación

El Comité Editorial de ***Divulgaciones Matemáticas*** se complace en presentar el **Vol. 19**, **No. 1**, **2018**. En el presente número están contenidos los artículos procesados durante el primer semestre del año **2018** que fueron evaluados y aceptados para su publicación.

Es importante resaltar que la revista recibió un total de 12 manuscritos, que fueron sometidos para su evaluación y posible publicación. Dos de estos trabajos no cumplían con el formato de la revista, por lo cual fueron rechazados y se invitó a los autores respectivos a escribir sus artículos usando la plantilla de la revista, sin obtener respuesta. Cinco (5) manuscritos fueron aprobados para su publicación, cumpliendo los requisitos que pide la revista y aprobando la evaluación de los árbitros respectivos, los cinco trabajos restantes siguen bajo evaluación.

El trabajo editorial relacionado con este número es el resultado del esfuerzo de algunos miembros del Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de Ciencias. Los Editores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible este número: a los autores de los trabajos que se presentan, que dieron su voto de confianza a la revista; a los árbitros que evaluaron los artículos, cuya labor desinteresada permitió satisfacer los estándares de calidad de la revista y mejorar sensiblemente la forma de los trabajos; al equipo editorial de ***Divulgaciones Matemáticas***; y en especial al Prof. José Heber Nieto por su aporte para la sección de ***Problemas y Soluciones***. A todos, mil gracias.

Por último, el Comité Editorial de ***Divulgaciones Matemáticas*** invita a la comunidad matemática venezolana e internacional a seguir dándonos su voto de confianza sometiendo sus trabajos en la revista para evaluación y posible publicación.

Dr. Alirio Peña [1]

Dr. Tobías Rosas Soto.[2]

Dr. Vinicio Ríos[3]

---

[1]Editor en Jefe de *Divulgaciones Matemáticas*

[2]Editor del presente número y Editor Adjunto de *Divulgaciones Matemáticas*

[3]Editor Asociado y Miembro del Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas*

Presentation

The Editorial Board of ***Divulgaciones Matemáticas*** is pleased to present the **Vol. 19**, **No. 1**, **2018**. Articles contained in this issue are those processed during the first semester of the year **2018** and were evaluated and accepted for publication.

It is important to note that the journal received a total of 12 manuscripts, which were submitted for evaluation and possible publication. Two of these articles did not comply with the format of the journal, so it was rejected and the authors were invited to write the articles using the template of the journal, without obtaining a response. Five (5) complied with the requirements requested by the journal and approved the evaluation of the respective referees, the remaining 5 works are still under evaluation.

The editorial work related to this issue is the result of the efforts of some members of the Department of Mathematics of the Experimental Faculty of Sciences. The Editors want to express their gratitude to all of those who made this issue possible: to the authors of the presented works, who gave their vote of confidence to the journal; to the referees, who evaluated the articles with selfless work, guaranteeing the quality standards of the journal and significantly improving the way of working; to the editorial team of ***Divulgaciones Matemáticas***; and especially to Professor José Heber Nieto, for his contribution to the ***Problems and Solutions*** section. To all of them, thanks a lot.

Finally, the Editorial Board of ***Divulgaciones Matemáticas*** invite the Venezuelan and international mathematical community to continue giving their support by submitting their articles to our journal for evaluation and possible publication.

Dr. Alirio Peña [4]

Dr. Tobías Rosas Soto.[5]

Dr. Vinicio Ríos[6]

[4]Chief Editor of *Divulgaciones Matemáticas*
[5]Editor of the present issue and Adjunct Editor of *Divulgaciones Matemáticas*
[6]Associate Editor and Member of the Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas*

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS
Vol. 19, No. 1, 2018

Contenido (Contents):

Divulgaciones Matemáticas Vol. 19, No. 1 (2018), pp. 1–19

Fifth order linear recurrence sequences and their positivity

Secuencias recurrentes lineales de quinto orden y su positividad

Vichian Laohakosol (fscivil@ku.ac.th)
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kasetsart University,
Bangkok 10900 Thailand

Pinthira Tangsupphathawat (t.pinthira@hotmail.com)
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Phranakhon Rajabhat University, Bangkok 10220, Thailand

Abstract

Consider a fifth order linear recurrence sequence with integer coefficients. The problem whether each of its elements is nonnegative is shown to be decidable.

Key words and phrases: Positivity problem, recurrence sequences, decidability.

Resumen

Considere una secuencia de recurrencia lineal de quinto orden con coeficientes enteros. Se muestra que el problema de si cada uno de sus elementos es no negativo es decidible.

Palabras y frases clave: Problema de positividad, secuencia recurrente, decidibilidad.

1 Introduction

A fifth order linear recurrence sequence considered here is a sequence of integers $(u_n)_{n\geq 0}$ satisfying

$$u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + a_3u_{n-3} + a_4u_{n-4} + a_5u_{n-5} \quad (n \geq 5), \tag{1}$$

where $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{Z} - \{0\}$. As elaborated in [10], there are three main decision problems related to linear recurrence sequences, namely,

- **The Skolem Problem:** Does a given linear recurrence sequence have a zero?
- **The Positivity Problem:** Are all the terms of a given linear recurrence sequence positive? This problem has two variations whether strict or non-strict positivity is required; here we are only interested in the non-strict case.

Received 12/03/2018. Revised 30/03/2018. Accepted 20/06/2018.
MSC (2010): Primary 11B37; Secondary 03D20.
Corresponding author: Vichian Laohakosol

- **The Ultimate Positivity Problem:** Is a given linear recurrence sequence ultimately positive, i.e., are all the terms of the sequence positive except possibly for a finite number of exceptions?

It is known ([10, Section 4], [5]) that the decidability of the positivity problem implies the decidability of the Skolem problem.

The *positivity problem* associated with (1) asks whether it is possible to decide whether $u_n \geq 0$ for all $n \geq 0$? At present, this problem remains open. However, certain partial results have already appeared. The positivity problem for sequences satisfying a second order linear recurrence relation was shown to be decidable by Halava-Harju-Hirvensalo in 2006, see [6]; see also [2] and [3]. The positivity problem for sequences satisfying a third or a fourth order linear recurrence relation was shown to be decidable in [7], [8] and [11]. We show here that the same conclusion holds for a fifth order linear recurrence sequence.

Theorem 1.1. *The positivity problem is decidable for each sequence of integers satisfying a fifth order linear recurrence with integer coefficients.*

Our analysis here treats all possible shapes of sequence elements similar to the fourth order case in [11]. Apart from many more cases to be scrutinized and tools employed in the fourth order case, there are certain noteworthy ingredients needed, namely:

- A result about spanning set of a $\mathbb{Z}$-module generated by finitely many (irrational) real numbers [2, Lemma 3];
- The multi-dimensional Kronecker-Weyl theorem [4, Theorems IV.I and IV.II], [2, Theorem 4];
- A result about values of a linear combination of cosine functions whose arguments are rational multiples of π [2, Lemma 7];
- A deep result about linear forms in logarithm [1].

2 Preliminaries

Our first auxiliary result gives an explicit shape of elements of a linear recurrence sequence with integer coefficients. The general characteristic polynomial associated with the recurrence relation (1) of order k is

$$\mathrm{Char}(z) := z^k - a_1 z^{k-1} - \cdots - a_{k-1} z - a_k.$$

Let all the distinct (nonzero) real roots of $\mathrm{Char}(z)$ be λ_m with multiplicities $\mu_m + 1$ where $\mu_m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m = 1, \ldots, r$, and let all the distinct (nonzero) complex conjugate pairs of the roots be $\gamma_j \left(= |\gamma_j| e^{i\theta_j}\right), \bar{\gamma}_j$ with multiplicities $\nu_j + 1$ ($\nu_j \in \mathbb{N}_0, j = 1, \ldots, s$), so that

$$\mu_1 + \cdots + \mu_r + 2\nu_1 + \cdots + 2\nu_s + r + 2s = k.$$

It is well-known [12] that each sequence element satisfying (1) has the form

$$u_n = \sum_{m=1}^{r} P_m(n)\lambda_m^n + \sum_{j=1}^{s} \left\{E_j(n)\gamma_j^n + F_j(n)\bar{\gamma}_j^n\right\} \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

where

$$P_m(n) := \sum_{a=0}^{\mu_m} A_{m,a}\, n^a \quad (A_{m,\mu_m} \neq 0; m = 1, 2, \dots, r)$$
$$E_j(n) := \sum_{b=0}^{\nu_j} B_{j,b}\, n^b;\ F_i(n) := \sum_{b=0}^{\nu_j} C_{j,b}\, n^b \ (B_{j,\nu_j} \neq 0, C_{j,\nu_j} \neq 0, j = 1, \dots, s). \tag{2}$$

We claim that the coefficients $A_{m,a}$ and those of $P_m(n)$ are real, while those of $E_j(n)$ and $F_j(n)$ are complex conjugate pairs, i.e., $\overline{B}_{j,b} = C_{j,b}$. To see this, note that from the given initial real values $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$, solving for the coefficients via Cramer's rule we get, e.g. for the first coefficient of $P_1(n)$,

$$\det \begin{pmatrix} X & Y & \overline{Y} \end{pmatrix} A_{1,0} = \det \begin{pmatrix} X(u) & Y & \overline{Y} \end{pmatrix} \tag{3}$$

where

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \lambda_r & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \cdots & (k-1)^{\mu_1}\lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_r^{k-1} & \cdots & (k-1)^{\mu_1}\lambda_r^{k-1} \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_1 & \cdots & \gamma_s & \cdots & \gamma_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1^{k-1} & \cdots & (k-1)^{\nu_1}\gamma_1^{k-1} & \cdots & \gamma_s^{k-1} & \cdots & (k-1)^{\nu_1}\gamma_s^{k-1} \end{bmatrix},$$

the matrix $\overline{Y}$ is obtained from Y by replacing each of its elements with its complex conjugate, and $X(u)$ is the matrix obtained from X by replacing the first column by the column vector $\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{k-1} \end{bmatrix}^t$. Taking complex conjugate on both sides of (1.3), we get

$$\det \begin{pmatrix} X & \overline{Y} & Y \end{pmatrix} \overline{A}_{1,0} = \det \begin{pmatrix} X(u) & \overline{Y} & Y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Employing elementary operations on the determinants of both sides in this last equation, we obtain (3) with $\overline{A}_{1,0}$ in place of $A_{1,0}$, which shows that $A_{1,0} \in \mathbb{R}$. Similar arguments applied to other coefficients validate the claim.

Returning to our case of fifth order, the characteristic polynomial associated with the relation (1) is

$$\mathrm{Char}(z) := z^5 - a_1 z^4 - \cdots - a_4 z - a_5.$$

Let $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $(k = 1, \dots, m)$ be all the distinct roots of $\mathrm{Char}(z)$, with multiplicities $\ell_1, \dots, \ell_m$ respectively, so that $\ell_1 + \cdots + \ell_m = 5$. Each sequence element satisfying (1) can be written as

$$u_n = \sum_{k=1}^{m} P_k(n)\lambda_k^n, \qquad (n \geq 0),$$

with $P_k(n) \in \mathbb{C}[n]$, $\deg P_k = \ell_k - 1$ $(k = 1, \dots, m)$. The roots of $\mathrm{Char}(z)$ having the largest absolute value are called *dominating roots*. The following result of Bell-Gerhold, [2, Theorem 2], helps reducing about half the number of cases to be considered.

Proposition 2.1. *Let (u_n) be a nonzero recurrence sequence with no positive dominating characteristic root, then the sets $\{n \in \mathbb{N} : u_n > 0\}$ and $\{n \in \mathbb{N} : u_n < 0\}$ have positive density, and so both sets contain infinitely many elements.*

Apart from those in [11, Lemma 2.3], some more forms of sequence elements which have already been shown to be decidable are contained in the next lemma.

Lemma 2.1. *The positivity problem for the following forms of sequence elements are decidable.*

1. $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n \quad (A, B \in \mathbb{R};\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *distinct*$)$
2. $u_n = (A + B)\lambda^n \quad (A, B \in \mathbb{R};\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
3. $u_n = A\lambda^n + \bar{A}\bar{\lambda}^n \quad (A \in \mathbb{C};\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$
4. $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n \quad (A, B, C \in \mathbb{R};\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *distinct*$)$
5. $u_n = (A + Bn + Cn^2)\lambda^n \quad (A, B, C \in \mathbb{R};\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
6. $u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn)\lambda_2^n \quad (A, B, C \in \mathbb{R};\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *distinct*$)$
7. $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + \bar{B}\bar{\lambda}_2^n \quad (A, B, C \in \mathbb{R};\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *distinct*$)$
8. $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n + D\lambda_4^n \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R};\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *distinct*$)$
9. $u_n = (A + Bn + Cn^2 + Dn^3)\lambda^n \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R};\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
10. $u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn + Dn^2)\lambda_2^n \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R};\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *distinct*$)$
11. $u_n = (A + Bn)\lambda_1^n + (C + Dn)\lambda_2^n \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R};\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *distinct*$)$
12. $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + (C + Dn)\lambda_3^n \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R};\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *distinct*$)$
13. $u_n = (A + Bn)\lambda_1^n + C\lambda_2^n + \bar{C}\bar{\lambda}_2^n \quad (A, B \in \mathbb{R};\ \lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ C \in \mathbb{C};\ \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$
14. $u_n = (A + Bn)\lambda^n + (\bar{A} + \bar{B}n)\bar{\lambda}^n \quad (A, B \in \mathbb{C};\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$
15. $u_n = A\lambda_1^n + \bar{A}\bar{\lambda}^n + B\lambda_2^n + \bar{B}\bar{\lambda}_2^n \quad (A, B \in \mathbb{C};\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *distinct*$)$
16. $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n + \bar{C}\bar{\lambda}_3^n \quad (A, B \in \mathbb{R};\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *distinct*$;\ C \in \mathbb{C};\ \lambda_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$.

3 Proof of Theorem 1.1

In this section the proof of Theorem 3.1 is exposed. This is divided into several cases taking into account the nature of the roots of $\mathrm{Char}(z)$.

3.1 Char(z) has only real roots

In this case, the general term of the sequence is

$$u_n = P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_m(n)\lambda_m^n \quad (n \geq 0,\ m \leq 5).$$

This case is decidable by the same proof as that in [11, Section 3].

3.2 Char(z) has non-real roots

The possible shapes of the five roots are:

I. One real number and two identical complex conjugate pairs, denoted by $C(rz^2\bar{z}^2)$;

II. Three identical real numbers and one complex conjugate pair, denoted by $C(r^3z\bar{z})$;

III. Two distinct real numbers one of whose is of multiplicity 2 and one complex conjugate pair, denoted by $C(r_1r_2^2z\bar{z})$;

IV. There distinct real numbers and one complex conjugate pair, denoted by $C(r_1r_2r_3z\bar{z})$.

V. One real number and two complex conjugate pairs, denoted by $C(rz_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2)$;

3.2.1 Case I: C$(rz^2\bar{z}^2)$

In this case, the general term of the sequence is

$$u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn)\lambda_2^n + (\bar{B} + \bar{C}n)\bar{\lambda}_2^n \quad (n \geq 0),$$

where $A, \lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $B, C \in \mathbb{C}$ and $\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Let $\lambda_2 = |\lambda_2|e^{i\theta}$, $B = |B|e^{i\varphi_1}$ and $C = |C|e^{i\varphi_2}$ where $\theta, \varphi_1, \varphi_2 \in [-\pi, \pi]$, $\theta \notin \{-\pi, 0\}$ so that

$$u_n = A\lambda_1^n + 2|\lambda_2|^n\{|B|\cos(\varphi_1 + n\theta) + n|C|\cos(\varphi_2 + n\theta)\}.$$

By Proposition 2.1, we need only treat the case where there is a positive dominating root, i.e., $\lambda_1 \geq |\lambda_2| > 0$. There are two subcases.

Subcase I.1 $\lambda_1 = |\lambda_2|$**.**
Rewrite the general term of the sequence as

$$u_n = \lambda_1^n\{A + 2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta) + 2n|C|\cos(\varphi_2 + n\theta)\}.$$

Then, the sequence (u_n) is nonnegative if and only if, for all n,

$$A + 2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta) + 2n|C|\cos(\varphi_2 + n\theta) \geq 0. \tag{5}$$

Since

$$\operatorname{sign}\left(A + 2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta) + 2n|C|\cos(\varphi_2 + n\theta)\right) = \operatorname{sign}\left(\cos(\varphi_2 + n\theta)\right),$$

when n is large enough, provided $|C|\cos(\varphi_2 + n\theta) \neq 0$. By [11, Lemma 2.2 III], $\cos(\varphi_2 + n\theta)$ takes some positive and some negative values for infinitely many $n \in \mathbb{N}$. Thus, (5) holds only when $C = 0$, which reduces the shape of u_n to the form *7.*, Lemma 2.1, and so it is decidable.

Subcase I.2: $\lambda_1 > |\lambda_2|$**.**
Rewrite the general term of the sequence as

$$u_n = \lambda_1^n\{A + 2(|\lambda_2|/\lambda_1)^n(|B|\cos(\varphi_1 + n\theta) + n|C|\cos(\varphi_2 + n\theta))\}.$$

The sequence (u_n) is nonnegative if and only if

$$A + 2(|\lambda_2|/\lambda_1)^n(|B|\cos(\varphi_1 + n\theta) + n|C|\cos(\varphi_2 + n\theta)) \geq 0 \quad (n \geq 0).$$

- If $A = 0$, the shape of u_n reduces to the form *11.*, Lemma 2.1.
- If $A < 0$, then $A + 2(|\lambda_2|/\lambda_1)^n(|B|\cos(\varphi_1 + n\theta) + n|C|\cos(\varphi_2 + n\theta)) < 0$ for all sufficiently large n, and so this case is untenable.
- If $A > 0$, since

$$A + 2(|\lambda_2|/\lambda_1)^n(|B|\cos(\varphi_1 + n\theta) + n|C|\cos(\varphi_2 + n\theta)) \to A > 0 \ (n \to \infty),$$

  there is an explicitly computable least $M_1 \in \mathbb{N}_0$, depending on $A, B, C, \lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$ for which

$$A + 2(|\lambda_2|/\lambda_1)^n(|B|\cos(\varphi_1 + n\theta) + n|C|\cos(\varphi_2 + n\theta)) \geq 0 \ \text{ for all } n \geq M_1.$$

  Thus, the sequence (u_n) is nonnegative if and only if $M_1 = 0$.

3.2.2 Case II: C($r^3 z\bar{z}$)

In this case, the general term of the sequence is $u_n = (A + Bn + Cn^2)\lambda_1^n + D\lambda_2^n + \bar{D}\bar{\lambda}_2^n$. This case is decidable by the same proof as in Case 4.1 of [11, p. 137].

3.2.3 Case III: C($r_1 r_2^2 z\bar{z}$)

In this case, the general term of the sequence is

$$u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn)\lambda_2^n + D\lambda_3^n + \bar{D}\bar{\lambda}_3^n \qquad (n \geq 0),$$

where $A, B, C \in \mathbb{R}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $D \in \mathbb{C}$ and $\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Let $\lambda_3 = |\lambda_3|e^{i\theta}$ and $D = |D|e^{i\varphi}$ where $\theta, \varphi \in [-\pi, \pi]$, $\theta \notin \{-\pi, 0\}$ so that

$$u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn)\lambda_2^n + 2|D||\lambda_3|^n\cos(\varphi + n\theta).$$

We assume that the three coefficients A, C, D are all nonzero, for otherwise we would end in the cases *13.* or *16.*, or the case *6.*, Lemma 2.1. We treat two subcases depending on whether $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.

Subcase III.1: $|\lambda_1| = |\lambda_2|$*, and so* $\lambda_2 = -\lambda_1$
If $\lambda_1 > 0$, then the sequence term is of the form $u_n = \{A + (-1)^n(B + Cn)\}\lambda_1^n + D\lambda_3^n + \bar{D}\bar{\lambda}_3^n$, i.e.,

$$\begin{aligned} u_{2k} &= \{A + B + 2Ck\}\lambda_2^{2k} + D\lambda_3^{2k} + \bar{D}\bar{\lambda}_3^{2k} \\ u_{2k+1} &= \{A - B - C - 2Ck\}\lambda_2^{2k+1} + D\lambda_3^{2k+1} + \bar{D}\bar{\lambda}_3^{2k+1} \quad (k \geq 0). \end{aligned}$$

The two sequences (u_{2k}) and (u_{2k+1}) are decidable because they are of the form *13.*, Lemma 2.1.

If $\lambda_1 < 0$, then the sequence term is of the form $u_n = \{(-1)^n A + B + Cn\}\lambda_2^n + D\lambda_3^n + \bar{D}\bar{\lambda}_3^n$, i.e.,

$$\begin{aligned} u_{2k} &= \{A + B + 2Ck\}\lambda_2^{2k} + D\lambda_3^{2k} + \bar{D}\bar{\lambda}_3^{2k} \\ u_{2k+1} &= \{-A + B + C + 2Ck\}\lambda_2^{2k+1} + D\lambda_3^{2k+1} + \bar{D}\bar{\lambda}_3^{2k+1} \quad (k \geq 0). \end{aligned}$$

The two sequences (u_{2k}) and (u_{2k+1}) are decidable because they are of the form *13.*, Lemma 2.1.

Subcase III.2: $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$.

There are three possibilities for the absolute values of λ_i.

III.2.1: $|\lambda_1| = |\lambda_3|$.

By Proposition 2.1, we need only treat the case where there is a positive dominating root. We consider two possibilities corresponding to the positive dominating root being λ_1 or λ_2.

1. *λ_1 is the positive dominating root, and so $\lambda_1 > |\lambda_2|$.*

   Rewrite the general term of the sequence

   $$u_n = \lambda_1^n \{A + 2|D|\cos(\varphi + n\theta) + (B + Cn)(\lambda_2/\lambda_1)^n\} \quad (n \geq 0).$$

   Then, the sequence (u_n) is nonnegative if and only if, for all n,

   $$A \geq -2|D|\cos(\varphi + n\theta) - (B + Cn)(\lambda_2/\lambda_1)^n \quad (n \geq 0). \tag{6}$$

   - If θ is a rational multiple of π, say, $\theta = s\pi/t$ where $s, t \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ and $\gcd(s,t) = 1$. By Lemma 2.2 of [11], $\cos(\varphi + n\theta)$ is periodic and takes at most $2t$ distinct explicit (positive and negative) values at $n \in \{0, 1, \ldots, 2t-1\}(\bmod\ 2t)$. Let

     $$P := \{p_1, \ldots, p_s\}, \quad Q := \{q_1, \ldots, q_r\}$$

     be subsets of $\{0, 1, \ldots, 2t-1\}$ such that

     $$c_i = \cos(\varphi + p_i\theta) < 0 \qquad (1 \leq i \leq s), \qquad d_j = \cos(\varphi + q_j\theta) \geq 0 \quad (1 \leq j \leq r).$$

     Since

     $$\mathbb{N}_0 = (p_1 + 2t\mathbb{N}_0) \cup \cdots \cup (p_s + 2t\mathbb{N}_0) \cup (q_1 + 2t\mathbb{N}_0) \cup \cdots \cup (q_r + 2t\mathbb{N}_0),$$

     and for each $\ell \in \mathbb{N}$, let

     $$\begin{aligned} F_i(\ell) &= -2|D|c_i - (B + C(p_i + 2t\ell))(\lambda_2/\lambda_1)^{p_i+2\ell t} \quad (i = 1, \ldots, s) \\ N_j(\ell) &= -2|D|d_j - (B + C(q_j + 2t\ell))(\lambda_2/\lambda_1)^{q_j+2\ell t} \quad (j = 1, \ldots, r). \end{aligned}$$

     If $-(B + C(p_i + 2\ell t)(\lambda_2/\lambda_1))^{p_i+2\ell t} \leq 0$ for all $\ell \in \mathbb{N}$, then we see clearly that

     $$\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} F_i(\ell) = -2|D|c_i.$$

     If there exists $\ell_0 \in \mathbb{N}$ such that

     $$-(B + C(p_i + 2\ell t)(\lambda_2/\lambda_1)^{p_i+2\ell t} > 0,$$

     since $-(B + C(p_i + 2\ell t))(\lambda_2/\lambda_1)^{p_i+2\ell t} \to 0$ $(\ell \to \infty)$, there is an $L_i \in \mathbb{N}_0$, $L_i \geq \ell_0$ for which

     $$\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} F_i(\ell) = -2|D|c_i + \max_{\ell \in \{0,1,\ldots,L_i\}} \left\{-\left(B + C(p_i + 2\ell t)\right)(\lambda_2/\lambda_1)^{p_i+2\ell t}\right\};$$

call this maximum M_i. Similarly, if $-(B+C(q_j+2\ell t)(\lambda_2/\lambda_1)^{q_j+2\ell t} \leq 0$, for all $\ell \in \mathbb{N}$, then $\sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} N_j(\ell) = -2|D|d_j$, while if there exists $\ell_1 \in \mathbb{N}$ such that

$$-(B+C(q_j+2\ell_1 t)(\lambda_2/\lambda_1)^{q_j+2\ell_1 t} > 0,$$

then $\max_{\ell\in\mathbb{N}_0} N_j(\ell)$ is attainable; call this maximum K_j. Thus, (6) holds if and only if

$$A \geq \max_{1\leq i\leq s, 1\leq j\leq r} \left\{-2|D|c_i, M_i, -2|D|d_j, K_j\right\},$$

and so this case is decidable.

- If θ_1 is not a rational multiple of π, rewrite the terms of the sequence as

$$u_n = |\lambda_2|^n \left\{\left(A+2|D|\cos(\varphi+n\theta)\right)(\lambda_1/|\lambda_2|)^n + (B+Cn)(\lambda_2/|\lambda_2|)^n\right\}.$$

The sequence $\{u_n\}$ is nonnegative if and only if

$$\left(A+2|D|\cos(\varphi+n\theta)\right)(\lambda_1/|\lambda_2|)^n + (B+Cn)(\lambda_2/|\lambda_2|)^n \geq 0 \quad (n\geq 0) \tag{7}$$

We consider four separate situations.

(a) If $A<0$, since the values of $\cos(\varphi+n\theta)$ is dense in the closed interval $[-1,1]$, there is a computable nonnegative integer N_A such that

$$\left(A+2|D|\cos(\varphi+N_A\theta)\right)(\lambda_1/|\lambda_2|)^{N_A} + (B+CN_A)(\lambda_2/|\lambda_2|)^{N_A} < 0$$

and so (25) cannot be fulfilled.

(b) If $0<A<2|D|$, let $\Delta = 2|D|-A>0$ so that

$$\begin{aligned}&\left(A+2|D|\cos(\varphi+n\theta)\right)(\lambda_1/|\lambda_2|)^n + (B+Cn)(\lambda_2/|\lambda_2|)^n \\ &= \left\{2|D|\left(1+\cos(\varphi+n\theta)\right)-\Delta\right)\}(\lambda_1/|\lambda_2|)^n + (B+Cn)(\lambda_2/|\lambda_2|)^n.\end{aligned} \tag{8}$$

Taking a subsequence (n_k) for which $\cos(\varphi_1+n_k\theta_1)\to -1$ $(k\to\infty)$, the left-hand side of (8) tends to $-\infty$, showing that (7) cannot be fulfilled.

(c) If $A>2|D|>0$, let $\delta = A-2|D|>0$. Since

$$\begin{aligned}&\left(A+2|D|\cos(\varphi+n\theta)\right)(\lambda_1/|\lambda_2|)^n + (B+Cn)(\lambda_2/|\lambda_2|)^n \\ &\geq \delta(\lambda_1/|\lambda_2|)^n + (B+Cn)(\lambda_2/|\lambda_2|)^n \to \infty \quad (n\to\infty),\end{aligned}$$

there is a computable nonnegative integer N^* such that

$$\left(A+2|D|\cos(\varphi+n\theta)\right)(\lambda_1/|\lambda_2|)^n + (B+Cn)(\lambda_2/|\lambda_2|)^n \geq 0$$

for all $n\geq N^*$. Thus, (7) holds if and only if $N^*=0$.

(d) If $A = 2\,|B|$, then (7) becomes

$$2\,|D|\,(1+\cos(\varphi+n\theta))\,(\lambda_1/\,|\lambda_2|)^n + (B+Cn)(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^n \geq 0 \quad (n \geq 0). \qquad (9)$$

By [8, Lemma 2.2 II], there is $N_0 \in \mathbb{N}_0$ such that $1+\cos(\varphi+N_0\theta) = 0$, which must be unique by [11, Claim 1, p. 140], then for (9) to hold we must have

$$(B+CN_0)(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^{N_0} \geq 0.$$

Using arguments similar to [8, Lemma 2.2], we deduce that

$$2\,|D|\,\{1+\cos(\varphi+n\theta)\}\,(\lambda_1/\,|\lambda_2|)^n + (B+Cn)(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Thus, there is an explicitly computable least integer $N_1 \in \mathbb{N}_0$, depending on $B, C, \varphi, \theta, \lambda_1, \lambda_2$, such that

$$2\,|D|\,\{1+\cos(\varphi+n\theta)\}\,(\lambda_1/\,|\lambda_2|)^n + (B+Cn)(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^n \geq 0 \;\text{ for all } n \geq N_1.$$

Using all the obtained information, we conclude that (25) holds if and only if $N_1 = 0$.

2. *λ_2 is the positive dominating root, and so $\lambda_2 > |\lambda_1| = |\lambda_3| > 0$.*

Rewrite the general term of the sequence

$$u_n = \lambda_2^n\,\{(A_n + 2|D|\cos(\varphi+n\theta))\,(|\lambda_1|/\lambda_2)^n + B + Cn\} \quad (n \geq 0),$$

where $A_n = (-1)^n A$ if $\lambda_1 < 0$, and $A_n = A$ if $\lambda_1 > 0$. The sequence (u_n) is nonnegative if and only if

$$\{A_n + 2|D|\cos(\varphi+n\theta)\}(|\lambda_1|/\lambda_2)^n + B + Cn \geq 0 \quad \text{for all} \quad n \geq 0. \qquad (10)$$

We consider two possibilities.

- If $C < 0$, then

$$\{A_n + 2|D|\cos(\varphi+n\theta)\}(|\lambda_1|/\lambda_2)^n + B + Cn < 0$$

for all sufficiently large n, and so (10) is untenable.

- If $C > 0$, since

$$\{A_n + 2|D|\cos(\varphi+n\theta)\}(|\lambda_1|/\lambda_2)^n + B + Cn \to \infty \quad (n \to \infty),$$

there is an explicitly computable least $T_0 \in \mathbb{N}_0$, depending explicitly on $A, B, C, D, \varphi, \theta, \lambda_1, \lambda_2$ for which

$$\{A_n + 2|D|\cos(\varphi+n\theta)\}(|\lambda_1|/\lambda_2)^n + B + Cn \geq 0 \quad \text{for all} \quad n \geq T_0.$$

Thus, the sequence (u_n) is nonnegative if and only if

$$\{A_n + 2|D|\cos(\varphi+n\theta)\}(|\lambda_1|/\lambda_2)^n + B + Cn \geq 0 \;\; (\text{for all } \; n \geq 0) \Leftrightarrow T_0 = 0.$$

III.2.2: $|\lambda_2| = |\lambda_3|$**.**

By Proposition 2.1, we need only treat the case where there is a positive dominating root. We consider two possibilities corresponding to the positive dominating root being λ_1 or λ_2.

1. λ_1 *is the positive dominating root, so that* $\lambda_1 > |\lambda_2| = |\lambda_3|$.

   Rewrite the general term of the sequence as

   $$u_n = \lambda_1^n \{A + (C_n + 2|D|\cos(\varphi + n\theta))(|\lambda_2|/\lambda_1)^n\} \quad (n \geq 0),$$

   where $C_n = (-1)^n(B + Cn)$ if $\lambda_2 < 0$ and $C_n = B + Cn$ if $\lambda_2 > 0$. The sequence (u_n) is nonnegative if and only if

   $$A + \{C_n + 2|D|\cos(\varphi + n\theta)\}(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \geq 0 \quad (n \geq 0). \tag{11}$$

   Note that

   $$A + \{C_n + 2|D|\cos(\varphi + n\theta)\}(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \to A \quad (n \to \infty). \tag{12}$$

   If $A < 0$, then (12) shows that (11) cannot be fulfilled. If $A > 0$, then (12) implies that there is an explicitly computable least integer $T_1 \in \mathbb{N}_0$, depending on $A, B, C, D, \varphi, \theta, \lambda_1, \lambda_2$ such that (11) holds for all $n \geq T_1$. Consequently, in this case the sequence (u_n) is nonnegative if and only if $T_1 = 0$.

2. λ_2 *is the positive dominating root, so that* $\lambda_2 = |\lambda_3| > |\lambda_1|$.

   Rewrite the general term of the sequence as

   $$u_n = \lambda_2^n \{A(\lambda_1/\lambda_2)^n + B + Cn + 2|D|\cos(\varphi + n\theta)\} \quad (n \geq 0).$$

   Then, the sequence (u_n) is nonnegative if and only if, for all n,

   $$B \geq -A(\lambda_1/\lambda_2)^n - Cn - 2|D|\cos(\varphi + n\theta). \tag{13}$$

   If $C < 0$, then (13) cannot be fulfilled. If $C > 0$, then $-A(\lambda_1/\lambda_2)^n - Cn - 2|D|\cos(\varphi + n\theta) \to -\infty$ $(n \to \infty)$. Thus, there exists an explicitly computable $T_2 \in \mathbb{N}$ depending on $A, C, D, \varphi, \theta, \lambda_1, \lambda_2$ such that

   $$\max_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \{-A(\lambda_1/\lambda_2)^n - Cn - 2|D|\cos(\varphi + n\theta)\} = -A(\lambda_1/\lambda_2)^{T_2} - CT_2 - 2|D|\cos(\varphi + T_2\theta).$$

   Consequently, the sequence (u_n) is nonnegative if and only if

   $$B \geq -A(\lambda_1/\lambda_2)^{T_2} - CT_2 - 2|D|\cos(\varphi + T_2\theta).$$

III.2.3: *All three roots* λ_1, λ_2 *and* λ_3 *have different absolute values.*

By Proposition 2.1, we need only treat the case where there is a positive dominating root. We consider two possibilities corresponding to the positive dominating root being λ_1 or λ_2.

1. λ_1 *is the positive dominating root, so that* $\lambda_1 > |\lambda_2|\,,\ \lambda_1 > |\lambda_3|$.

   Here, $u_n = \lambda_1^n \{A + (B + Cn)(\lambda_2/\lambda_1)^n + 2|D|(|\lambda_3|/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta)\}$. The sequence (u_n) is nonnegative if and only if

$$A + (B + Cn)(\lambda_2/\lambda_1)^n + 2|D|(|\lambda_3|/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta) \geq 0 \quad (n \geq 0). \tag{14}$$

   Note that

$$A + (B + Cn)(\lambda_2/\lambda_1)^n + 2|D|(|\lambda_3|/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta) \to A \quad (n \to \infty). \tag{15}$$

   If $A < 0$, then (15) shows that (14) cannot be fulfilled. If $A > 0$, then (15) implies that there is an explicitly computable least integer $T_3 \in \mathbb{N}_0$, depending on $A, B, C, D, \varphi, \theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ such that (14) holds for all $n \geq T_3$. Consequently, in this case the sequence (u_n) is nonnegative if and only if $T_3 = 0$.

2. λ_2 *is the positive dominating root, so that* $\lambda_2 > |\lambda_1|\,,\ \lambda_2 > |\lambda_3|$.

   Here, $u_n = \lambda_2^n \{A(\lambda_1/\lambda_2)^n + B + Cn + 2|D|(|\lambda_3|/\lambda_2)^n \cos(\varphi + n\theta)\}$. The sequence (u_n) is nonnegative if and only if

$$B \geq -A(\lambda_1/\lambda_2)^n - Cn - 2|D|(|\lambda_3|/\lambda_2)^n \cos(\varphi + n\theta) \quad (n \geq 0). \tag{16}$$

   - If $C < 0$, then (16) cannot be fulfilled.
   - If $C > 0$, since

$$-A(\lambda_1/\lambda_2)^n - Cn - 2|D|(|\lambda_3|/\lambda_2)^n \cos(\varphi + n\theta) \to -\infty \quad (n \to \infty).$$

     there is an explicitly computable $T_4 \in \mathbb{N}$ depending on $A, C, D, \varphi, \theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ such that

$$\max_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \{-A(\lambda_1/\lambda_2)^n - Cn - 2|D|(|\lambda_3|/\lambda_2)^n \cos(\varphi + n\theta)\} =$$
$$-A(\lambda_1/\lambda_2)^{T_4} - CT_4 - 2|D|(|\lambda_3|/\lambda_2)^{T_4} \cos(\varphi + T_4\theta).$$

     Consequently, the sequence (u_n) is nonnegative if and only if

$$B \geq -A(\lambda_1/\lambda_2)^{T_4} - CT_4 - 2|D|(|\lambda_3|/\lambda_2)^{T_4} \cos(\varphi + T_4\theta).$$

3.2.4 Case IV. $\mathbf{C}(r_1 r_2 r_3 z \bar{z})$

In this case, the general term of the sequence is

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n + D\lambda_4^n + \bar{D}\bar{\lambda}_4^n \quad (n \geq 0),$$

where $A, B, C \in \mathbb{R}; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $D \in \mathbb{C}$ and $\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Let $\lambda_4 = |\lambda_4| e^{i\theta}$ and $D = |D| e^{i\varphi}$ where $\theta, \varphi \in [-\pi, \pi]$, $\theta \notin \{-\pi, 0\}$ so that

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n + 2|D||\lambda_4|^n \cos(\varphi + n\theta).$$

Consider the three real numbers, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. There are two subcases.

IV.1 There are exactly two among $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ having the same absolute value, say, $\lambda_2 = -\lambda_3$.

IV.2 None of the $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ has the same absolute value.

Subcase IV.1: *There are exactly two among $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ having the same absolute value, say, $\lambda_2 = -\lambda_3$.*
Here, $u_n = A\lambda_1^n + \{B + (-1)^n C\}\lambda_2^n + D\lambda_4^n + \bar{D}\bar{\lambda}_4^n$, i.e.,

$$u_{2k} = A\lambda_1^{2k} + \{B + C\}\lambda_2^{2k} + D\lambda_4^{2k} + \bar{D}\bar{\lambda}_4^{2k}$$
$$u_{2k+1} = A\lambda_1^{2k+1} + \{B - C\}\lambda_2^{2k+1} + D\lambda_4^{2k+1} + \bar{D}\bar{\lambda}_4^{2k+1} \quad (k \geq 0).$$

The two sequences (u_{2k}) and u_{2k+1} are decidable because they are of the form (16).

Subcase IV.2: *None of the $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ has the same absolute value.*
By Proposition 2.1, we need only treat the case where there is a positive dominating root, say, $\lambda_1 > 0$ and so we may assume without loss of generality that $\lambda_1 > |\lambda_2| > |\lambda_3| > 0$ and $\lambda_1 \geq |\lambda_4|$. We subdivide into two situations depending on whether $\lambda_1 = |\lambda_4|$.

IV.2.1: $\lambda_1 = |\lambda_4|$.
Here, $u_n = \lambda_1^n\{A + (B + C(\lambda_3/\lambda_2)^n)(\lambda_2/\lambda_1)^n + 2|D|\cos(\varphi + n\theta)\}$ $\quad (n \geq 0)$. The sequence (u_n) is nonnegative if and only if

$$A \geq -\{B + C(\lambda_3/\lambda_2)^n\}(\lambda_2/\lambda_1)^n - 2|D|\cos(\varphi + n\theta) \quad (n \geq 0). \tag{17}$$

- If θ is a rational multiple of π, say $\theta = s\pi/t$ where $s, t \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ and $\gcd(s,t) = 1$. By [11, Lemma 2.2 I], $\cos(\varphi + n\theta)$ is periodic and takes at most $2t$ distinct explicit positive and negative values at $n \in \{0, 1, \ldots, 2t-1\} (\text{mod } 2t)$. Since

  $$-\{B + C(\lambda_3/\lambda_2)^n\}(\lambda_2/\lambda_1)^n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

  (17) holds if and only if

  $$A \geq \max_{0 \leq n \leq T}\{-\{B + C(\lambda_3/\lambda_2)^n\}(\lambda_2/\lambda_1)^n - 2|D|\cos(\varphi + n\theta)\}.$$

  for some computable large $T \geq 2t - 1$.

- If θ is not a rational multiple of π, rewrite the term of the sequence as

  $$u_n = |\lambda_2|^n\{B(\lambda_2/|\lambda_2|)^n + C(\lambda_3/|\lambda_2|)^n + (A + 2|D|\cos(\varphi + n\theta))(\lambda_1/|\lambda_2|)^n\}.$$

  The sequence $\{u_n\}$ is nonnegative if and only if

  $$B(\lambda_2/|\lambda_2|)^n + C(\lambda_3/|\lambda_2|)^n + (A + 2|D|\cos(\varphi + n\theta))(\lambda_1/|\lambda_2|)^n \geq 0 \qquad (n \geq 0). \tag{18}$$

  We consider four separate situations.

  (a) If $A < 0$, since the values of $\cos(\varphi + n\theta)$ is dense in the closed interval $[-1, 1]$, $(\lambda_2/|\lambda_2|)^n \in \{\pm 1\}$, $(\lambda_3/|\lambda_2|)^n \to 0$, $(\lambda_1/|\lambda_2|)^n \to \infty$ $(n \to \infty)$, there always exists a computable nonnegative integer N^* such that

  $$B(\lambda_2/|\lambda_2|)^{N^*} + C(\lambda_3/|\lambda_2|)^{N^*} + (A + 2|D|\cos(\varphi + N^*\theta))(\lambda_1/|\lambda_2|)^{N^*} < 0$$

  and so (18) cannot be fulfilled.

(b) If $0 < A < 2\,|D|$, let $\Delta = 2\,|D| - A > 0$ so that (18) becomes

$$B(\lambda_2/|\lambda_2|)^n + C(\lambda_3/|\lambda_2|)^n + (A + 2|D|\cos(\varphi + n\theta))(\lambda_1/|\lambda_2|)^n \\ = B(\lambda_2/|\lambda_2|)^n + C(\lambda_3/|\lambda_2|)^n + \{2\,|D|\,(1 + \cos(\varphi + n\theta)) - \Delta\}(\lambda_1/|\lambda_2|)^n. \quad (19)$$

Taking a subsequence $\{n_k\}$ for which $\cos(\varphi + n_k\theta) \to -1$ $(k \to \infty)$, the expression in (19) tends to $-\infty$, showing that (18) cannot be fulfilled.

(c) If $A > 2\,|D| > 0$, let $\delta = A - 2\,|D| > 0$. Since

$$\{A + 2|D|\cos(\varphi + n\theta)\}\,(\lambda_1/|\lambda_2|)^n \geq \delta(\lambda_1/|\lambda_2|)^n \to \infty \quad (n \to \infty),$$

there is a computable nonnegative integer N^* such that

$$B(\lambda_2/|\lambda_2|)^n + C(\lambda_3/|\lambda_2|)^n + (A + 2|D|\cos(\varphi + n\theta))(\lambda_1/|\lambda_2|)^n \geq 0$$

for all $n \geq N^*$. Thus, (18) holds if and only if $N^* = 0$.

(d) If $A = 2\,|D|$, then (18) becomes

$$B(\lambda_2/|\lambda_2|)^n + C(\lambda_3/|\lambda_2|)^n + 2|D|(1 + \cos(\varphi + n\theta))(\lambda_1/|\lambda_2|)^n \geq 0 \quad (n \geq 0). \quad (20)$$

Returning to (18), if there is $N_0 \in \mathbb{N}_0$ such that $1 + \cos(\varphi + N_0\theta) = 0$, which must be unique by [11, Claim 1, p. 140], then for (20) to hold we must have $B(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^{N_0} + C(\lambda_3/\,|\lambda_2|)^{N_0} \geq 0$. Moreover, using arguments similar to Claim A and the fact that for n large enough the values of $1 + \cos(\varphi + n\theta)$ are positive and bounded by 2, we deduce that

$$B(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^n + C(\lambda_3/\,|\lambda_2|)^n + 2\,|D|\,(1 + \cos(\varphi + n\theta))(\lambda_1/\,|\lambda_2|)^n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Thus, there is an explicitly computable least integer $N_1 \in \mathbb{N}_0$, such that

$$B(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^n + C(\lambda_3/\,|\lambda_2|)^n + 2\,|D|\,(1 + \cos(\varphi + n\theta))(\lambda_1/\,|\lambda_2|)^n \geq 0 \text{ for all } n \geq N_1.$$

Using all the obtained information, we conclude that (20) holds if and only if $N_1 = 0$.

IV.2.2: $\lambda_1 \neq |\lambda_4|$, *and so* $\lambda_1 > |\lambda_4|$.

Here, $u_n = \lambda_1^n\{A + B(\lambda_2/\lambda_1)^n + C(\lambda_3/\lambda_1)^n + 2|D|\cos(\varphi + n\theta)(|\lambda_4|/\lambda_1)^n\}$. The sequence (u_n) is nonnegative if and only if,

$$A + B(\lambda_2/\lambda_1)^n + C(\lambda_3/\lambda_1)^n + 2|D|\cos(\varphi + n\theta)(|\lambda_4|/\lambda_1)^n \geq 0 \quad (n \geq 0). \quad (21)$$

Next note that

$$A + B(\lambda_2/\lambda_1)^n + C(\lambda_3/\lambda_1)^n + 2|D|\cos(\varphi + n\theta)(|\lambda_4|/\lambda_1)^n \to A \quad (n \to \infty). \quad (22)$$

If $A < 0$, then (22) shows that (21) cannot be fulfilled. If $A > 0$, then (22) implies that there is an explicitly computable least integer $N_2 \in \mathbb{N}_0$, depending on $A, B, C, D, \varphi, \theta,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ such that (21) holds for all $n \geq N_2$. Consequently, in this case the sequence (u_n) is nonnegative if and only if $N_2 = 0$.

3.2.5 Case V. C($rz_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2$)

In this case, the general term of the sequence is

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + \bar{B}\bar{\lambda}_2^n + C\lambda_3^n + \bar{C}\bar{\lambda}_3^n \quad (n \geq 0),$$

where $A, \lambda_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $B, C \in \mathbb{C}$ and $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Let $\lambda_2 = |\lambda_2|e^{i\theta_1},\ \lambda_3 = |\lambda_3|e^{i\theta_2},\ B = |B|e^{i\varphi_1}$ and $C = |C|e^{i\varphi_2}$ where $\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2 \in [-\pi, \pi]$, $\theta_1, \theta_2 \notin \{-\pi, 0\}$ so that

$$u_n = A\lambda_1^n + 2|B||\lambda_2|^n \cos(\varphi_1 + n\theta_1) + 2|C||\lambda_3|^n \cos(\varphi_2 + n\theta_2).$$

By Proposition 2.1, we need only treat the case where there is a positive dominating root, i.e., $\lambda_1 \geq \max\{|\lambda_2|, |\lambda_3|\} > 0$. We assume that all the three coefficients A, B and C are nonzero for otherwise we are left with the case (15) or the case (7) in [11, Lemma 2.3]. There are three subcases.

- *V.1* The three λ's have the same absolute values, i.e., $\lambda_1 = |\lambda_2| = |\lambda_3|$.
- *V.2* All three roots $\lambda_1,\ \lambda_2$ and λ_3 have different absolute values.
- *V.3* There are exactly two λ_i's having the same absolute value, i.e., $\lambda_1 = |\lambda_2|$ or $\lambda_1 = |\lambda_3|$ or $|\lambda_2| = |\lambda_3|$.

Subcase V.1: $\lambda_1 = |\lambda_2| = |\lambda_3|$.
Rewrite the general term of the sequence as

$$u_n = \lambda_1^n\{A + 2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + 2|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\} \quad (n \geq 0).$$

The sequence (u_n) is nonnegative if and only if

$$A + 2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + 2|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2) \geq 0 \quad (n \geq 0). \tag{23}$$

Clearly, the sign of this last expression depends on the nature of θ_1 and θ_2. We have three possibilities.

- Both θ_1 and θ_2 are rational multiples of π, say $\theta_1 = s_1\pi/t_1$ and $\theta_2 = s_2\pi/t_2$ where $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, $\gcd(s_1, t_1) = 1$ and $\gcd(s_2, t_2) = 1$. By [11, Lemma 2.2 I], $\cos(\varphi_1 + n\theta_1)$ is periodic, taking at most $2t_1$ explicitly computable positive and negative values corresponding to $n = 0, 1, \ldots, 2t_1 - 1$, and $\cos(\varphi_2 + n\theta_2)$ is periodic, taking at most $2t_2$ explicitly computable positive and negative values corresponding to $n = 0, 1, \ldots, 2t_2 - 1$. Then, (23) holds if and only if

  $$A \geq \max_{0\leq n\leq \mathrm{lcm}(2t_1, 2t_2)}\{-2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) - 2|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\theta\}$$

- One of the angles, say, θ_1 is a rational multiple of π, while the other, θ_2 is not a rational multiple of π. Let $\theta_1 = s\pi/t$ where $s, t \in \mathbb{Z}^+\setminus\{0\}$, $\gcd(s, t) = 1$, By [9, Lemma 2.2 I, III], the function $\cos(\varphi_1 + n\theta_1)$ is periodic and takes at most $2t$ explicitly computable positive and negative values corresponding to $n = 0, 1, \ldots, 2t - 1$. Let the minimal value $\mathcal{B} := \min_{n\in\mathbb{N}_0}\{2|B|\cos(\varphi_1 + n)\theta_1\}$ occurs at $T \pmod{2t}$. Taking $n = T + 2kt$ $(k \geq 0)$, the result [11, Lemma 2.2 II] tells us that the values of $\cos(\varphi_2 + (T + 2kt)\theta_2)$ is dense in $[-1, 1]$. Consequently, the condition (23) holds for all $n \geq 0$ if and only if $A + \mathcal{B} - 2|C| \geq 0$.

- Both $\theta_1 := 2\pi\tilde{\theta}_1$ and $\theta_2 := 2\pi\tilde{\theta}_2$ are not rational multiples of π.

  (a) If $1, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$, then by the Kroneker-Weyl theorem, [4, Theorems IV.I and IV.II], the value set of all the pairs of fractional parts $((n\tilde{\theta}_1), (n\tilde{\theta}_2))$ is dense in the unit square $[0, 1) \times [0, 1)$. Thus, the condition (23) holds for all $n \geq 0$ if and only if $A - 2|B| - 2|C| \geq 0$.

  (b) If $1, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ are linearly dependent over $\mathbb{Q}$, then there exist $m_0, m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ such that $\tilde{\theta}_2 = \dfrac{m_0 + m_1\tilde{\theta}_1}{m_2}$. Let $n = m_2N + J$, where $N \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq J \leq m_2 - 1$. Consider,

  $$C_J(N) = A + 2|B|\cos(\tilde{\varphi}_1(J) + 2m_2N\pi\tilde{\theta}_1) + 2|C|\cos(\tilde{\varphi}_2(J) + 2m_1N\pi\tilde{\theta}_1)$$

  where $\tilde{\varphi}_1(J) = \varphi_1 + 2J\pi\tilde{\theta}_1$ and $\tilde{\varphi}_2(J) = \varphi_2 + 2J\pi(m_0 + m_1\tilde{\theta}_1)/m_2$. Let

  $$f_J(t) = A + 2|B|\cos(\tilde{\varphi}_1(J) + 2m_2\pi t) + 2|C|\cos(\tilde{\varphi}_2(J) + 2m_1\pi t),$$

  where $t \in [0, 1]$. Since $f_J(t)$ is continuous over the compact set $[0, 1]$, the minimum $\min_{t\in[0,1]} f_J(t) = M_J(f)$ exists, say, at t_0. Since the set of fractional parts $\left\{(N\tilde{\theta}_1)\right\}$ is dense in $[0, 1]$, there exists subsequence $(N_k) \subseteq \mathbb{N}$ such that $(N_k\tilde{\theta}_1) \to t_0$ and so $C_J(N_k) \downarrow M_J(f)$, which implies that $C_J(N) \geq 0$ if and only if $M_J(f) \geq 0$. Therefore, the sequence (u_n) is nonnegative if and only if $\min_{J\in\{0,1,\ldots,m_2-1\}} M_J(f) \geq 0$.

Subcase V.2: *All three roots λ_1, λ_2 and λ_3 have different absolute values.*

Without loss of generality assume $\lambda_1 > |\lambda_2| > |\lambda_3|$. Here,

$$u_n = \lambda_1^n\{A + 2\left(|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + |C|(|\lambda_3|/|\lambda_2|)^n\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\right)(|\lambda_2|/\lambda_1)^n\} \quad (n \geq 0),$$

The sequence (u_n) is nonnegative if and only if

$$A + 2\{|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + |C|(|\lambda_3|/|\lambda_2|)^n\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\}(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \geq 0 \qquad (n \geq 0).$$

- If $A < 0$, then $A + 2\{|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + |C|(|\lambda_3|/|\lambda_2|)^n\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\}(|\lambda_2|/\lambda_1)^n < 0$ for all sufficiently large n, and so this case is untenable.

- If $A > 0$, since

  $$A + 2\{|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + |C|(|\lambda_3|/|\lambda_2|)^n\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\}(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \to A > 0\ (n \to \infty),$$

  there is an explicitly computable least $M_1 \in \mathbb{N}_0$, depending on $A, B, C, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\ \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$ for which

  $$A + 2\{|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + |C|(|\lambda_3|/|\lambda_2|)^n\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\}(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \geq 0 \ \text{ for all } n \geq M_1.$$

  Thus, the sequence (u_n) is nonnegative if and only if $M_1 = 0$.

Subcase V.3: $\lambda_1 = |\lambda_2|$ *or* $\lambda_1 = |\lambda_3|$ *or* $|\lambda_2| = |\lambda_3|$.

We need only treat two possibilities.

V.3.1: $\lambda_1 = |\lambda_2|$ *or* $\lambda_1 = |\lambda_3|$.

Without loss of generality, let $\lambda_1 = |\lambda_2| > |\lambda_3|$. Here,

$$u_n = \lambda_1^n \left\{A + 2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + 2|C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^n \cos(\varphi_2 + n\theta_2)\right\}.$$

Then, the sequence (u_n) is nonnegative if and only if

$$A \geq -2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) - 2|C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^n \cos(\varphi_2 + n\theta_2) \qquad (n \geq 0). \tag{24}$$

- If θ_1 is a rational multiple of π, say $\theta_1 = s\pi/t$ where $s, t \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ and $\gcd(s,t) = 1$. By [9, Lemma 2.2], $\cos(\varphi + n\theta)$ is periodic and takes at most $2t$ distinct explicit (positive and negative) values at $n \in \{0, 1, \ldots, 2t-1\} \pmod{2t}$. Let $P := \{p_1, \ldots, p_s\}$, $Q := \{q_1, \ldots, q_r\}$ be subset of $\{0, 1, \ldots, 2t-1\}$ such that

$$c_i = \cos(\varphi_1 + n\theta_1) < 0 \ (1 \leq i \leq s), \quad d_j = \cos(\varphi_1 + n\theta_1) \geq 0 \ (1 \leq j \leq r)$$

Since $\mathbb{N}_0 = (p_1 + 2t\mathbb{N}_0) \cup \cdots \cup (p_s + 2t\mathbb{N}_0) \cup (q_1 + 2t\mathbb{N}_0) \cup \cdots \cup (q_r + 2t\mathbb{N}_0)$, and for each $\ell \in \mathbb{N}_0$, let

$$\begin{aligned} F_i(\ell) &= -2|B|c_i - 2|C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^{p_i+2t\ell} \cos(\varphi_2 + (p_i + 2t\ell)\theta_2) \ \ (i = 1, \ldots, s) \\ N_j(\ell) &= -2|B|d_j - 2|C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^{q_j+2t\ell} \cos(\varphi_2 + (q_j + 2t\ell)\theta_2) \ \ (j = 1, \ldots, r) \end{aligned}$$

If $2|C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^{p_i+2t\ell} \cos(\varphi_2 + (p_i + 2t\ell)\theta_2) \leq 0$ for all $\ell \in \mathbb{N}_0$, then we see clearly that $\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} F_i(\ell) = -2|B|c_i$. If there exists $\ell_0 \in \mathbb{N}_0$ such that

$$-2|C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^{p_i+2t\ell_0} \cos(\varphi_2 + (p_i + 2t\ell_0)\theta_2) > 0,$$

since $-2|C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^{p_i+2t\ell_0} \cos(\varphi_2 + (p_i + 2t\ell_0)\theta_2) \to 0$ ($\ell_0 \to \infty$), there is an $L_i \in \mathbb{N}_0$, $L_i \geq \ell_0$ for which

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} F_i(\ell) = -2|B|c_i + \max_{\ell \in \{0,1,\ldots,L_i\}} \left\{-2|C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^{p_i+2t\ell} \cos(\varphi_2 + (p_i + 2t\ell)\theta_2)\right\};$$

call this maximum M_i. Similarly, if $-2|C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^{q_j+2t\ell} \cos(\varphi_2 + (q_j + 2t\ell)\theta_2) \leq 0$ for all $\ell \in \mathbb{N}_0$, then $\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} N_j(\ell) = -2|B|d_j$, while if there exists $\ell_1 \in \mathbb{N}_0$ such that

$$-2|C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^{q_j+2t\ell} \cos(\varphi_2 + (q_j + 2t\ell)\theta_2) > 0,$$

then $\max_{\ell \in \mathbb{N}_0} N_j(\ell)$ is attainable; call this maximum K_j. Thus, (24) holds if and only if

$$A \geq \max_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r} \{-2|B|c_i, M_i, K_j\}$$

and so this case is decidable.

- If θ_1 is not a rational multiple of π, rewrite the terms of the sequence as

$$u_n = |\lambda_3|^n \left\{(A + 2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1))\,(\lambda_1/|\lambda_3|)^n + 2\,|C| \cos(\varphi_2 + n\theta_2)\right\}.$$

The sequence $\{u_n\}$ is nonnegative if and only if

$$(A + 2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1))\,(\lambda_1/|\lambda_3|)^n + 2\,|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2) \geq 0 \ \ (n \geq 0) \tag{25}$$

We consider four separate situations.

(a) If $A < 0$, since the values of $\cos(\varphi_1 + n\theta_1)$ is dense in the closed interval $[-1, 1]$, and $(\lambda_1/|\lambda_3|)^n \to \infty$ $(n \to \infty)$, there is a computable nonnegative integer N_A such that

$$(A + 2|B|\cos(\varphi_1 + N_A\theta_1))\,(\lambda_1/\,|\lambda_3|)^{N_A} + 2\,|C|\cos(\varphi_2 + N_A\theta_2) < 0$$

and so (25) cannot be fulfilled.

(b) If $0 < A < 2\,|B|$, let $\Delta = 2\,|B| - A > 0$ so that

$$\begin{aligned}&(A + 2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1))\,(\lambda_1/\,|\lambda_3|)^n + 2\,|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\\ &= \{2\,|B|\,(1 + \cos(\varphi_1 + n\theta_1) - \Delta)\}\,(\lambda_1/\,|\lambda_3|)^n + 2\,|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2).\end{aligned} \tag{26}$$

Taking a subsequence $\{n_k\}$ for which $\cos(\varphi_1 + n_k\theta_1) \to -1$ $(k \to \infty)$, the left-hand side of (26) tends to $-\infty$ as $k \to \infty$, showing that (25) cannot be fulfilled.

(c) If $A > 2\,|B| > 0$, let $\delta = A - 2\,|B| > 0$. Since

$$\begin{aligned}&(A + 2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1))(\lambda_1/\,|\lambda_3|)^n + 2\,|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\\ &\qquad\geq \delta(\lambda_1/\,|\lambda_3|)^n + 2\,|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2) \to \infty \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

there is a computable nonnegative integer N^* depending on $A, B, C, \varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2$ such that

$$(A + 2|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1))\,(\lambda_1/\,|\lambda_3|)^n + 2\,|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2) \geq 0$$

for all $n \geq N^*$. Thus, (25) holds if and only if $N^* = 0$.

(d) If $A = 2\,|B|$, then (25) becomes

$$2\,|B|\,(1 + \cos(\varphi_1 + n\theta_1))\,(\lambda_1/\,|\lambda_3|)^n + 2\,|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2) \geq 0 \quad (n \geq 0). \tag{27}$$

If there is $N_0 \in \mathbb{N}_0$ such that $1 + \cos(\varphi_1 + N_0\theta_1) = 0$, which must be unique by [11, Claim 1, p. 140], then for (27) to hold we must have $2\,|C|\cos(\varphi_2 + N_0\theta_2) \geq 0$. Moreover, using arguments similar to [8, Lemma 2.2], we deduce that

$$2\,|B|\,\{1 + \cos(\varphi_1 + n\theta_1)\}\,(\lambda_1/\,|\lambda_3|)^n + 2\,|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2) \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Thus, there is an explicitly computable least integer $N_1 \in \mathbb{N}_0$, depending on $B, C, \varphi, \theta, \lambda_1, \lambda_2$, such that

$$2\,|B|\,\{1 + \cos(\varphi_1 + n\theta_1)\}\,(\lambda_1/\,|\lambda_3|)^n + 2\,|C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2) \geq 0 \;\text{ for all } n \geq N_1.$$

Using all the obtained information, we conclude that (25) holds if and only if $N_1 = 0$.

V.3.2: $|\lambda_2| = |\lambda_3|$ $(< \lambda_1)$.

Rewrite the general term of the sequence as

$$u_n = \lambda_1^n\,\{A + 2\{|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + |C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\}(|\lambda_2|/\lambda_1)^n\}\,.$$

The sequence (u_n) is nonnegative if and only if

$$A + 2\{|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + |C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\}(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \geq 0 \quad (n \geq 0). \tag{28}$$

- If $A < 0$, then $A + 2\{|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + |C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\}(|\lambda_2|/\lambda_1)^n < 0$ for all sufficiently large n, and so (28) is untenable.
- If $A > 0$, since

$$A + 2\{|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + |C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\}(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \to A > 0 \ (n \to \infty),$$

there is an explicitly computable least $M_2 \in \mathbb{N}_0$, depending on $A, B, C, \lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$ for which

$$A + 2\{|B|\cos(\varphi_1 + n\theta_1) + |C|\cos(\varphi_2 + n\theta_2)\}(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \geq 0 \quad \text{for all } n \geq M_2.$$

Thus, the sequence (u_n) is nonnegative if and only if $M_2 = 0$.

4 Acknowledgment

This work is supported by the Phranakorn Rajabhat University Research Fund.

References

[1] Baker, A. and Wüstholz, G. *Logarithmic forms and group varieties,* J. Reine Angew. Math. **442** (1993), 19–62.

[2] Bell, J. P. and Gerhold, S. *On the positivity set of a linear recurrence sequence*, Israel J. Math., **157** (2007), 333–345.

[3] Burke, J. R. and Webb, W. A. *Asymptotic behaviour of linear recurrences*, Fibonacci Quarterly, **19** (1981), 318–321.

[4] Cassels, J. W. S. *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge University Press, 1957.

[5] Halava, V.; Harju, T.; Hirvensalo, M. and Karhumäki, J. Skolem's problem - On the border between decidability and undecidability, TUCS Technical Report, No. 683, April 2005, Turku Centre for Computer Science, 36 pp.

[6] Halava, V.; Harju, T. and Hirvensalo, M. *Positivity of second order linear recurrent sequences*, Discrete Appl. Math., **154** (2006), 447–451.

[7] Laohakosol, V. and Tangsupphathawat, P. *Positivity of third order linear recurrence sequences*, Discrete Appl. Math. **157** (2009), 3239–3248.

[8] Laohakosol, V. and Tangsupphathawat, P. *A remark about the positivity problem of fourth order linear recurrence sequences*, Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica **18** (2014), 3–8.

[9] Laohakosol, V.; Tangsupphathawat, P. and Dangskul, S. *Values taken by linear combinations of cosine functions*, Appl. Math. E-Notes **10** (2011), 184–190.

[10] Ouaknine, J. and Worrell, J. *Decision problems for linear recurrence sequences*, Lecture Notes in Computer, Springer, Berlin-heidelberg, **7550** (2012), 21–28.

[11] Tangsupphathawat, P.; Punnim, N. and Laohakosol, V. *The positivity problem for fourth order linear recurrence sequences is decidable*, Colloq. Math. **128** (2012), 133–142.

[12] Tangsupphathawat, P.; Punnim, N. and Laohakosol, V. *Another proof of the positivity problem for fourth order recurrence sequences*, East-West J. Math. **14** (2012), 185–200.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 19, No. 1 (2018), pp. 20–33

Funciones conjunto valuadas armónicamente convexas

Harmonically Convex Set-Valued Functions

Gabriel Santana (gaszsantana@gmail.com)
Lysis González (lysis.gonzalez@gmail.com)
Nelson Merentes (nmerucv@gmail.com)
Escuela de Matemática,
Universidad Central de Venezuela,
Caracas, Venezuela

Resumen

En este trabajo se introducen las definiciones de funciones conjunto valuadas armónicamente convexas y armónica fuertemente convexa módulo c. Para estas funciones obtenemos algunos resultados importantes como las desigualdades tipo Hermite-Hadamard y Fejér, también un teorema tipo Bernstein-Doetsch.

Palabras y frases clave: función convexa, función armónicamente convexa conjunto valuada, multifunciones armónica fuertemente convexas módulo c, desigualdad tipo Hermite-Hadamard, desigualdad tipo Fejér, Teorema tipo Bernstein-Doetsch.

Abstract

In this paper we introduce the definitions of harmonically convex and strongly harmonically convex modulus c set-valued functions. We present some results for this kind of functions, like inequalities of Hermite-Hadamard and Fejér type and the Bernstein-Doetsch Theorem type.

Key words and phrases: function convex, harmonically convex set-valued function, strongly harmonically convex set-valued functions modulus c, Hermite-Hadamard inequality, Fejér inequality, Bernstein-Doetsch Theorem type.

1 Introducción

El estudio de la convexidad se ha realizado para funciones conjunto valuadas o multifunciones (ver [4, 17]), esto es, aplicaciones de la forma $F : X \to 2^Y$ donde X y Y son conjuntos. La noción de función conjunto valuada surge a principios del siglo XX, cuando Berge en [5] introdujo el concepto de límite superior e inferior de sucesiones de conjuntos y está motivado por sus

Recibido 12/01/2018. Revisado 08/04/2018. Aceptado 01/07/2018.
MSC (2010): Primary 33E20; Secondary 33E15.
Autor de correspondencia: Gabriel Santana

aplicaciones en Análisis Diferencial e Integral, en la Teoría de Optimización y el Cálculo de Variaciones, entre otras (ver [15]).

Una multifunción $F : X \to 2^Y$ es convexa si para todo $x_1, x_2 \in X$ y $t \in [0,1]$ se tiene que

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \subset F(tx_1 + (1-t)x_2). \tag{1}$$

Recientemente se han estudiado distintas nociones de convexidad para funciones conjunto valuadas (ver [13, 14, 18, 19]). Por ejemplo, Huang en [11] extendió la definición (1) e introdujo la convexidad fuerte para multifunciones de la siguiente manera.

Si $(\mathrm{X}, \|\cdot\|), (\mathrm{Y}, \|\cdot\|)$ son espacios vectoriales normados, y $D \subset \mathrm{X}$ un conjunto convexo. Una función conjunto valuada $F : D \to 2^{\mathrm{Y}}$ es **fuertemente convexa módulo** c si para $c > 0$, $x_1, x_2 \in D$ y $t \in (0,1)$ se tiene que

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 \overline{B} \subset F(tx_1 + (1-t)x_2), \tag{2}$$

donde $\overline{B}$ denota la clausura de la bola unitaria de Y.

Estas funciones han sido utilizadas para encontrar cotas al error en algunos problemas de inclusión con restricciones de conjuntos (ver [13]). En este trabajo extendemos para multifunciones la noción de convexidad armónica dada por İscan en [12] para funciones reales y para esta clase de funciones conjunto valuadas probamos la contraparte de resultados clásicos del Análisis Convexo: propiedades de estabilidad respecto a operaciones aritméticas, desigualdad de Hermite-Hadamard, desigualdad de Féjer y Teorema de Bernstein-Doetsh.

2 Preliminares

En esta sección el dominio de las funciones que utilizaremos a partir de ahora es armónicamente convexo, por tal motivo es conveniente introducir tal definición.

Definición 2.1. Un conjunto $D \subset [0, \infty)$ se dice que es un conjunto **armónicamente convexo**, si

$$\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2} \in D$$

para todo $x_1, x_2 \in D$, $t \in [0,1]$.

La idea de definir una función armónicamente convexa proviene de hacer una variación en el dominio de una función convexa, con esta idea İ [12] en el año 2014 define lo siguiente:

Definición 2.2. (ver [12]) Una función $f : D \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ se dice que es una función **armónicamente convexa**, si

$$f\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1),$$

para todo $x_1, x_2 \in D$, $t \in [0,1]$.

En [2], Aslam introduce una definición que proporciona una variación armónica fuerte módulo c de la definición introducida por İscan.

Definición 2.3. Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}\backslash 0 \to \mathbb{R}$ se dice que es **armónica fuertemente convexa módulo** c si para todo $x_1, x_2 \in D, t \in [0,1]$ y $c > 0$ se tiene que

$$f\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1) - ct(1-t)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}\right\|^2. \tag{3}$$

Si en (3) consideramos $t = 1/2$ decimos que f es armónica fuertemente midconvexa módulo c, entonces

$$f\left(\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}\right) \leq \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} - \frac{c}{4}\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}\right\|^2.$$

En [12] se presenta el siguiente teorema, que constituye una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones armónicamente convexas.

Teorema 2.1. *Sean* $f : D \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *una función armónicamente convexa y* $a, b \in D$ *con* $a < b$. *Si* f *es integrable en* $[0,1]$ *se tiene que*

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \tag{4}$$

La desigualdad del tipo Fejér para funciones armónicamente convexas, es estudiada y demostrada por Chen y Wu en [7], este generaliza la desigualdad tipo Hermite-Hadamard para esta clase de funciones.

Teorema 2.2. *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *una función armónicamente convexa y* $a, b \in D$ *con* $a < b$. *Si* f *es integrable en* $[a, b]$*, entonces*

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b \frac{p(x)}{x^2}dx \leq \int_a^b \frac{f(x)}{x^2}p(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}\int_a^b \frac{p(x)}{x^2}dx$$

donde $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función positiva que satisface lo siguiente*

$$p\left(\frac{ab}{x}\right) = p\left(\frac{ab}{a+b-x}\right) \tag{5}$$

Un resultado importante para los logros de este trabajo es el de Robert Aumann (ver [4]), el cual introduce una definición de integral para funciones conjunto valuadas. Considerando la multifunción $F : [0,1] \to 2^Y$, T como el intervalo $[0,1]$ y el conjunto $\mathfrak{F} = \{f(t)$ es integrable en $\mathrm{T} : f(t) \in F(t) \wedge t \in \mathrm{T}\}$.

3 Resultados Principales

A continuación, en esta sección introduciremos la definición de función conjunto valuada armónicamente convexa y armónica fuertemente convexa módulo c, lo cual extienden los conceptos introducidos en [2, 12].

Definición 3.1. Sean X y Y cuerpos, D un subconjunto armónicamente convexo y $F : D \subset \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$ una función conjunto valuada. Se dice que F es **armónicamente convexa** si para todo $x_1, x_2 \in D$ y $t \in [0,1]$ se tiene que

$$tF(x_2) + (1-t)F(x_1) \subset F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right). \tag{6}$$

Si consideramos $t = 1/2$ diremos que F es **armónicamente midconvexa** si satisface lo siguiente

$$\frac{F(x_2) + F(x_1)}{2} \subset F\left(\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}\right)$$

Es posible generalizar esta definición de la siguiente forma:

Definición 3.2. Sean $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado, Y un espacio de Banach, D un subconjunto armónicamente convexo y $F : D \subset \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$ una función conjunto valuada. Se dice que F es **armónica fuertemente convexa módulo c** si para todo $x_1, x_2 \in D$, $t \in [0,1]$ y $c > 0$ se tiene que

$$tF(x_2) + (1-t)F(x_1) + ct(1-t)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}\right\|^2 \bar{B} \subset F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right), \tag{7}$$

donde $\bar{B}$ es la clausura de la bola unitaria de Y. Si tomamos $t = 1/2$ decimos que F es una función **armónica fuertemente midconvexa módulo** c si

$$\frac{F(x_2) + F(x_1)}{2} + \frac{c}{4}\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1x_2}\right\|^2 \bar{B} \subset F\left(\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}\right) \tag{8}$$

Ejemplo 3.1. *Sean $f_1, f_2 : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones armónicamente convexas tales que $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces la multifunción $F : D \to 2^Y$ definida como $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ es armónicamente convexa.*

Solución. Como f_1 y $-f_2$ son funciones armónicamente convexas se tiene que para todo $x_1, x_2 \in D$ y $t \in [0,1]$ lo siguiente:

$$f_1\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \leq tf_1(x_2) + (1-t)f_1(x_1). \tag{9}$$

$$tf_2(x_2) + (1-t)f_2(x_1) \leq f_2\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right). \tag{10}$$

Entonces

$$[tf_1(x_2) + (1-t)f_1(x_1), tf_2(x_2) + (1-t)f_2(x_1)] \subset \left[f_1\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right), f_2\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)\right]$$

Luego, mediante un cálculo elemental podemos ver que

$$tF(x_2) + (1-t)F(x_1) \subset F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)$$

Así, F es una función conjunto valuada armónicamente convexa.

Ejemplo 3.2. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto convexo y no vacío que posee al origen de $\mathbb{R}^3 = Y$. Sea $F : \mathbb{R} \to 2^Y$ una función conjunto valuada definida por $F(x) = -x^2H$, siendo $f(x) = -x^2$ una función armónicamente cóncava y H un conjunto convexo que posee al origen, entonces para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $t \in [0,1]$ se tiene que*

$$-(tx_2^2 + (1-t)x_1^2) \leq -\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)^2.$$

Usando la convexidad del conjunto H tenemos que

$$-(tx_2^2 + (1-t)x_1^2)H \subseteq -\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)^2 H = F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right).$$

Luego,

$$-(tx_2^2 + (1-t)x_1^2)H = -tx_2H - (1-t)x_1H = tF(x_2) + (1-t)F(x_1).$$

Por tanto,

$$tF(x_2) + (1-t)F(x_1) \subseteq F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right).$$

Así, F es una función conjunto valuada armónicamente convexa.

Ejemplo 3.3. *Si $G : D \subset X \to 2^Y$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa, entonces $F(x) = G(x) - cx^2H$, con $x \in I$, es armónica fuertemente convexa módulo c.*

3.1 Operaciones con funciones conjunto valuadas armónicamente convexas

En esta sección, demostraremos que las funciones conjunto valuadas armónicamente convexas son estables bajo la suma, el producto por un escalar y el producto entre funciones.

Proposición 3.1. *Sean X, Y cuerpos sobre $\mathbf{R}$, D un subconjunto armónicamente convexo y $F, G : D \subset \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$ funciones conjunto valuadas armónicamente convexas. Entonces*

1. *$F + G$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa.*
2. *λF es una función conjunto valuada armónicamente convexa, para todo $\lambda \in \mathbf{R}$.*
3. *Si para cada par de puntos $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$, se tiene $F(x_1) \bigcap F(x_2) \neq \emptyset$ o $G(x_1) \bigcap G(x_2) \neq \emptyset$ entonces $F \cdot G(x)$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa.*

Demostración. 1. Sean $x_1, x_2 \in D$ y $t \in [0, 1]$. Dado que F y G son funciones conjunto valuadas armónicamente convexas se tiene que

$$F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \supseteq tF(x_2) + (1-t)F(x_1)$$

y

$$G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \supseteq tG(x_2) + (1-t)G(x_1)$$

además tomando en cuenta que si A, B, D, E son conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $D \subseteq E$ entonces $A + D \subseteq B + E$, obtenemos el resultado deseado

$$\begin{aligned} F + G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) &= F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \\ &\supseteq [tF(x_2) + (1-t)F(x_1)] + [tG(x_2) + (1-t)G(x_1)] \\ &= t(F+G)(x_2) + (1-t)(F+G)(x_1). \end{aligned}$$

2. Sean $\lambda \in \mathbf{R}$ y $x_1, x_2 \in D$, entonces:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) &\supseteq \lambda \cdot (tF(x_2)+(1-t)F(x_1)) \\ &= t(\lambda F(x_2))+(1-t)(\lambda F(x_1)) \end{aligned}$$

Para $\lambda = 0$ se cumple la igualdad.

3. Antes de probar que $F \cdot G$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa veamos que si $x_1, x_2 \in D$, entonces

$$F(x_1)G(x_2)+F(x_2)G(x_1) \subseteq F(x_1)G(x_1)+F(x_2)G(x_2).$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $F(x_1)\bigcap F(x_2) \neq \emptyset$. Tenemos que

$$\{0\} \subseteq [F(x_1)-F(x_2)],$$

donde 0 es el elemento neutro de Y con respecto a la suma. Así

$$\{0\} \subseteq [F(x_1)-F(x_2)][G(x_1)-G(x_2)]$$

Luego, como en Y vale la propiedad distributiva respecto a la adición, la expresión anterior es equivalente a

$$\{0\} \subseteq F(x_1)G(x_1)-F(x_1)G(x_2)-F(x_2)G(x_1)+F(x_2)G(x_2) \tag{11}$$

de modo que, sumando $F(x_1)G(x_2)$ y $F(x_2)G(x_1)$, queda

$$F(x_1)G(x_2)+F(x_2)G(x_1) \subseteq F(x_1)G(x_1)+F(x_2)G(x_2)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta este resultado demostraremos que $F \cdot G$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa. En efecto, para $t \in [0,1]$ y $x_1, x_2 \in D$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (F\cdot G)\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) &= F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right)\cdot G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right), \\ &\supset [tF(x_2)+(1-t)F(x_1)][tG(x_2)+(1-t)G(x_1)], \\ &= t^2F(x_2)G(x_2)+t(1-t)[F(x_2)G(x_1)+F(x_1)G(x_2)]+(1-t)^2F(x_1)G(x_1), \\ &\supset t^2F(x_2)G(x_2)+t(1-t)[F(x_2)G(x_2)+F(x_1)G(x_1)]+(1-t)^2F(x_1)G(x_1), \\ &= tF(x_2)G(x_2)+(1-t)F(x_1)G(x_1), \\ &= t(F\cdot G)(x_2)+(1-t)(F\cdot G)(x_1). \end{aligned}$$

□

3.2 Desigualdad Hermite-Hadamard

En [19], se obtienen importantes resultados para multifunciones fuertemente convexas módulo c, entre ellas una desigualdad tipo Hermite-Hadamard para este tipo de funciones.

Notación. Denotamos por $n(Y)$ a la familia de todos los subconjuntos no vacíos de Y, y $cl(Y)$, $acl(Y)$ subfamilias de $n(Y)$ de todos los conjuntos cerrados y acotados, y armónicamente convexos cerrados y acotados respectivamente de Y.

Teorema 3.1. *(ver [19]) Sean D un subconjunto armónicamente convexo y $F : D \subset X \to cl(Y)$ una función conjunto valuada fuertemente convexas módulo c. Entonces si $\bar{B}$ es la bola unitaria cerrada en Y se tiene lo siguientes*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx + \frac{c}{12}(b-a)^2\bar{B} \subset F\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

y

$$\frac{F(a)+F(b)}{2} + \frac{c}{6}(b-a)^2\bar{B} \subset \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx,$$

para todo $a, b \in D$ tales que $a < b$

Nótese que para $c = 0$ el teorema provee una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones conjunto valuadas convexas.

Teorema 3.2. *Sea $F : D \to cl(Y)$ una función conjunto valuada convexa, entonces*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx \subset F\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{12}$$

y

$$\frac{F(a)+F(b)}{2} \subset \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx, \tag{13}$$

para todo $a, b \in D$ tales que $a < b$

Utilizando este principio, procederemos a continuación mostrar una desigualdad de tipo Hermite-Hadamard para funciones conjunto valuadas armónicanmente convexas.

Teorema 3.3. *Sean X, Y cuerpos y $D \in X$ un conjunto armónicamente convexo, si $F : D \subset \mathrm{X} \to cl(\mathrm{Y})$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa, entonces*

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{F(x)}{x^2}dx \subset F\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \tag{14}$$

y

$$\frac{F(a)+F(b)}{2} \subset \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{F(x)}{x^2}dx, \tag{15}$$

para todo $a, b \in D$ tales que $a < b$

Demostración. Si en (12) consideramos una función conjunto valuada convexa $G(t) = F\left(\frac{1}{t}\right)$ definida en $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$, entonces

$$\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} F\left(\frac{1}{t}\right)dt \subset F\left(\frac{1}{\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{2}}\right)$$

Así,

$$\frac{ab}{b-a}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} F\left(\frac{1}{t}\right)dt \subset F\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

la prueba de este teorema se reduce a demostrar que

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} F\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

Notemos que en virtud a la definición de la integral de Auman y $f\left(\frac{1}{t}\right)$ con $t \in \mathrm{T}' = \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ se tiene que

$$\int_{\mathrm{T}'} F\left(\frac{1}{t}\right) dt = \left\{\int_{\mathrm{T}'} f\left(\frac{1}{t}\right) dt : f \in \mathfrak{F}\right\} = \left\{\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right) dt : f \in \mathfrak{F}\right\}.$$

Luego, para $x = \frac{1}{t}$, tenemos lo siguiente

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx.$$

Entonces,

$$\left\{\int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx : f(x) \in F(x) \wedge x \in [a, b]\right\} = \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

Así,

$$\frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx \subset F\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

Para probar (15) razonamos de manera análoga y obtenemos lo siguiente

$$\frac{F\left(\frac{1}{\frac{1}{b}}\right) + F\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)}{2} \subset \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

Por tanto,

$$\frac{F(b) + F(a)}{2} \subset \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

□

3.3 Desigualdad tipo Fejér

En esta sección, introduciremos una generalización de la desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones conjunto valuadas armónicamente convexas. En [7] se estudia la desigualdad de Fejér para funciones armónicamente convexas, en este trabajo extenderemos el estudio de Chen y Wu para funciones reales armónica a funciones conjunto valuadas.

Teorema 3.4. *Sean $F : I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to 2^{\mathbb{R}}$ una función conjunto valuada armónicamente convexa y $a, b \in I$ con $a < b$. Si F es Aumann integrable sobre $[a, b] \subset I$ entonces*

$$\frac{F(a) + F(b)}{2} \int_a^b \frac{P(x)}{x^2} dx \subseteq \int_a^b \frac{F(x)P(x)}{x^2} dx \subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \int_a^b \frac{P(x)}{x^2} dx. \tag{16}$$

donde $P : [a, b] \to 2^{\mathbb{R}}$, $P(x) = \{p(x)$ es no negativa e integrable, $p(x) \in P(x)\}$ y sastiface lo siguiente

$$P\left(\frac{ab}{x}\right) = P\left(\frac{ab}{a+b-x}\right). \tag{17}$$

Demostración. Sea $F:[a,b]\to 2^{\mathbb{R}}$ una función conjunto valuada armónicamente convexa, entonces para todo $x,y\in[a,b]$ se tiene lo siguiente:

$$tF(y)+(1-t)F(x)\subseteq F\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)$$

para $t=\frac{1}{2}$ obtenemos la siguiente inclusión

$$\frac{F(y)+F(x)}{2}\subseteq F\left(\frac{2xy}{x+y}\right).$$

Consideramos ahora $x=\frac{ab}{(tb+(1-t)a)}$ y $y=\frac{ab}{(ta+(1-t)b)}$, así

$$\frac{F(y)+F(x)}{2}=\frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)+F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2}.$$

Como F es una funcion conjunto valuada armónicamente convexas se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{F(a)+F(b)}{2} &= \frac{(tF(b)+(1-t)F(a))+(tF(a)+(1-t)F(b))}{2}\\ &\subseteq \frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)+F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2}\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que para todo $t\in[0,1]$

$$\frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)+F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2}\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right). \tag{18}$$

La inclusión (18) cumple la igualdad para $t=\frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{F(a)+F(b)}{2} &\subseteq \frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)+F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2}\\ &\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right).\end{aligned}$$

Entonces, dado $P:[a,b]\to 2^{\mathbb{R}}$ una función conjunto valuada tal que $P(x)=\{p(x)$ es no negativa e integrable, $p(x)\in P(x)\}$ y además cumple la condición (17), se tiene que

$$\begin{aligned}P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) &= P\left(\frac{ab}{a+b-(tb+(1-t)a)}\right)\\ &= P\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right).\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\frac{F(a)+F(b)}{2}P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) &\subseteq \frac{F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+F\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)P\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)}{2}\\ &\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right)P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right).\end{aligned}$$

Integrando en ambos lados de la inclusión con respecto a t sobre $[0,1]$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{F(a)+F(b)}{2}\int_0^1 P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt \;&\subseteq\; \int_0^1\left[\frac{F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+F\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)P\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)}{2}\right]dt\\ &\subseteq\; F\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_0^1 P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt. \qquad (19)\end{aligned}$$

Notemos por la definición de Aumann que

$$\int_0^1 P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt=\left\{\int_0^1 p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt, p(x)\in P(x)\right\}$$

operando sobre cada integral obtenemos lo siguiente,

$$\int_0^1 p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt=\frac{ab}{a-b}\int_a^b\frac{p(x)}{x^2}dx;$$

así,

$$\left\{\frac{ab}{a-b}\int_a^b\frac{p(x)}{x^2}dx, p(x)\in P(x)\wedge x\in[a,b]\right\}=\frac{ab}{a-b}\int_a^b\frac{P(x)}{x^2}dx. \qquad (20)$$

Razonando de manera análoga obtenemos la siguiente igualdad

$$\int_0^1\left[\frac{F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+F\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)P\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)}{2}\right]dt=\frac{ab}{a-b}\int_a^b\frac{F(x)P(x)}{x^2}dx. \qquad (21)$$

Luego, sustituyendo (20) y (21) en (19) y multiplicando $\frac{a-b}{ab}$ a ambos lados de la inclusión, obtenemos el resultado deseado.

$$\frac{F(a)+F(b)}{2}\int_a^b\frac{P(x)}{x^2}dx\subseteq\int_a^b\frac{F(x)P(x)}{x^2}dx\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b\frac{P(x)}{x^2}dx.$$

□

3.4 Teorema tipo Bernstein-Doetsch

En esta sección probaremos un teorema tipo Bernstein-Doetsch para funciones conjunto valuadas armónicamente convexas. Para ello presentamos un lema que generaliza la definición de midconvexidad armónica, las demostraciones del lema y el teorema que veremos están hechas basadas en las ideas de Leiva, Merentes, Nikodem y Sánchez que aparecen en [13].

Lema 3.1. *Si $F: D\to n(Y)$ es armónica fuertemente midconvexa módulo c entonces*

$$\frac{k}{2^n}F(x_2)+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)F(x_1)+c\frac{k}{2^n}\left(1-\frac{k}{2^n}\right)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\overline{B}\subset F\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+(1-\frac{k}{2^n})x_2}\right) \qquad (22)$$

para todo $x_1,x_2\in D$ y todo $k,n\in\mathbb{N}$ tal que $k<2^n$.

Demostración. Procederemos a demostrar este lema por el Principio de Inducción Matemática sobre n.

Para $n = 1$, tenemos que $k = 1 < 2$ y así la inclusión

$$\frac{F(x_2) + F(x_1)}{2} + \frac{c}{4} \left\| \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right\|^2 \overline{B} \subset F\left(\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}\right)$$

coincide con la definión de midconvexidad armónica módulo c.

Supongamos ahora que se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $k < 2^n$, deseamos ver que se cumpla para $n + 1$. De esta manera sustituyendo $t = \frac{k}{2^{n+1}}$ en la definición de función armónicamente midconvexa módulo c y realizando algunos calculos elementales, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\tfrac{k}{2^{n+1}} F(x_2) + \left(1 - \tfrac{k}{2^{n+1}}\right) F(x_1) + c\tfrac{k}{2^{n+1}} \left(1 - \tfrac{k}{2^{n+1}}\right) \left\| \tfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right\|^2 \bar{B} \\
&\subset \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{k}{2^n} F(x_2) + \left(1 - \tfrac{k}{2^n}\right) F(x_1) + c\tfrac{k}{2^n} \left(1 - \tfrac{k}{2^n}\right) \left\| \tfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right\|^2 \overline{B} \right] + \tfrac{1}{2} F(x_1) + \tfrac{ck^2}{4(2^{2n})} \left\| \tfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right\|^2 \overline{B}.
\end{aligned}$$

Nótese que

$$\frac{ck^2}{4(2^{2n})} \left\| \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right\|^2 = \frac{c}{4} \left\| \frac{x_1 - \frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1 + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)x_2}}{x_1 \left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1 + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)} \right\|^2 .$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2} \left[\frac{k}{2^n} F(x_2) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) F(x_1) + c\frac{k}{2^n} \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) \left\| \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right\|^2 \overline{B} \right] + \right. \\
&\qquad \left. \frac{1}{2} F(x_1) + \frac{ck^2}{4(2^{2n})} \left\| \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right\|^2 \overline{B} \right) \\
&\subset \frac{1}{2} F\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1 + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)x_2} \right) + \frac{1}{2} F(x_1) + \frac{c}{4} \left\| \frac{x_1 - \frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1 + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)x_2}}{x_1 \left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1 + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)} \right\|^2 \overline{B} \\
&\subset F\left(\frac{x_1 \left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1 + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)}{\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1 + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)} \right) = F\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^{n+1}}x_1 + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)x_2} \right).
\end{aligned}$$

□

Para efectos de los resultados obtenidos en esta sección, es necesario tener en cuenta el lema a continuación.

Lema 3.2. *(ver [20]) Para cada conjunto acotado $A \subset Y$, la función conjunto valuada $F : \mathbb{R} \to n(Y)$ definida por $F(t) = tA, t \in \mathbb{R}$, es continua en $\mathbb{R}$.*

El siguiente teorema proporciona condiciones que asegura la fuerte convexidad armónica de una función conjunto valuada.

Teorema 3.5. *Sea D un conjunto armónicamente convexo. Si $F : D \to acl(Y)$ es una función conjunto valuada armónica fuertemente midconvexa módulo c y semicontinua superiormente sobre D, entonces F es armónica fuertemente convexa módulo c.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in D$ y $t \in (0,1)$. Por la densidad de los números diádicos en $[0,1]$, podemos tomar una sucesión de números diadicos $\{q_n\} \subset (0,1)$ tal que $q_n \to t$. Fijando $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ entonces $\|q_n - t\| < \varepsilon$.

Sea $A \subset acl(Y)$, entonces por el Lema 3.2 se tiene que la multifunción $F : s \in \mathbb{R} \to sA$ es continua, así para todo $F(x) \subset A$ con $x \in D$ se tiene que

$$tF(x_2) \subset q_n F(x_2) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B},$$

$$(1-t)F(x_1) \subset (1-q_n)F(x_1) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B} \tag{23}$$

y

$$ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 \bar{B} \subset cq_n(1-q_n)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \bar{B} + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B} \tag{24}$$

para todo $n \geq n_1$. Por otra parte, dada la semicontinuidad superior de F en el punto $\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}$, obtenemos que

$$F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \subset F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B}$$

como $q_n \to t$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$ entonces

$$F\left(\frac{x_1 x_2}{q_n x_1 + (1-q_n)x_2}\right) \subset F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B} \tag{25}$$

para todo $n \geq n_2$. Por tanto, usando (23), (24), (25) y el Lema 3.1, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} tF(x_2) + (1-t)F(x_1) + ct(1-t)\left\|\tfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \bar{B} &\subset q_n F(x_2) + (1-q_n)F(x_1) + cq_n(1-q_n)\left\|\tfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \bar{B} + \tfrac{3}{4}\varepsilon\bar{B} \\ &\subset F\left(\frac{x_1 x_2}{q_n x_1 + (1-q_n)x_2}\right) + \frac{3}{4}\varepsilon\bar{B} \\ &\subset F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \varepsilon\bar{B}, \end{aligned}$$

para todo $n \geq \text{máx}\{n_1, n_2\}$.

Dado que estas inclusiones se satisfacen para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} tF(x_2) + (1-t)F(x_1) + ct(1-t)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \bar{B} &\subset \bigcap_{\varepsilon > 0}\left(F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \varepsilon\bar{B}\right) \\ &= \overline{F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)} \\ &= F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right). \end{aligned}$$

Así mostramos que F es armónica fuertemente convexa módulo c. □

Los resultados mostrados en este trabajo amplían el estudio de la convexidad en gran manera, muchos temas interasantes y originales surgen a partir de las definiciones y los teoremas introducidos en este artículo, entre los cuales podemos hacer mención algunos: definir la contraparte cóncava de las definiciones introducidas y con ello obtener los resultados correspondientes, obtener un resultado tipo Kuhn para multifunciones armónicamente convexas estableciendo condiciones para generalizar procesos convexos, establecer el cálculo de la variación para este tipo de funciones, extender la noción de k-convexidad para multifunciones armónicamente convexas.

En general podemos decir que cualquier variación de la definicón clásica de convexidad y convexidad armónica en los reales, se puede extender a multifunciones, y con ello es posible establecer nuevos, importantes e interesantes resultados para ahondar la investigación en esta área de la matemática.

Referencias

[1] Aslam, M. and Inayat K. *Some Integral Inequalities for Harmonically h-convex functions.* U.P.B. Series A, **77** (2015), ISS. 1.

[2] Aslam, M.; Noor, K. I. and Iftikhar, S. *Strongly harmonic convex functions.* Preptint. 2016.

[3] Aubin, J. P. and Frankowska, H. *Set-valued Analysis.* Birkhäuser. 1990.

[4] Aumann, R. J. *Integrals of Set-Valued Functions.* The Hebrew University. Journal of mathematical analysis and applications **12** (1965),1–12. Jerusalem, Israel.

[5] Berge, C. *Topological Space: Including a treatment of Multi-Valued functions, vector spaces and convexity.* Dover Publications, INC. Mineola, New York. 1963.

[6] Bernstein, F. and Doetsch, G. *Zur theorie der konvexen Funktionen*, Math. Ann. **76**(4) (1915), MR 1511840, 514–526.

[7] Chen, F. and Wu, S. *Fejer and Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions.* Hindawi Publishing Corporation, Journal of applied Mathematics, **2014** (2014).

[8] Dragomir, S. *Inequalities of Hermite-Hadamard type for HA-Convex functions.* Mathematics, College of Engineering and Science, Victoria University, PO Box 14428, Melbourne City, MC 8001, Australia. 2015.

[9] González, C. *Teoremas de tipo Bernstein-Doetsch para multifunciones convexas y cóncavas.* Tesis. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Escuela de matematica. Caracas-Venezuela, 2016.

[10] González, L.; Merentes, N. y Santana, G. *Funciones conjunto valuadas armónicamente convexas*, Trabajo especial de grado, Escuela de matemática, Facultad de ciencias, UCV. Caracas-Venezuela, 2016.

[11] Huang, H. *Global error bounds with exponents for multifunctions with set constraints.* Communications in Contemporary Mathematics **12**(03) (2010), 417–435.

[12] İscan, İ. *Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions.* Department of Mathematics, Faculty of Art and Sciences, Giresun University, 28100, Giresun, Turkey, 2014.

[13] Leiva, H.; Merentes, N.; Nikodem, K. and Sánchez, J. L. (2013). *Strongly convex set-valued maps*. Disponible Online en htpp://www.springerlink.com, J. Glob Optim 57:695-705 DOI 10.1007/s 10898-013-00-0051-4.

[14] Mejías, O.; Merentes, N. and Nikodem, K. *Strongly concave set-valued maps*. Mathematica Aeterna **4**(5) (2014), 477–478.

[15] Merentes, N. y Ribas, S. *El desarrollo del concepto de función convexa*. Ediciones IVIC, Caracas-Venezuela, 2013.

[16] Merentes, N. and Nikodem, K. *Remarks on strongly convex functions*. Aequationes Math. **80**(1-2) (2010), 193–199.

[17] Narváez, D. X. y Restrepo, G. *Funciones Multivaluadas*. Facultad de Ciencias Naturales y Exactas Universidad del Valle. Revista de Ciencias, 2011.

[18] Nikodem, K. *A characterization of midconvex set-valued functions*. Acta Universitatis Carolinae-Mathematica ET Physica, 1989.

[19] Nikodem, N.; Sánchez, J. and Sánchez, L. *Jensen and Hermite-Hadamard inequalities for strongly convex set-valued maps*. Mathematica Aeterna, **4**(8) (2014), 979–987.

[20] Nikodem, K. *K-convex and K-concave Set-Valued Functions*, Zeszyty Nauk. Politech. Lódz. Math. **4**(3) (2003), Art. 52.

[21] Nikodem, K. *Continuity of K-convex Set-Valued Fumctions*. Bulletin of the Polish Academy of Sciencies Mathematics. **34**(7-8) (1986).

[22] Polyak, B. T. *Existence theorems and convergence of minimizingsequences in extremun problens with restrictions*. Sov. Math. Dokl. **7** (1966), 72–75.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 19, No. 1 (2018), pp. 34–45

Algunas relaciones espectrales de los operadores normaloides

Some spectral relations of normaloid operators

Luis Berbesí (`lberbesi@ula.ve`)
Pedro Peña (`pedrop@ula.ve`)
Grupo de Investigación Regina Scientiarum.
Departamento de Física y Matemáticas.
Núcleo Universitario Rafael Rangel. Universidad de Los Andes.
Trujillo, Venezuela.

Resumen

En este artículo se presentan algunas relaciones espectrales que involucran el espectro aproximado puntual, el espectro puntual, el espectro de compresión y el espectro periférico de endomosfismos continuos sobre espacios de Banach. Se establecen algunas propiedades y ejemplos de relaciones espectrales de operadores en espacios de Hilbert. Adicionalmente se establece la relación entre el espectro periférico, el espectro inyectivo y el espectro aproximado puntual de los operadores normaloides.

Palabras y frases clave: Espectro aproximado puntual, espectro periférico, operadores normaloides.

Abstract

This paper presents some spectral relationships involving the approximate point spectrum, the point spectrum, the compression spectrum and the peripheral spectrum of continuous endomorphisms on Banach spaces. Some properties and examples of spectral relationships of operators in Hilbert spaces are established. Additionally, the relationship between the peripheral spectrum, the injective spectrum and the approximate point spectrum of the normaloid operators is established.

Key words and phrases: Approximate point spectrum, peripheral spectrum, normaloid operators.

1 Introducción

El teorema espectral del álgebra lineal establece que las matrices diagonalizables son justamente las matrices A que satisfacen la relación $A^*A = AA^*$, donde A^* denota la traspuesta conjugada de la matriz A. Considerando ahora transformaciones lineales $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, donde $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita, se puede asociar al operador T un operador T^*, llamado

Recibido 06/03/2018. Revisado 14/04/2018. Aceptado 17/07/2018.
MSC (2010): Primary 47A10; Secondary 47A25.
Autor de correspondencia: Luis Berbesí

adjunto de T, que generaliza la matriz adjunta. Un operador lineal acotado $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, que satisface la igualdad $T^*T = TT^*$, se le denomina operador normal.

Los operadores normales son de gran utilidad práctica en análisis funcional y en teoría espectral. Además, son importantes en el estudio de álgebra de operadores en espacios de Hilbert, que constituyen la base matemática de la mecánica cuántica. En la formulación matemática de la mecánica cuántica, los denominados sistemas cuánticos son descritos por operadores y vectores en un espacio de Hilbert separable denominado sistema de estado; las propiedades de los estados del sistema que pueden ser determinados (observados), se representan por operadores lineales y autoadjuntos ($T^* = T$) sobre espacios de Hilbert, siendo éstos una subclase de la clase de los operadores normales. Los operadores normaloides son una generalización de los operadores normales; se presentan algunos resultados de algunos subconjuntos espectrales para dichos operadores.

2 Resultados preliminares

En esta sección se exponen algunos resultados cuyo objetivo principal es facilitar el entendimiento de la teoría a desarrollar en este artículo. Muchos de estos resultados se tratan, de modo más amplio y detallado, en algunos textos de análisis funcional. (ver [2, 5, 6, 7, 8, 9, 11]).

2.1 Operadores lineales acotados

Definición 2.1. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal, con $(X, ||\cdot||_X)$ y $(Y, ||\cdot||_Y)$ espacios normados. El operador T se denomina *acotado* o *continuo* si $T(D(0,1))$ es un conjunto acotado en Y, donde $D(0,1)$ representa el disco unitario en X.

Se define la *norma* del operador T mediante

$$||T||_{\text{o}} = \sup\{||Tx||_Y : ||x||_X \leq 1\}.$$

Se denotará mediante $L(X,Y)$ el espacio de los operadores lineales y acotados de X en Y. Cuando $X = Y$, se empleará la notación $L(X)$ en lugar de $L(X,X)$. En el caso de que $Y = \mathbb{K}$, se acostumbra a usar la notación X' en lugar de $L(X,\mathbb{K})$: el espacio X' se denomina *espacio dual* de X. Cada elemento de X' recibe el nombre de *funcional lineal acotado o continuo.*

2.2 Operador adjunto

Un resultado importante dentro del análisis funcional es el teorema de representación de Riesz (consultar [5] para su demostración), que se presenta a continuación.

Teorema 2.1 (representación de Riesz). *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Si $y \in \mathbb{H}$, la aplicación $f : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ dada por*

$$f(x) = \langle x, y\rangle, \tag{1}$$

es un funcional acotado, con $||f|| = ||y||$. Recíprocamente, para cada $f \in \mathbb{H}'$, existe un único $y \in \mathbb{H}$ tal que se verifica (1).

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Para cada $y \in \mathbb{H}$, sea $f : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ la aplicación dada por

$$f(x) = \langle Tx, y\rangle.$$

Por el teorema de representación de Riesz, existe un único $u_y \in \mathbb{H}$ tal que

$$f(x) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, u_y\rangle, \forall\, x \in \mathbb{H}. \tag{2}$$

Definición 2.2. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. La aplicación $T^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dada por

$$T^*(y) = u_y,$$

donde u_y es el único punto tal que

$$f(x) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, u_y\rangle, \forall\, x \in \mathbb{H},$$

se denomina *operador adjunto* de T.

La aplicación T^* está bien definida. Además se verifica, por (2), que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \forall\, x, y \in \mathbb{H}.$$

Proposición 2.1. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Entonces T^* es un operador lineal que cumple las siguientes propiedades:*

1. $(T^*)^* = T$.
2. *T^* es un operador acotado, con $||T^*|| = ||T||$.*
3. *Para cada $\alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$.*
4. *Si T es invertible, entonces T^* también lo es, verificándose que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*
5. *Si $S \in L(\mathbb{H})$, entonces*
   (a) $(T + S)^* = T^* + S^*$.
   (b) $(TS)^* = S^*T^*$.
6. $\ker(T) = \ker(T^*T)$, *y* $\ker(T^*) = \ker(TT^*)$.

Demostración. Consultar [5] y [6]. □

Teorema 2.2. *Sea $T \in L(\mathbb{H})$, con $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Entonces*

1. $\ker(T^*) = T(\mathbb{H})^{\perp}$.
2. $\ker(T) = T^*(\mathbb{H})^{\perp}$.

Demostración. Consultar [6]. □

Corolario 2.1. *Sea $T \in L(\mathbb{H})$, con $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Entonces*

1. $\mathbb{H} = \overline{T(\mathbb{H})} \oplus \ker(T^*)$.
2. $\mathbb{H} = \overline{T^*(\mathbb{H})} \oplus \ker(T)$.

Demostración. Consultar [6]. □

2.3 Operador dual

Definición 2.3. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Para cada $f \in X'$, sea $T' \in L(X')$ el operador dado por $T'(f) := fT$. El operador T' se denomina *operador dual* de T.

Note que $T'(f) : X \to \mathbb{C}$, dado por $[T'(f)](x) = f(Tx)$, es un operador lineal y continuo.

Proposición 2.2. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces T tiene rango cerrado si, y sólo si, T' tiene rango cerrado.*

Demostración. Consultar Proposición 36.4 y Teorema 97.1 de [8]. □

Teorema 2.3. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Existe un isomorfismo isométrico U entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}'$ tal que $UU^{-1} = I_{\mathbb{H}'}$ y $U^{-1}U = I_{\mathbb{H}}$.*

Demostración. Consultar [4]. □

Teorema 2.4 (Representación de Fréchet-Riesz)**.** *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y considere $T \in L(\mathbb{H})$. Si U es el isomorfismo isométrico entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}'$ del Teorema 2.3, entonces*

$$T^* = U^{-1}T'U. \tag{3}$$

Demostración. Consultar [4]. □

Teorema 2.5. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(X)$. Entonces T tiene rango cerrado si, y solamente si, T^* tiene rango cerrado.*

Demostración. Consultar [4]. □

2.4 Operador normal

Definición 2.4. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. El operador T se denomina *normal* si $TT^* = T^*T$, es decir, si T conmuta con su operador adjunto.

En [5] se demuestra, sin mayor dificultad, que T es un operador normal si, y sólo si, para cada $x \in \mathbb{H}$, $||Tx|| = ||T^*x||$.

Ejemplo 2.1. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ el operador dado por $Tx = ix$. Se verifica que $T^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ viene dado por $T^*x = -ix$. Mún, para cada $x \in \mathbb{H}$,*

$$||Tx|| = ||x|| = ||T^*x||,$$

por lo que T es un operador normal.

Nota 1. Observe que si T es un operador normal, $\ker(T) = \ker(T^*T) = \ker(TT^*) = \ker(T^*)$.

2.5 Teoría espectral

Definición 2.5. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El conjunto *resolvente* del operador T se define como

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ existe y } (T - \lambda I)^{-1} \in L(X)\},$$

o de manera equivalente,

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es un operador biyectivo}\}.$$

Definición 2.6. Sea $T \in L(X)$. El *espectro* del operador T se define como

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Los valores λ de $\sigma(T)$ se denominan *puntos espectrales* de T.

Nota 2. Si $\lambda \in \sigma(T)$, es decir, si $T - \lambda I$ no es invertible, se puede considerar la siguiente descomposición clásica del espectro.

Definición 2.7. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El conjunto $\sigma(T)$ puede ser descompuesto en los siguientes conjuntos mutuamente disjuntos:

1. *El espectro puntual* de T, que se define por
$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es inyectivo}\}.$$
2. *El espectro continuo* de T, que se define por
$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es inyectivo, } \overline{(T - \lambda I)(X)} = X, \text{ pero } (T - \lambda I)^{-1} \text{ no es continuo}\}.$$
3. *El espectro residual* de T, que se define por
$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es inyectivo, con } \overline{(T - \lambda I)(X)} \subsetneq X\}.$$

Nota 3. De las definiciones anteriores se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \rho(T) \cup \sigma(T) \\ &= \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T), \end{aligned}$$

siendo la unión disjunta dos a dos, obteniéndose así una partición de $\mathbb{C}$.

Nota 4. Si $T \in L(X)$, donde X es un espacio de Banach complejo, es conocido que $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$ (ver [9]).

Ejemplo 2.2. *Sean $R : \ell^2 \to \ell^2$ y $L : \ell^2 \to \ell^2$ los operadores dados por*

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (0, x_1, x_2, \ldots), \\ L(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (x_2, x_3, x_4, \ldots). \end{aligned}$$

Los operadores R y L se denominan traslación a la derecha *y* traslación a la izquierda*, respectivamente. Se verifica que $R^* = L$, y por tanto, $L^* = R$. Igualmente se verifica que*

$$\begin{aligned} \sigma(L) &= \sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}, \\ \sigma_p(L) &= \sigma_r(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \\ \sigma_c(L) &= \sigma_c(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}, \\ \sigma_r(L) &= \sigma_p(R) = \emptyset. \end{aligned}$$

Proposición 2.3. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces $\sigma(T) = \sigma(T')$.*

Demostración. Ver [8], Proposición 44.2. $\square$

A continuación se definen algunos conjuntos espectrales importantes para la investigación.

Definición 2.8. Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. La aplicacion T se denomina *inferiormente acotada* si existe un $c > 0$, tal que para cada $x \in X$, $c||x|| \leq ||Tx||$.

En [3] se demuestra que T es un operador inferiormente acotado si, y sólo si, T es inyectivo y su rango es un conjunto cerrado. Igualmente se demuestra que T es un operador invertible si, y solo si, T es un operador inferiormente acotado y sobreyectivo.

Definición 2.9. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *espectro aproximado puntual* del operador T es el conjunto

$$\sigma_a(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es inferiormente acotada}\}.$$

Proposición 2.4. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_a(T)$.*

Demostración. Para cada $\lambda \notin \sigma_a(T)$, existe $c > 0$ tal que

$$c||x|| \leq ||(T - \lambda I)x||.$$

Si $(T - \lambda I)x = 0$, entonces, por hipótesis, $c||x|| = 0$, es decir, $x = 0$, lo que indica que el operador $T - \lambda I$ es inyectivo, por lo que $\lambda \notin \sigma_p(T)$. $\square$

Definición 2.10. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *espectro de compresión* del operador T es el conjunto

$$\sigma_{com}(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(T - \lambda I)(X)} \subsetneqq X\right\}.$$

Se verifica que $\sigma_r(T) \subseteq \sigma_{com}(T)$.

Proposición 2.5. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces*

$$\sigma(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_{com}(T)\,.$$

Demostración. Consultar [3]. $\square$

Definición 2.11. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *espectro sobreyectivo* del operador T es el conjunto

$$\sigma_s(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es un operador sobreyectivo}\}.$$

Nota 5. Observe que si $T \in L(X)$, entonces $\sigma_{com}(T) \subseteq \sigma_s(T)$.

Ejemplo 2.3. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo e $I : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ el operador identidad. Entonces $\sigma_p(I) = \{1\}$, $\sigma_r(I) = \emptyset$ y $\sigma_c(I) = \emptyset$. También se verifica que $\sigma_a(I) = \sigma_{com}(I) = \sigma_s(I) = \{1\}$.*

Nota 6. En [10] se demuestra que si X es un espacio de Banach complejo, $T, S \in L(X)$ y T y S conmutan, entonces $\sigma_a(T + S) \subseteq \sigma_a(T) + \sigma_a(S)$. Adicionalmente se demuestra que T es inferiormente acotada si, y solo si, T^* es sobreyectiva. Así, por dualidad, $\sigma_s(T + S) \subseteq \sigma_s(T) + \sigma_s(S)$. Además, si $Q \in L(X)$ es cuasinilpotente y conmuta con T, entonces

- $\sigma_a(T+Q) = \sigma_a(T)$,
- $\sigma_s(T+Q) = \sigma_s(T)$, y
- $\sigma(T+Q) = \sigma_a(T+Q) \cup \sigma_s(T+Q) = \sigma(T)$.

Nota 7. Si A es un subconjunto de $\mathbb{C}$, la notación $conj(A)$ representa al conjunto de escalares $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ para los que se verifica que $\lambda \in A$, esto es,

$$conj(A) := \{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in A\}.$$

El siguiente teorema proporciona una fórmula para determinar el espectro de compresión de un operador T, en términos del espectro puntual del operador T^*.

Teorema 2.6. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Entonces $\sigma_{com}(T) = conj(\sigma_p(T^*))$.*

Demostración. Consultar [4]. □

Definición 2.12. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *radio espectral* del operador T se define como

$$r_\sigma(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

De la Nota 6 se sigue que si X es un espacio de Banach complejo y $T, Q \in L(X)$, con Q cuasinilpotente conmutando con T, entonces $r_\sigma(T+Q) = r_\sigma(T)$.

Definición 2.13. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. El operador T se denomina *normaloide* si $r_\sigma(T) = ||T||$.

Observe que $r_\sigma(T) = r_\sigma(T^*)$, y en consecuencia, T es un operador normaloide si, y solo si, T^* es normaloide.

Finalmente, se procede a definir otro subconjunto espectral notable de un operador, estableciendo para ello una proposicievia.

Proposición 2.6. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces*

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_\sigma(T)\} \neq \emptyset.$$

Demostración. Consultar [8]. □

Definición 2.14. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *espectro periférico* del operador T es el conjunto

$$\sigma_\pi(T) := \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_\sigma(T)\}.$$

Observe que $\sigma_\pi(T^*) = conj(\sigma_\pi(T))$.

Definición 2.15. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *ascendente* del operador T se define como

$$a(T) := \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : \ker(T^n) = \ker(T^{n+1})\}.$$

Si no existe tal n, se escribe $a(T) = \infty$.

Nota 8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\ker(T^n) \subseteq \ker(T^{n+1})$.

Proposición 2.7. *Sea X un espacio de Banach complejo, $T \in L(X)$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces $a(T) \leq m$ si, y sólo si,*

$$\ker(T^n) \cap T^m(X) = \{0\}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Consultar [4]. $\square$

Proposición 2.8. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces*

1. *T es un operador normaloide si, y sólo si, T' es un operador normaloide.*
2. *$\sigma_\pi(T) = \sigma_\pi(T')$.*

Demostración. Ambas partes son consecuencias de la Proposición 2.3. $\square$

Proposición 2.9. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$, con T distinto del operador nulo. Si T es normaloide, entonces*

$$\sigma_\pi(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : a(\lambda I - T) \leq 1\}.$$

Demostración. Consultar [4]. $\square$

3 Resultados principales

El siguiente teorema es conocido para endomorfismos continuos sobre espacios de Banach. Se presenta ahora una versión equivalente para operadores adjuntos sobre espacios de Hilbert.

Teorema 3.1. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Entonces T es un operador inyectivo y con rango cerrado (resp. es sobreyectivo) si, y solamente si, T^* es un operador sobreyectivo (resp. T^* es un operador inyectivo y con rango cerrado).*

Demostración. Suponga que T es un operador inyectivo, con rango cerrado. Como $\ker(T)$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{H}$, entonces

$$\mathbb{H} = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp.$$

Por otro lado, por el Corolario 2.1,

$$\mathbb{H} = \ker(T) \oplus \overline{T^*(\mathbb{H})}.$$

Ya que el complemento ortogonal de un subespacio es único, entonces

$$\ker(T)^\perp = \overline{T^*(\mathbb{H})}. \tag{4}$$

Al ser T un operador inyectivo, entonces se sigue, por (4), que

$$\overline{T^*(\mathbb{H})} = \mathbb{H}.$$

Por tener T rango cerrado, en virtud del Teorema 2.5, T^* también tiene rango cerrado. Por tanto,

$$T^*(\mathbb{H}) = \mathbb{H},$$

y así, T^* es un operador sobreyectivo.

Recíprocamente, supongamos que T^* es un operador sobreyectivo. Como

$$\ker(T)^{\perp} = \overline{T^*(\mathbb{H})},$$

entonces

$$(\ker(T)^{\perp})^{\perp} = (\overline{T^*(\mathbb{H})})^{\perp},$$

pero por ser $\ker(T)$ un subespacio cerrado de $\mathbb{H}$,

$$(\ker(T)^{\perp})^{\perp} = \ker(T),$$

y así,

$$\ker(T) = \overline{T^*(\mathbb{H})}^{\perp}. \tag{5}$$

Debido a que T^* es un operador sobreyectivo, se sigue, de (5), que

$$\ker(T) = \mathbb{H}^{\perp} = \{0\}.$$

Por tanto, T es un operador inyectivo. Para culminar, note que T^* tiene rango cerrado, por lo que T también tiene rango cerrado, en virtud del Teorema 2.5. □

Nota 9. Del teorema anterior se sigue que $\sigma_a(T^*) = conj(\sigma_s(T))$ y $\sigma_s(T^*) = conj(\sigma_a(T))$.

El teorema siguiente establece que los autovalores de los operadores normales son precisamente los valores de su espectro de compresión.

Teorema 3.2. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$ un operador normal. Entonces*

1. $\sigma_p(T) = conj(\sigma_p(T^*))$.
2. $\sigma_{com}(T) = \sigma_p(T)$.

Demostración. El primer apartado se deduce de las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{rcl} \lambda \in \sigma_p(T) & \Leftrightarrow & T - \lambda I \text{ no es inyectivo} \\ & \Leftrightarrow & \ker(T - \lambda I) \neq \{0\} \\ & \Leftrightarrow & \ker((T - \lambda I)^*) \neq \{0\} (\text{pues } T - \lambda I \text{ es normal}) \\ & \Leftrightarrow & \ker(T^* - \overline{\lambda} I) \neq \{0\} \\ & \Leftrightarrow & \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \\ & \Leftrightarrow & \lambda \in conj(\sigma_p(T^*)). \end{array}$$

Para el segundo apartado, basta aplicar el Teorema 2.6 y la primera parte de este teorema, para obtener que $\sigma_{com}(T) = conj(\sigma_p(T^*)) = \sigma_p(T)$. □

La demostración de la siguiente proposición ofrece una prueba diferente a las tradicionales conseguidas en textos de teoría espectral.

Proposición 3.1. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Si T es normal, entonces $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.*

Demostración. Por la Proposición 2.4, Proposición 2.5 y el Teorema 3.2, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \sigma(T) & = & \sigma_a(T) \cup \sigma_{com}(T) \\ & = & \sigma_a(T) \cup \sigma_p(T) \\ & = & \sigma_a(T). \end{array}$$

□

La siguiente proposición establece la relación entre el espectro periférico y el espectro sobreyectivo de un operador normaloide.

Proposición 3.2. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Si T es normaloide, con T no nulo, entonces $\sigma_\pi(T) \subseteq \sigma_s(T)$. Además, $\sigma_\pi(T) \subseteq \sigma_a(T)$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma_\pi(T)$. Suponga, por el absurdo, que $\lambda \notin \sigma_s(T)$. Entonces se verifica que $(T - \lambda I)(X) = X$. Ahora, de la Proposición 2.9, se sigue que $a(T - \lambda I) \leq 1$, o equivalentemente, por la Proposición 2.7,

$$\ker(T - \lambda I) \cap (T - \lambda I)(X) = \{0\}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\ker(T - \lambda I) &= \ker(T - \lambda I) \cap X \\ &= \ker(T - \lambda I) \cap (T - \lambda I)(X) \\ &= \{0\}.\end{aligned}$$

Por tanto, $T - \lambda I$ es un operador inyectivo y sobreyectivo, por lo que $\lambda \notin \sigma(T)$, lo cual es un absurdo. En consecuencia, $\sigma_\pi(T) \subseteq \sigma_s(T)$.

Por otro lado, por la Nota 9 y la primera parte de este teorema,

$$\begin{aligned}\sigma_\pi(T) &= conj(\sigma_\pi(T^*)) \\ &\subseteq conj(\sigma_s(T^*)) \\ &= \sigma_a(T).\end{aligned}$$

□

En la Proposición 3.2, no se puede reemplazar $\sigma_s(T)$ por $\sigma_{com}(T)$. En efecto, si R y L son los operadores traslación a la derecha e izquierda, respectivamente del Ejemplo 2.2, entonces ambos son normaloides, con $\sigma_{com}(L) = conj(\sigma_p(R)) = \emptyset$, y $\sigma_\pi(L) \neq \emptyset$. Por tanto, no se cumple que $\sigma_\pi(L) \subseteq \sigma_{com}(T)$.

Nota 10. En [8] se demuestra que los operadores paranormales ($||Tx||^2 \leq ||T^2x||\,||x||, \forall x \in X$), son normaloides, y en consecuencia, satisfacen que $\sigma_\pi(T) \subseteq \sigma_s(T)$. También son normaloides los operadores autoadjuntos, normales, quasinormales e hyponormales.

Teorema 3.3. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T, Q \in L(X)$, con T y Q conmutando entre sí. Si T es normaloide y Q cuasinilpotente, entonces $\sigma_\pi(T + Q) \subseteq \sigma_s(T + Q)$.*

Demostración. De la Nota 6 y la Proposición 10,

$$\begin{aligned}\sigma_\pi(T + Q) &= \sigma(T + Q) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_\sigma(T + Q)\} \\ &= \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_\sigma(T)\} \\ &= \sigma_\pi(T) \\ &\subseteq \sigma_s(T) \\ &= \sigma_s(T + Q).\end{aligned}$$

□

En la proposición siguiente, se establece una serie de inclusiones espectrales importantes para determinar algunos subconjuntos espectrales del espectro clásico de un operador normaloide.

Proposición 3.3. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$, con T normaloide. Entonces*

1. $\sigma_\pi(T) \subseteq conj(\sigma_a(T^*))$.
2. $\sigma_\pi(T^*) \subseteq conj(\sigma_a(T))$.
3. $\sigma_\pi(T^*) \subseteq conj(\sigma_a(T^*))$.

Demostración.

1. La Proposición 3.2 garantiza que $\sigma_\pi(T) \subseteq \sigma_s(T)$. Como $\sigma_s(T) = conj(\sigma_a(T^*))$, entonces $\sigma_\pi(T) \subseteq conj(\sigma_a(T^*))$.
2. Basta aplicar la primera parte al operador T^*.
3. Se sigue del hecho de que $\sigma_\pi(T) = \sigma_\pi(T^*)$.

□

Ejemplo 3.1. *Sean $R : \ell^2 \to \ell^2$ y $L : \ell^2 \to \ell^2$ dados por*

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (0, x_1, x_2, \ldots), \\ L(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (x_2, x_3, x_4, \ldots), \end{aligned}$$

los operadores traslación a la derecha e izquierda, respectivamente, del Ejemplo 2.2. Entonces

$$\sigma_a(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\},$$

y además,

$$\sigma_s(R) = conj(\sigma_a(L)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

La inclusión de la Proposición 3.2 puede ser estricta, como se demuestra a continuación.

Ejemplo 3.2. *Sean nuevamente R y L los operadores traslación a la derecha y traslación a la izquierda, respectivamente, definidos sobre ℓ^2. Sea $T : \ell^2 \to \ell^2 \times \ell^2$ dado por*

$$T(x) = (R(x), U(x)),$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ y $U : \ell^2 \to \ell^2$ es el operador definido por

$$U(x) = (0, x_2, x_3, \ldots).$$

Entonces T es un operador normaloide. Más aún, $T^* : \ell^2 \to \ell^2 \times \ell^2$ está dado por

$$T^*(x) = (L(x), U(x)).$$

Por otro lado, se cumple que $\sigma(T) = D(0,1)$ y $\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \cup \{0\}$. Igualmente se cumple

$$\begin{aligned} \sigma_\pi(T^*) &= D(0,1) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \end{aligned}$$

También se verifica que

$$\sigma_s(T^*) = conj(\sigma_a(T)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \cup \{0\}.$$

En consecuencia, $\sigma_\pi(T^*) \subsetneqq \sigma_s(T^*)$.

Referencias

[1] Aiena, P. and Guillén. J. *Weyl's Theorem for Perturbations of Paranormal Operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **35**(2008), 2433–2442.

[2] Bachman, G. and Narici, L. *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1966.

[3] Berbesí, L. *Algunas Relaciones Espectrales de los Operadores Convexoides y Transaloides*, tesis de maestría, Universidad de Los Andes, Mérida, 2015.

[4] Berbesí, L. *Operadores Normales y su Espectro*, trabajo de ascenso, Universidad de los Andes, Trujillo, 2014.

[5] Debnath, L. and Mikusinski, P. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications* (tercera edición), Elsevier Academic Press, San Diego, 2005.

[6] Furuta, T. *Invitation to Linear Operators*, Taylor and Francis, London, 2002.

[7] Halmos, P. *Hilbert Space Problem Book*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[8] Heuser, H. *Functional Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1982.

[9] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classic Library Edition, Ontario, 1989.

[10] Laursen, K. and Neumann, M. *An Introduction to Local Spectral Theory*, Clarendon Press, Oxtord, 2000.

[11] Vera, A. y Alegría, P. *Un Curso de Análisis Funcional*, AVL, Bilbao, 1997.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 19, No. 1 (2018), pp. 46–62

Influencias cognoscitivas de las tecnologías de información y comunicación en el aprendizaje de la Matemática

Cognitive influences of information and communication technology in the learning of Mathematics

Derling Mendoza (dmendoza@unibe.edu.ec)
Jesús Gómez (jgomez@unibe.edu.ec)
Summar Gómez (sgomez@unibe.edu.ec)
Departamento de Investigación, INCYT
Universidad Iberoamericana del Ecuador (UNIB.E)
Provincia Pichincha, Quito, Ecuador

Resumen

En el presente artículo se organiza un análisis introspectivo vivencial del aprendizaje significativo, mediante los resultados de una investigación cualitativa, estructurada bajo los paradigmas de la fenomenología interpretativa y la innovación tecnológica, como pilares de enlace primordial para proceder en la indagación del objeto de estudio. Estas deducciones de razonamiento aportan nuevas maneras de forjar y vivir la educación, por medio de la aplicación coherente de las tecnologías de información y comunicación (TIC), facilitando y permitiendo la concepción del desarrollo cognitivo, para el pensamiento lógico matemático de los estudiantes en la Universidad Iberoamericana del Ecuador UNIB.E.

Palabras y frases clave: Aprendizaje cognoscitivo, TIC, educación, Matemática.

Abstract

In this article we organize an introspective experiential analysis of meaningful learning, through the results of a qualitative research, structured under the paradigms of interpretive phenomenology and technological innovation, as pillars of primordial link to proceed in the investigation of the object of study, These deductions of reasoning provide new ways of forging and living education through the coherent application of information and communication technologies (ICT), facilitating and allowing the conception of cognitive development, for the mathematical logical thinking of students at the level academic in the Universidad Iberoamericana del Ecuador UNIB.E.

Key words and phrases: Cognitive learning, ICT, education, Mathematics.

Recibido 18/01/2018. Revisado 30/01/2018. Aceptado 12/03/2018.
MSC (2010): Primary 97C30; Secondary 97C70.
Autor de correspondencia: Derling Mendoza Velazco

1 Introducción

Para el hombre la investigación es una actividad principal desde el inicio de los tiempos. El anhelo de aprender, conocer, observar y la necesidad de analizar para movilizarse en un mundo, tanto predecible como interpretativo, es desde hace muchos años una variable del quehacer humano. La educación tradicional en gran medida privilegia las capacidades repetitivas e imaginativas más que las creativas del docente y el estudiantado. Incorporar las TIC al proceso de investigación representa cambios significativos. Generaliza un paso evolutivo importante y una innovación que facilita, con mayor fluidez, los encuentros cercanos entre especialistas y estudiantes geográficamente distantes, pero conectados a la amplia red socio educativa y virtual del ciberespacio, que proporciona oportunidades de desarrollo investigativo.

Los métodos tradicionales de enseñanza y aprendizaje en la Matemática, no presentan efectividad a los educandos. Estas formalizan anomalías consecuentes, que son críticas comunes de los adolescentes, como el temor o rechazo que tienen de aversión a la Matemática. La investigación en ciencias cognitivas proporciona evidencias empíricas que muestran que el conocer no es un medio pasivo de una información. Por el contrario, la implementación de la tecnología para el ámbito universitario, juega un papel importante en el funcionamiento intelectual y para el procesamiento de la información que se recibe. Dichos procesos, son en gran medida, responsables de los conocimientos que se adquieren.

Del mismo modo, se puede señalar que las corrientes psicológicas cognoscitivas, fomentadas con la aplicación de TIC, alcanzan el predominio en el campo investigativo del aprendizaje humano, acumulando evidencias suficientes, para afirmar que la mayoría de los estudiantes de Matemática a nivel superior, necesitan laborar con modelos y representaciones digitales, para un aprendizaje significativo del deber ser, y así adquirir de manera sencilla un conocimiento abstracto, complejo y simbólico de las ciencias numéricas. Los resultados de la investigación podrían ser útiles en otras áreas del conocimiento porque contribuye con análisis y orientaciones en distintos niveles del desempeño educativo profesional.

1.1 El conocimiento

Para el ser humano el conocimiento es una actividad esencial para adquirir información, desarrollar la vida y certezas de la realidad. Todo discernimiento requiere forzosamente una relación en la cual aparecen dos elementos vinculados entre sí: el individuo y el objeto. Landeau en [18], define que:

> *El conocimiento es un conjunto de información que posee el ser humano del escenario que lo rodea y de sí mismo, valiéndose de los sentidos y de la reflexión para obtenerlo; luego lo utiliza como material para precisar las características de los objetos en su entorno empleando la observación. (p. 1)*

Por lo tanto, el hombre como ser complejo y de variados razonamientos, tiene diferentes formas de acercarse y adquirir información y resolver problemas. Varios autores centralizan el conocimiento en dos aristas únicas y clasificatorias, entre el conocimiento científico y el vulgar. Pero, también se debe tipificar según las distintas inclinaciones al percibir la realidad, entre ellos: el común, el cual es adquirido mediante la experiencia y contacto con la vida; el religioso, que procede de la revelación profética de las tradiciones o libros sagrados, de Dios o de dioses; y el conocimiento social, que trata de una acción instrumental, de una depuración de toda alteridad, que conduce a la producción semántica organizadas a partir de constructores basados en la lógica.

El conocimiento filosófico, proviene de la introspección sistémica y metódica de las últimas realidades de la existencia humana, se encuentra sólidamente abierto al reconocimiento y es habitual para la exploración y visión de los fenómenos de las investigaciones. El científico en general es considerado como el más difundido, ya que proporciona teorías con un sistema que desarrolla acuerdos con la naturaleza y comunidades de pensamiento metodológico. Es una de las maneras reflexivas que tiene el individuo de otorgarle un significado a la vida. El más adecuado para dar respuestas y soluciones a gran cantidad de interrogantes humanas a través de la explicación, aplicación y demostración metódica y técnica.

1.2 Psicología cognoscitiva

La filosofía se ocupó durante mucho tiempo del estudio del conocimiento, implicando teorías acerca del mismo. Entre estas la del racionalismo, cuyos exponentes fundamentan la posibilidad del conocimiento en la realidad inteligible, es decir, entre la idea y la razón. El idealismo moderno coincide con el racionalismo, desarrollando el idealismo filosófico de Kant. Wundt, en su publicación "principios de la psicología fisiológica" (ver [25]) expone que la mente humana debe ser estudiada detalladamente en forma experimental y objetiva. Su enfoque investigativo se resume en la psicología como ciencia de la experiencia inmediata y su método es el introspeccionismo.

La escuela de Wundt se conoce con el nombre de instrospeccionismo, su objetivo es descubrir las leyes de la mente humana, mediante la introspección, para ello se entrenaba a los estudiantes en el uso de la observación objetiva, de sus reacciones, percepciones, sensaciones y llevar record cuidadoso de ellos. Al contrario, Freud en [13], sostiene que la experiencia psicológica no solo es una experiencia consciente, sino también inconsciente. Luego se presentaron las contradicciones: el conductismo, que proclama que el objeto de psicológica cognitiva no es la introspección, sino la conducta; y posteriormente la psicología de Gestalt (ver [11]), para quien la conducta no se puede estudiar fragmentada, es decir, sumando percepciones y sensaciones, sino como una totalidad.

Para Gestalt, el fenómeno del aprendizaje está estrechamente ligado a la percepción, en consecuencia, define el aprendizaje de acuerdo con la reorganización del mundo perceptual individual. Herbert en [16], define la percepción como *"un fenómeno cognoscitivo, por el cual, a través de la estimulación de los órganos de los sentidos, se experimenta la presencia de los objetos del mundo exterior" (p. 12).* Estas características que se presentan en una situación de aprendizaje, son de extraordinaria importancia, debido a que el organismo es totalmente activo. Su acción es la de organizar y construir lo que se recibe del medio ambiente (estímulos), considerándose la percepción como un proceso unilateral, donde la percepción y la determinación del significado se producen simultáneamente.

1.3 Estructura cognoscitiva

El término estructura cognoscitiva, es considerado importante como factor que influye en el aprendizaje y garantiza, la retención significativa de los nuevos conocimientos. Según Pírela, Gómez y González en [21], "*la estructura cognoscitiva se refiere al contenido total y a la organización de las ideas que un individuo posee en cualquier área del conocimiento" (p. 468).* De la definición se deduce, que la estructura cognoscitiva debe poseer como característica fundamental, la claridad y organización, para que pueda surgir significados precisos pertinentes a la nueva información recibida y garantizarse así la comprensión e internalización de los nuevos conocimientos.

En el aprendizaje significativo de Ausubel, la estructura cognoscitiva constituye siempre una variable decisiva, que tiene que ver con la transferencia, es decir, la interrelación que se produce entre los nuevos conocimientos y la estructura cognoscitiva existente. Las transferencias se refieren al efecto de la experiencia previa, sobre el aprendizaje presente; pero en este caso para el estudiante su conocimiento anterior se conceptúa como una fuente de datos preestablecida, organizada jerárquicamente y adquirida en forma acumulativa.

1.4 Desarrollo cognoscitivo

Ausubel considera importante los cambios, distinguiéndolos como diferentes etapas evolutivas en el desarrollo cognoscitivo, por cuales pasa el niño hasta la adolescencia. La etapa pre-operacional, se distingue por la adquisición de conceptos primarios, los cuales construyen a partir de la experiencia directa con el medio ambiente y con los objetos. La etapa de operaciones concretas; el niño es capaz de adquirir conceptos secundarios y de comprender, emplear y manejar significativamente abstracciones secundarias como relaciones entre estas. La etapa lógica-abstracta, se caracteriza por un pensamiento distante y alejado de los hechos relativos al mundo real, basado más a un razonamiento hipotético deductivo.

Al respecto Ausubel en [2], plantea:

> *En lugar de razonar basado directamente en un conjunto particular de datos, recurre a operaciones lógicas indirectas, de segundo orden, para estructurar los datos...; formula y prueba hipótesis basadas en todas las combinaciones posibles de variables. (p. 240).*

Esta etapa se ubica en la adolescencia y al inicio de la educación media general. Lo que verdaderamente distingue, según Ausubel, el pensamiento del niño y del adolescente en este nivel, es la capacidad para manejar relaciones en forma verbal, sin apoyo en las relaciones concretas. Los conceptos y generalizaciones que se establecen se derivan de relaciones entre complejidades y abstracciones verbales previamente establecidas, es decir, puede adquirir conceptos a través de definiciones.

1.5 Aprendizaje conectivista

Siemens (ver [23]), citado por Calle en [7], teoriza que:

> *El punto de partida del conectivismo es el individuo. El conocimiento personal se compone de una red, la cual alimenta a organizaciones e instituciones, las que a su vez retroalimentan a la red, proveyendo nuevo aprendizaje para los individuos. Este ciclo de desarrollo del conocimiento (personal a la red, de la red a la institución) le permite a los aprendices estar actualizados en su área mediante las conexiones que han formado. (p. 190).*

La teoría del conectivismo se presenta como un tipo de aprendizaje que registra los movimientos pragmáticos de la sociedad, en la cual el individuo no obtiene el conocimiento de forma individual o personalizada desde su interior. Por lo tanto, la manera como laboran y actúan los compañeros aturde en general, al emplearse nuevas herramientas. En el ámbito educativo, los docentes presentan la resistencia a los cambios ambientales que favorecen la aplicación de las TIC. Como teoría actual de la era digital, prevé de grandes oportunidades que facilitan al estudiante para desarrollar habilidades de aprendizaje.

1.6 Aprendizaje significativo

Ausubel, Novak, y Hanesian en [3], afirman que el aprendizaje es significativo cuando los datos:

> *Son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición. (p. 18).*

El aprendizaje significativo es aquel donde el estudiante es capaz de relacionar los contenidos que se presentan en forma sustancial y no arbitraria a su estructura cognoscitiva. En forma sustancial existe la vinculación de lo esencial del conocimiento nuevo, a lo que el estudiante ya sabe.

1.7 TIC en la educación

En la era de la globalización, el uso de la tecnología es una de las aplicaciones más importantes en el campo de la educación, lo que ha permitido ganar un espacio legítimo en todo el contexto educativo en el ámbito mundial. En este orden de ideas, el uso de la tecnología en la Educación ha sido clave para el desarrollo y la creación de tecnologías educativas en la acción cotidiana en las aulas. Landeau en [18], define las TIC, como:

> *Herramientas computacionales e informáticas, que procesan, sintetizan, reivindican y presentan información representada de la forma más renovada. Este recurso es incuestionable, ya que forma parte de nuestra cultura tecnológica, nos rodea y con la cual debemos convivir. (p. 130).*

La implementación de nuevas tecnologías se ha desarrollado en paralelo con los cambios en los métodos de enseñanza y aprendizaje, ya que permiten incrementar capacidades físicas y mentales a los estudiantes, como también las posibilidades de desarrollo socio educativo.

Fainholc en [12], establece que:

> *La tecnología educativa debe responder a las necesidades específicas de las sociedades en las cuales habrá de funcionar, debe ser pertinente, debe tener presencia en las políticas públicas, adaptarse a los sistemas sociales y culturales, a los intereses lingüísticos de los grupos receptores participantes. (p. 16).*

Por consiguiente, los docentes han encontrado un mundo de posibilidades para el desarrollo de su práctica pedagógica mediante la integración de las TIC como un recurso más en el proceso de enseñanza - aprendizaje, que les ha permitido promover y facilitar la actitud participativa y creadora de los estudiantes(as), la enseñanza individualizada del aprendizaje interactivo, la formación a distancia y creación de nuevas metodologías generadoras de conocimientos como objeto de investigación, en el desarrollo cognitivo apoyado por computadora, lo que ocasiona una verdadera transformación en el proceso de enseñanza - aprendizaje al ceder el papel protagónico al estudiante.

1.8 Educación matemática

El momento histórico que está siendo protagonizado por la humanidad entera, está dominado por el uso de las TIC, las cuales sirven de base a la mundialización de la economía, e impactan toda la cotidianidad vital de las personas a lo largo y ancho de nuestro país; esto implica demandas cognitivas inusitadas y al mismo tiempo, procesos de desaprendizaje, reaprendizaje y aprendizaje de novedosos conceptos que hagan viable la instalación de competencias en todas las personas de modo que puedan desenvolverse adecuadamente en los nuevos contextos sociales que caracterizan a las actuales relaciones sociales, económicas, políticas y culturales en un ámbito globalmente generalizado.

En este marco de referencia, a la Matemática se le atribuye un papel protagónico; por ende, el dominio de esta disciplina no debe seguir siendo conocimiento exclusivo de unas pocas personas, sino que, por el contrario, debería ser una exigencia cultural indispensable para todo ciudadano. En efecto, como puede verificarse al examinar la historia de la educación, desde la academia de Platón y el Cuadrivium Romano, a los estudiantes se les ha requerido el estudio de la Matemática para que aprendan a razonar claramente. También es posible apreciar que los adelantos técnicos y de otro tipo que han marcado la historia de la humanidad han estado vinculados, en alguna forma, con el desarrollo de esta ciencia.

Por lo tanto, se ratifica la necesidad social del estudio de esta disciplina y cómo, a través del tiempo, se ha reconocido su relevancia. Con base en lo anterior, podría decirse que el conocimiento de esta ciencia, alcanza el rango de derecho humano inalienable. Ahora bien, tomando en cuenta que los estudiantes que hoy están en los niveles de educación secundaria son los futuros dirigentes de una sociedad que, cada vez más, estará caracterizada por una economía global y sumergida en el marco de un uso creciente de las TIC, cuyo sustrato de desarrollo es la Matemática, en este momento resulta, vitalmente estratégico que aprendan esta disciplina en función de las exigencias que les hará el entorno científico y tecnológico del mañana.

1.9 Desarrollo cognitivo y socio emocional de las TIC

Las TIC transportan mensajes según lenguajes o códigos simbólicos específicos. Es necesario definir a los estudiantes como perceptores activos, y no como receptores pasivos de dichos mensajes. Es decir, son aquellos que han desarrollado competencias audiovisuales y mediáticas, además de digitales, que les permiten percibir de modo individual y grupal, en forma y contenido, los mensajes presentados en formatos y soportes de los medios convencionales. Para ello se reconoce que una competencia comunicativa, engloba y articula el desempeño de las competencias cognitivas, estableciendo un conjunto complejo de saberes conceptos, procedimientos y actitudes puestas en práctica reflexiva y contrastada en una situación de comunicación mediada por tecnología.

Los actores deberán desplegar críticamente su expresión de investigación dentro de una situación comunicacional particular. Según Cabero en [6]:

> *la fragmentación de las disciplinas, que hará que los límites entre las disciplinas sean más difuso que los actuales y nos llevará a la transformación de las áreas de conocimiento; se pasará de modelos centrados en el profesor, a modelos centrados en el estudiante, y de modelos donde lo importante sea la enseñanza a modelos que giren en torno al aprendizaje de habilidades, contenidos y competencias por los estudiantes; y el hecho de que éstos deberán adquirir nuevas competencias y capacidades, destinadas no sólo al dominio cognitivo, sino también en sus capacidades para aprender, desaprender y reaprender, para adaptarse a las nuevas exigencias de la sociedad. (p. 6)*

Estas adaptaciones significan, emplear una combinación de recursos humanos, materiales y acciones para conseguir un aprendizaje más efectivo. De igual manera, la tecnología es aquella que reflexiona sobre la aplicación de la técnica a la aplicabilidad de actividades educativas, justificada en la ciencia vigente de cada momento histórico. A tal efecto, enfatiza el control del sistema de enseñanza y aprendizaje como aspecto central y garantía de calidad, a la vez que entiende que las opciones más importantes están relacionadas con el tipo de técnica que conviene y cómo incorporarla adecuadamente. Es decir, a la utilización de las TIC en el campo de la enseñanza, se enlaza a un mismo vocablo. Por consiguiente, la tecnología se considerada como un lenguaje que expresa la capacidad del ser humano para utilizar y combinar articuladamente procedimientos, medios que les permiten formalizar una competencia mediática.

En este sentido, la tecnología educativa es el lenguaje que tiene que ver directamente con ambas competencias, la comunicativa y la mediática, se inscriben previamente en el dominio de las competencias digitales. Los contextos audiovisuales, las redes y las TIC en general permiten prácticas y expresiones de diverso tipo, como investigar, transcribir, leer, redactar, analizar, criticar, etc. Este poderoso elemento digital facilita el acceso a caudales enormes de información distribuida, los cuales optimiza el interés de los estudiantes en la actualidad, potenciando el desarrollo del libre pensamiento para la producción y publicación, uso y discusión del conocimiento elaborado, hasta constituirse una meta de cualquier programa formativo, presencial y a distancia, formal, no formal e informal.

Gardner en [15], afirma que:

> *Articular recursos tecnológicos para un uso inteligente, significa que demuestran ser satisfactorios porque son útiles, valiosos, viables, precisos, realistas, lúcidos, prudentes y éticos; y por ello se han incorporado al hardware, al software y al mindware o a tecnologías invisibles de la mente para una práctica social y educativa adecuada. En realidad, hoy más que nunca, deberían conformarse y convertirse en "programas de estimulación cognitiva" que tiendan a fortificar el desarrollo de una "cultura de pensamiento". (p. 57)*

Siendo las inteligencias las capacidades humanas que posibilita establecer relaciones, constituye la problemática nuclear del desarrollo cognitivo y socioemocional de las personas. No sólo es menester detenerse en el interior del diseño, del desarrollo de las estrategias cognitivas, en consecuencia, en la meta cognición, sino que además es necesario explorar y aprender, de la práctica mediada por las TIC, el impacto producido en la mente. Ello es de real relevancia en la estructuración de la personalidad y por su proyección futura. El empleo de la fantasía para el estímulo de la imaginación, la creación de alternativas y la inclusión del humorismo, para suavizar o equilibrar las frustraciones de la vida contemporánea.

Para modificar y acrecentar el rendimiento cognitivo, metacognitivo y socioemocional, los medios y las mediaciones de las tecnologías habrán de desarrollar habilidades de pensamiento que optimicen las operaciones intelectuales y doten de instrumentos de análisis y esquemas de actividad, para operar sobre la realidad como consecuencia de una transferencia pertinente. Dichas habilidades deberán ser activadoras y facilitadoras de los procesos de percepción y de reelaboración crítica de la información, de un modo selectivo, lúcido y aplicativo. Es decir, los medios cumplirían la función de soportes de las estructuras externas para estimular, conformar y reorganizar el pensamiento superior. Lo que se necesita fundamentalmente es estructurar oportunidades para pensar y para examinar los resultados de las aplicaciones. Por ello, habrá que crear situaciones para que los estudiantes resuelvan problemas y realicen experiencias que faciliten anticipar e inventar modificaciones para mejorar las prácticas sociales con el desarrollo de las diversas capacidades.

La interacción en la experiencia conjunta con otros de modo contrastado, es lo que contribuye del modo más significativo al proceso de maduración y desarrollo cognitivo. A ello deben estar abocadas las producciones de las TIC y las interacciones de las redes, promoviendo situaciones que ejerciten el pensar y fortalezcan la comprensión. Por ello, se sostiene que, entre otras muchas funciones más, comparar, interpretar, observar y resumir son operaciones intelectuales, en el sentido de que su empleo inteligente, útil y valioso despierta y produce el pensamiento. Lo enunciado, unido a la toma de decisiones sobre tecnología educativa articulada con las TIC, a través de políticas públicas en múltiples arcas, conduciría al mejoramiento de la calidad educativa, en lo referido a comunicación y educación.

Asimismo, posee relevancia aprestar y ejercitar el pensamiento creador y la inventiva, paso previo a anticipar innovaciones o pensar soluciones inéditas o alternativas a diversos problemas, que es el desafío actual para los adolescentes del mundo virtual, acelerado e imprevisible, habrá que estimular la imaginación. Sin imaginación, la humanidad se hubiera estancado y jamás hubiera llegado a ser lo que es hoy, tanto en lo positivo como lo negativo, porque no se hubiera formado ideas de cosas no presentes a causa de no imaginar. El empleo de la fantasía en las producciones de los medios de comunicación, de las TIC e Internet constituye una vía efectiva y atractiva hacia la socialización futura, que afianza el desarrollo de los planos real e imaginario para su proyección y construcción, en este caso en las reales telemáticas.

Las investigaciones neurofisiológicas y psicológicas han demostrado la enorme plasticidad del cerebro, además de la importancia de su hemisferio derecho, que controla el pensamiento concreto, holista y artístico, donde reside la imaginación desde los primeros años de vida. Luego, desgraciadamente y debido a uniformidades varias, se va atrofiando por prevalencia unidireccional de las actividades lógicas, abstractas y formales, las que se imponen con las actividades sencillas desde la educación básica, entre otras interacciones. No se trata de hacer prevalecer uno sobre el otro, sino que el pensamiento abstracto e imaginación converjan en el proceso creativo, sobre todo, por el peso de las TIC con el uso de las imágenes, para desarrollar su complementariedad. Así, se formarán estudiantes con perspicacia, capaces de prever y afrontar cambios, inventar soluciones a problemas en las distintas esferas del arte, la ciencia, la cultura y la tecnología.

1.10 Conexión entre la educación y lo cognitivo en las TIC

Según Delors en [10], *"El proceso emocional a lo interno de la comunidad es tan importante como el cognitivo". (p. 1).* Para el autor, las comunidades están representadas por los entes organizados educativos. Estos son procesos integrados y complementarios que forman un todo integrado llamado persona, que se compone por las dimensiones del ser, el conocer, el hacer y el convivir. En las comunidades de aprendizaje existe una fuerte conexión entre lo social y lo cognitivo. Toma importancia las relaciones emocionales que se desarrollan entre los estudiantes.

Novak en [19] establece que:

> *Una educación acertada debe centrarse en algo más que el pensamiento del aprendiz; los sentimientos y las acciones también son importantes, y hay que tener en cuenta estas tres formas de aprendizaje, a saber: la adquisición de conocimientos (aprendizaje cognitivo), la modificación de las emociones y los sentimientos (aprendizaje afectivo) y la mejora de la actuación o las acciones físicas o motrices (aprendizaje psicomotor), que incrementa la capacidad de la persona para entender sus experiencias (...) Los seres humanos piensan, sienten y actúan, y las tres cosas se combinan para formar el significado de la experiencia. (p. 28).*

Una comunidad de aprendizaje, por tanto, atiende al estudiante como ser integral ofreciendo experiencias retadoras en todas sus dimensiones. El eje conector de un grupo educativo es el placer de aprender con otros, y ello se valora en la presente investigación. La presencia social de cada integrante conforma un sentido global de los adolescentes, que a su vez favorece que los procesos cognitivos se desarrollen sin limitarse por las inseguridades o desconfianzas de algunos miembros. Los ambientes virtuales benefician las interacciones cognitivas, alineadas a la construcción de conocimiento en contribución, con predominio de niveles iniciales del pensamiento crítico.

La aplicación de las TIC apunta hacia el desarrollo de interacciones en tres ámbitos: cognitivo, social y moderado. Si bien las interacciones sociales y tutoriales son fundamentales para el sentido de identidad, la participación y la orientación, se considera que ambas están al servicio del proceso cognitivo de los estudiantes en la institución, de las construcciones que puedan elaborar con base en la ayuda mediada a través del diálogo crítico, de la reflexión conjunta y del conocimiento de otras experiencias en su relación con otros compañeros y el docente. Para García en [14], *"La interacción cognitiva está referida al desarrollo del pensamiento crítico. (p. 127)."* Se entiende como un proceso que inicia con una situación activadora, problemática, generadora de conflictos de índole cognitivo, los cuales orientan al estudiante a la investigación e indagación de información, recuperación de experiencias vividas y suposición de ideas, permitiéndole comprender la situación problemática, para la búsqueda de soluciones.

1.11 Paradigma de la innovación tecnológica

Para Cabada en [5],

> *"Se reconocen una serie de características del paradigma tecnológico, entre ellas, el creciente papel de las innovaciones tecnológicas, el aumento de la demanda de información y nuevos conocimientos." (p. 224).*

Las tipologías del universo investigativo describen la innovación tecnológica, dentro de un paradigma o patrón tecnológico, que explica anticipadamente la visión a partir de la cual se propone la solución a problemas, como vías de provocar un auténtico progreso tecnológico. Para la investigación la aplicación de proyectos tecnológicos pertinentes, la ejecución de competencias tecnológicas aprendidas y el uso óptimo e inteligente de artefactos con el objetivo de mejoramiento.

En este marco, se entenderá la innovación tecnológica como el proceso de rediseño tecnológico y productivo sobre la base de la incorporación y aplicación articulada de invenciones tecnológicas viables, factibles y exitosas, resultado de la experimentación, la investigación, el desarrollo, y la recreación de nuevos conocimientos y saberes, adaptados para una nueva gestión de procesos y productos, bienes y servicios; entre ellos y de modo fundamental, el educativo. De este modo, la innovación se diferencia del descubrimiento y de la invención como propuesta inédita eminentemente procedimental o técnica, aunque pueden relacionarse todas ellas en la práctica pedagógica, son de gran utilidad para iluminar la presente investigación.

1.12 Paradigma fenomenológico interpretativo

Para Kuhn en [17],

> *"Un paradigma es lo que los miembros de una comunidad científica comparten, y, recíprocamente, una comunidad científica consiste en hombres que comparten un paradigma" (p. 33).*

A partir de sus publicaciones el término paradigma ha provocado numerosas reflexiones en torno a su significado y alcance, representando una manera de como visualizar el mundo, de explicar y comprender la realidad. Aunque parece irreconocible entre sí, debido a las distintas maneras de concebir el propósito de la investigación, la relación del docente con los estudiantes, los hechos y los valores, la tecnología y la educación.

Sin embargo, la tendencia actual parece orientarse hacia la complementariedad metodológica, restándole importancia a diferencias que se establecen en lo ontológico o en lo epistemológico. En este sentido, Coolican en [9], establece que:

> *El análisis fenomenológico interpretativo intenta describir la perspectiva y comprensión que un individuo tiene del mundo y al mismo tiempo reconoce la función constructiva del investigador en la interpretación de la experiencia de ese individuo. (p. 2).*

El análisis se presenta como una reacción explicativa y detallada del investigador ante la situación problemática de estudio, aunando la definición de Kuhn, se percibe el paradigma fenomenológico interpretativo, donde la experiencia y aplicación de las tecnologías, permiten visualizar e interpretar los desarrollos cognitivos en los estudiantes de educación media general.

2 Metodología

La investigación se desarrolló bajo el enfoque cualitativo definido por Bonilla y Rodríguez en [4], como un estudio que:

> *intenta hacer una aproximación global de las situaciones sociales para explorarlas, describirlas y comprenderlas de manera inductiva... a partir de los conocimientos que*

> *tienen las diferentes personas involucradas en ella... esto supone que los individuos interactúan. (p. 70).*

El artículo se basa en el análisis de las influencias cognitivas que se proporcionan en los estudiantes, como personas involucradas en el objeto de estudio, mediante sus herramientas tecnológicas que definen la estructura ambiental, dejando como segundo plano las interacciones socioeducativas, para analizar los cambios y avances del desarrollo cognitivo.

Desde una perspectiva axiológica, el análisis se desarrolló mediante el enfoque introspectivo vivencial, según Padrón en [20]:

> *...se concibe como producto del conocimiento de las interpretaciones de los simbolismos socioculturales a través de los cuales los actores de un determinado grupo social abordan la realidad (humana y social, fundamentalmente). Más que interpretación de una realidad externa, el conocimiento es interpretación de una realidad tal como ella aparece en el interior de los espacios de conciencia subjetiva (de ahí el calificativo de Introspectivo). Lejos de ser descubrimiento o invención, en este enfoque el conocimiento es un acto de comprensión. (p. 4).*

Desde esta perspectiva de estudio, se desenvolvió una clara concepción y captación de la información, a través de la interpretación, el dialogo, y la observación que los estudiantes expresan con sus palabras, sus silencios, acciones o gestos.

Para la recolección de información se utilizó la observación de tipo moderada, según Spradley en [24], *"el investigador mantiene un balance entre estar dentro y fuera". (p. 74).* De esta manera, en el campo investigativo, la observación se entiende como proceso deliberado, sistemático, dirigido a la obtención de información en forma directa del contexto donde se tuvo lugar las acciones, laborando en la parte interna y externa del aula, como también en el ambiente digital con los estudiantes, para la toma de notas eventualmente al compartir y orientar la realización de las actividades.

Según la modalidad de investigación cualitativa, se empleó la entrevista semiestructurada, la cual para Arias en [1], consiste en

> *una guía de preguntas, el entrevistador puede realizar otras no contempladas inicialmente. Esto se debe a que una respuesta puede dar origen a una pregunta adicional o extraordinaria. (p. 74).*

La secuencia de las preguntas y la flexibilidad de la formulación, facilitaron la obtención de la data de forma adecuada, para los estudios de forma interpretativa.

3 Resultados y discusión

La investigación realizada tanto presencial como a distancia, forjó resultados significativos al aplicarse el espacio virtual de aprendizaje, desarrollándose como un escenario para superar dificultades y temores en la práctica de la ciencia Matemática, al nivel de educación universitaria. Esta brindo al estudiante un ambiente de seguridad, confianza y empatía para manifestar libremente sus conocimientos, experiencias, asegurándose que los demás participantes no lo censurarán por ello, sino que, por el contrario, lo adolescentes comprenden y pueden apoyar en la búsqueda de soluciones. Los jóvenes demostraron en el estudio gran acuerdo en que su aprendizaje se desarrolló desde un ambiente cálido, ameno y social, que promovió un clima de confianza para participar.

Ahora bien, algunos autores como Salmon (ver [22]), *"destacan la necesidad de una fase inicial social para familiarizar y crear puentes entre los entornos culturales, sociales y de aprendizaje de los participantes". (p. 126).* Sin embargo, desde la investigación se consideró que ese puente socio educativo, fue de construcción continua durante todo el proceso de aprendizaje, y no únicamente en el inicio. Si bien se puede entender que al comenzar una experiencia de formación se debe configurar un espacio para la presentación, a lo largo de las discusiones es cuando se consolida el sentido de identidad con las actividades educativas, y por ello debe dedicarse esfuerzos a lo largo del proceso para la manifestación abierta y espontánea de sentimientos, emociones y agrado al mundo de la Matemática.

En la investigación se apreció en los estudiantes la crisis de identidad, concebida por Carlson en [8], como una

> *creencia de que el comportamiento aberrante, extravagante y alocado forma parte de la confusión adolescente o que la depresión es reactiva a una de las muchas vicisitudes de la adolescencia. (p. 71).*

En la etapa del desarrollo del adolescente, el estudiante atraviesa un momento existencial que lo precisa, viéndose en la necesidad de componer varias imágenes de sí mismo en una sola; como amigo, joven, estudiante, líder, hombre o mujer, aparte de tener que elegir una carrera y estilo de vida. Bajo la incursión de las TIC se niveló el desarrollo personal, de redefinirse y de poner a prueba la confiabilidad y la afirmación de sí mismo, en el encuentro de su propia identidad, piedra angular en la construcción de su yo.

Las TIC como herramientas de desarrollo tecnológico y actual, permitieron a los adolescentes interrelacionarse con el ambiente virtual, debido a que se encuentran en una etapa final de desarrollo corporal, llevándoles a un mismo nivel de adquisición con sentido de confianza básica, independencia, iniciativa, voluntad y logro de actividades numéricas. Con seguridad su desarrollo biológico y físico tiene que ver con las emociones y angustias existenciales. La búsqueda de identidad resulta afectada naturalmente por estos cambios de orden somáticos. Los adolescentes verificaron sus desarrollos cognitivos en la búsqueda de información y manipulación. Recurriendo al espejo, a través de sus producciones o buscando entre sus compañeros, equivalentes de su actividad. Los cambios biológicos suscitan tal desconcierto que el adolescente recurre al espejo frecuentemente, como para reconocerse, comprobar su propia imagen y estabilizar su aprendizaje.

Como influencia esencial en esta etapa se resolvió exitosamente que los jóvenes comprendieran quiénes son y qué quieren. Además, la identidad representa una condición indispensable para ejercer con propiedad, decisiones pertenecientes al mundo adulto; para encarar tareas que consumen una carga emocional importante que precisa al adolescente. En las actividades a distancia, se mantuvo un foro abierto para mantener el discurso educativo durante todas las actividades, que inicialmente permitió el conocimiento de unos con otros, pero que posteriormente fue escenario para la expresión de pensamientos, sensaciones, emociones, motivaciones. Semana a semana los adolescentes accedían al foro donde se discutía el tema de aprendizaje y, al mismo tiempo, accedían al foro para dejar comentarios a sus compañeros de aula.

Por otra parte, los participantes demostraron una necesidad afectiva que se satisface en un grupo. La inscripción y aplicación de las actividades virtuales de la Matemática responde, además de una necesidad cognitiva, a una necesidad personal de estar comunicado con otros para evitar la soledad de entorno educativo, de socializar su vivencia, contar, demostrar sus prácticas y escuchar las de otros. La presencia afectiva se configura desde relaciones informales a formales y espontáneas, del encuentro entre adolescentes, que atenúa la distancia entre los compañeros y genera entusiasmo por participar e interactuar de manera permanente.

La influencia del sentimiento de ser integrante de una comunidad matemática de aprendizaje virtual fue unos de los elementos más destacados en el estudio. La manifestación de agrado y satisfacción de los estudiantes en ese espacio de formación constituye una de las características más relevantes del análisis. Un alto nivel social y emocional hacia la comunidad desde sentimientos expresados en los mensajes del foro, desde las dificultades hasta los avances en las prácticas numéricas, destacando la emoción por participar de forma diferente, por pertenecer a la comunidad, la cohesión grupal, la empatía y la necesidad del otro para el aprendizaje.

En este sentido las TIC no resultan necesariamente de manera espontánea, sino que se reconoce que la creación de estrategias y escenarios intencionados favorece la conformación del sentido de comunidad. La participación estudiantil se consideró frecuente, ya que incidió en los niveles de interacción cognitiva y, por tanto, se relaciona con el diseño e intencionalidad, como parte de la investigación para indagar y prever las influencias que proporcionan el uso de las tecnologías, promoviendo lazos emocionales que permitieron la conformación de un ambiente matemático intelectual, abierto y estimulante.

Los problemas matemáticos virtuales, generaron conflictos cognitivos que orientaron al colectivo estudiantil a la búsqueda de informaciones, recuperación de experiencias vividas y suposición de ideas, permitiendo comprender la complicación de las imágenes geométricas, y así buscar soluciones para construir un pensamiento integrado, aplicando soluciones sistemáticas y empíricas. En las experiencias estudiadas se observó que cerca de la mitad del total de los mensajes contenían evidencias de indicadores de interacción cognitiva, que permite valorar que efectivamente se desarrolló un proceso de construcción de conocimientos. No obstante, el tipo de interacciones cognitivas estuvo centrado en los niveles iniciales de pensamiento crítico, destacando declaraciones sobre hechos desencadenantes como punto de partida de las discusiones tales como preguntas, dudas, problemas y declaraciones para la exploración de ideas, conceptos y soluciones de los ejercicios planteados.

Las evidencias de aportaciones centradas en elaboraciones conceptuales, producto de la integración de las contribuciones presenciales y a distancia, fueron diferentes, así como aportaciones que revelaran conciencia meta cognitiva, demostrando una situación, en la que fuese necesaria la presencia del facilitador que oriente al grupo hacia tendencias, como resolver las primeras fases de pensamiento y dejar al margen actividades de razonamiento a nivel cognitivo. Se puede afirmar que, aunque se observó en las actividades estudiadas un interés por el aprendizaje, por la construcción de conocimiento en colaboración (dado el carácter interactivo de los mensajes), se hace necesario dedicar mayores esfuerzos a la promoción de una semántica ontomatemática en los adolescentes que implique el desarrollo de procesos más complejos de pensamiento, y así su aprendizaje virtual le lleve más allá de sus posibilidades actuales a través de actividades retadoras de alto nivel cognitivo.

Se observó el valor formativo que tiene la mediación por pares académicos, es decir, entre la tecnología, la psicología y la Matemática, cada vez se obtenían más indicios de que el aprendizaje es un proceso social y no individualmente solitario. Además, la magnitud de los problemas que enfrentan los adolescentes en su cotidianidad reclama el trabajo investigativo en colectivo. Por tal razón, es necesario que el aula de clases de Matemática sea un escenario para el aprendizaje virtual de ciudadanía; una acción que coadyuva al logro de esta meta es la participación colectiva en procesos de aprendizaje; de manera tal que las actividades deben predominar, en la medida de lo posible, las experiencias de aprendizaje colaborativo.

La mayoría de los problemas complejos demandaron el talento de los participantes, así que los problemas a ser planteados, en el contexto de la Matemática, debían ofrecer a los estudiantes oportunidades para que: diseñaran planes de acción para abordarlos; discusión de la idoneidad y viabilidad de las acciones planeadas; examinación continua de sus posibilidades reales de ponerlas en juego; formulación de preguntas y cuestionamientos; y organización estratégica de los recursos (cognitivos, materiales, documentales, tecnológicos) que se dispusieron para llevar a cabo para la tarea resolutoria. Todo esto exigió privilegiar el trabajo en equipo ya que éste no sólo permite el desarrollo de habilidades cognitivas, sino que, además, es una manera muy efectiva de aprender y así poder visualizar que las TIC permiten avanzar de forma significativa en el razonamiento lógico matemático, mediante la comunicación con otros compañeros.

La idea básica de esta investigación fue dar algunas bases fundamentales para aportes teóricos, y así sostener que la inteligencia se construye y evoluciona debido a la interacción que une al individuo con el medio tecnológico. Cada etapa del desarrollo muestra un tipo de inteligencia que le caracteriza. El adolescente ha llegado a lo que Piaget llama etapa de las operaciones formales. Ha este nivel del desarrollo cognoscitivo el adolescente utiliza métodos o estrategias de pensamiento diferentes a las empleadas por los niños en etapas anteriores. El pensamiento adolescente se caracteriza fundamentalmente porque está en capacidad de trabajar en forma abstracta y de aventurarse en las formulaciones hipotéticas.

Para el desarrollo y análisis introspectivo vivencial, el tiempo influye en los niveles de construcción de conocimiento. Para promover el desarrollo cognitivo en los adolescentes se requiere espacios de tiempo entre 6 y 7 semanas, o bien, un acuerdo de aportación de mayor frecuencia semanal (de al menos tres o cuatro aportes), para garantizar así que las primeras actuaciones destinadas a razonamiento lógico, al reconocimiento y exploración de los problemas, no limiten el paso a las siguientes e importantes fases de integración de conceptos orientados a la resolución del problema y a reflexiones meta cognitivas de mayor nivel de abstracción.

4 Conclusiones y recomendaciones

A manera de conclusión, se pueden presagiar de manera futurista, que los estudiantes egresados del bachillerato, como los porvenires dirigentes de la sociedad; deben tomar en cuenta el carácter dinámico del conocimiento, es entendible por qué es necesario interpretar y comprender las diferentes influencias que perciben los estudiantes al enseñarles Matemática hoy en función de las exigencias que les hará el entorno científico y tecnológico a sus inicios del mañana a nivel universitario. La efectividad de las TIC no es sólo concebida por su utilidad para la capacitación acreditada y técnica, existen razones intrínsecas a esta disciplina que justifican su enseñanza para el desarrollo cognitivo en los futuros profesionales. En efecto, se ha podido comprobar que entre los motivos que tienen quienes tornan a la Matemática como profesión, está la manera como la han aprendido y esto, a su vez, tiene mucho que ver con la forma como le ha sido enseñada; de aquí que el modo como se conduzca el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en los diferentes niveles es un factor de gran impacto sobre la vinculación con esta ciencia que, en un futuro, tendrán los estudiantes.

Por otro lado, se puede plantear que los especialistas en las diferentes disciplinas siempre han sido en acatamiento, en comparación con el total de la población docente. Por ello, no hay que orientar la enseñanza de la Matemática como si todos los estudiantes, en el futuro, la tornarán como la especialidad de su carrera; así que es imprescindible determinar cómo enseñarla de modo que contribuya a la formación integral del ciudadano del futuro; de este modo hay que concebir la aplicabilidad de las TIC para fortificar la capacidad intelectual del adolescente en la Matemática, no como un fin en sí mismo, sino como un medio para contribuir al desarrollo cognitivo e integral de la personalidad del joven. Por tanto, en la enseñanza de las ciencias numéricas deben tenerse presentes aspectos motivacionales, tomando en cuenta que la forma como se enseña la disciplina, y no sólo los contenidos en serie, tienen una gran incidencia sobre las elecciones vocacionales.

Así, quien enseña Matemática, al nivel de educación universitaria, tiene una gran incidencia sobre las vinculaciones que, en el futuro, sus estudiantes querrán tener con la misma. Ante ésta, se afina que los docentes tienen dos opciones, una es considerarla como una ciencia hecha, en la que nada es modificable, o como una ciencia por construir, en la que es posible reinventar aquello que es conocido por quienes la dominan, pero que aún no es dominada por quienes están intentando aprenderla.

Cabe indagar que los adolescentes, al aplicar las TIC pueden disponer de un tiempo suficiente para activar todos sus mecanismos de funcionamiento intelectual cuando les corresponde enfrentarse al proceso de búsqueda de solución a un problema de Matemática. Al contrario, en cuanto la actitud del docente ante el trabajo de los estudiantes. Uno de los aspectos centrales de la Matemática actual es la consideración del estudiante como un constructor y desarrollador inerte de su nivel cognitivo ajustado a su propio aprendizaje de la Matemática, ello implica que ha de brindársele espacios de libertad en su relacionamiento y conectivismo digital con los objetos y proceso matemáticos de los que se ha de apropiar con miras a desarrollar su formación matemática propia.

Desde el punto de vista introspectivo vivencial el docente de Matemática debe brindar al adolescente situaciones de aprendizaje basadas en el planteamiento de problemas de su experiencia que le resulten atractivos, y respetar las reacciones que los estudiantes tengan ante ellos; apreciar, valorar y respetar las vías que el joven seleccione para abordar los problemas planteados. Además, el orientador debe resistirse a la tentación de sustituir los esfuerzos del alumnado por los suyos propios; y por el contrario, estimularle para que persevere en las buenas ideas que se le ocurran para solucionar un problema; una vez que el alumno ha arribado a alguna solución, el docente debe intervenir con miras a orientar el proceso de formalización y de reflexión sobre la actividad realizada con el fin de mediar el proceso de transferencia, generalización y desarrollo cognitivo.

Para todo docente universitario aducir o atreverse a inventar, a innovar, a ensayar nuevos enfoques para la enseñanza de la Matemática, sobre todo si toma en cuenta los negativos resultados a los que les ha conducido la enseñanza tradicional, le ha de considerar muy dificultoso. Como se ha expuesto, las influencias cognoscitivas rompen la enseñanza tradicional de la Matemática, que siguen el esquema de exposición de la teoría que traen consigo los estudiantes desde el bachillerato, como también la muestra de ejemplos; realización de ejercicios en la clase; y asignación de deberes para el hogar; todas estas acciones siempre han estado a cargo del docente; al alumno le corresponde hacer los ejercicios en clase y efectuarlos en su residencia.

Las TIC presentan cambios profundos, tanto en el contenido a ser enseñado como en las prácticas que los docentes de Matemática, que ponen en juego las aulas virtuales de esta asignatura. De modo que estas atribuciones admitidas por el estudiante le llevan a romper el bajo nivel de desempeño matemático, aburrimiento de éstos y, en los casos más graves, la matematefobia o aversión hacia esta ciencia. Estas anomalías fueron superadas al introducirse nuevos modos de aprendizaje basado en la investigación, dando responsabilizad a los estudiantes por su propio aprendizaje, bajo un estudio educativo, especialmente desde las ciencias cognoscitivas.

Referencias

[1] Arias, F. *El proyecto de investigación*. Editorial Episteme. Caracas. 2012.

[2] Ausubel, D.P. *Psicología educativa*. Editorial. Trillas, México. 1976.

[3] Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* 2^{da} edición. Editorial Trillas. México. 1983.

[4] Bonilla, Elssy y Rodríguez, Penelope. *La Investigación en Ciencias Sociales. Más allá del dilema de los métodos.* 2^{da} edición. Bogotá, Colombia. Grupo Editorial Norma. 1997.

[5] Cabada Arenal, M. T. *Estudio del paradigma tecnológico y su repercusión en la formación de los profesionales de la información*. Vol. 9, 2001. ACIMED. Disponible en: `http://bvs.sld.cu/revistas/aci/vol9_3_02/aci08301.pdf`.

[6] Cabero Almerana, J. (2005). *Las TICs y las Universidades: retos, posibilidades y preocupaciones*. Revista de la Educación Superior, **34**(3) (2005), 77–100, (ISSN 0185-2760). Disponible en: `http://tecnologiaedu.us.es/bibliovir/pdf/Las%20TICs%20y%20las%20Universidades.pdf` (Consultada 24/03/07).

[7] Calle, L. *Estilos de Aprendizaje e identificación de actitudes y variables vinculadas al uso de las TICs en los alumnos de Enfermería de la Universidad de Salamanca*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca. España. 2011.

[8] Carlson, G.A. *Visión global de las formas enmascaradas alternativas a la depresión. En DP Cantwell y GA Carlson. Trastornos afectivos en la infancia y la adolescencia*. Martínez-Roca, Barcelona. 1985.

[9] Coolican, H. *Métodos de investigación y estadística en psicología*. Editorial manual moderno. México. 2005. Disponible en: `http://www.franciscohuertas.com.ar/wp-content/uploads/2011/04/IT_Coolican.pdf`.

[10] Delors, H. *La educación Emocional*. Universidad Pedagodica Experimental Libertador. Caracas, Venezuela. 1997.

[11] Ehrenfels, C. *Psicología de la Gestalt*. Universidad Carolina. Checa. 1930.

[12] Fainholc, B. *Una tecnología educativa apropiada y crítica*. Editorial Lumen. Buenos aires, Argentina. 2012.

[13] Freud, S. *Lo inconciente*. Psychoana. Metapsicología. Standard Edition. 1915.

[14] García, M. A. *Conformación de comunidades de aprendizaje en red*. Universidad Central de Venezuela. Venezuela. 2010.

[15] Gardner, H. *Cultura de Pensamiento. Proyecto Zero*. Harvard University, USA. 2011.

[16] Herbert, M. *La percepción*. Stoddart Publishing. Toronto. 1979.

[17] Kuhn, T. *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de Cultura Económica. México. 1962.

[18] Landeau, R. *Metodología y nuevas tecnologías*. Editorial Alfa. Caracas, Venezuela. 2012.

[19] Novak, J.D. *Conocimiento y aprendizaje. Los Mapas conceptuales como herramientas facilitadoras para escuelas y empresas*. Alianza. Madrid. 1998.

[20] Padrón, J. *La estructura de los procesos de investigación*. Universidad Nacional Abierta. 1998. Disponible en: `http://dip.una.edu.ve/mae/978investigacioneducativa/paginas/Lecturas/UNIDAD%204/Padron-LaEstructuradelosProcesosdeInvestigacion.pdf`.

[21] Pírela, I., Gómez, R. y González, P. *La psicología educativa*. Universidad nacional abierta. Caracas, Venezuela. 2002.

[22] Salmon, G. *E-actividades: el factor clave para una formación en línea activa*. Barcelona: UOC. 2004.

[23] Siemens, G. *Conectivismo: Una teoría de aprendizaje para la era digital*. 2004. Disponible en: `http://www.elearnspace.org/Articles/connectivism.htm`.

[24] Spradley, J. P. *Participant observation*. New York: Holt Rinehart and Winston. 1980.

[25] Wundt, W. *Principios de psicología fisiológica*. Leipzig. Alemania. 1879.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 19, No. 1(2018), pp. 63–73

Relación entre el rendimiento académico de los estudiantes universitarios en el área de Matemática y la praxis docente mediadora

Relationship between the academic performance of university students in the area of Mathematics and the teaching praxis mediator

Derling Mendoza (dmendoza@unibe.edu.ec)
Universidad Iberoamericana del Ecuador UNIB.E
Instituto de Investigaciones Científicas y Tecnológicas INCYT

Elizeth Flores (elizethflores2005@yahoo.es)
Quito - Ecuador

Resumen

El presente artículo tiene como objetivo analizar el rendimiento académico de los estudiantes universitarios en el área de Matemática y su vinculación con una praxis docente mediadora. Se seleccionó metodológicamente un tipo de investigación documental y descriptiva bajo el *enfoque cualitativo* mediante la cual, a través del *método de triangulación de fuentes interestamental* propuesto por Cisterna en [7], se pueden analizar y contrastar las bases teóricas legales, así como también, las respuestas emitidas por los actores claves de la investigación aplicando como técnica una entrevista de tipo estructurada. Se escogió la Universidad Iberoamericana del Ecuador (UNIB.E). Los resultados indican la necesidad para fortalecer el rendimiento académico de los estudiantes (pregrado) en el área de Matemática de una praxis docente basada en la reflexión crítica, la utilización de un enfoque dialógico, la virtualización de los procesos de enseñanza y aprendizaje, apertura de espacios para el automonitoreo, asesorías continuas, fortalecer la transdisciplinariedad y la toma decisiones prácticas en la optimización de los distintos sistemas productivos.

Palabras y frases clave: rendimiento académico, educación universitaria, enseñanza de la Matemática, praxis docente, mediación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Abstract

The objective of the present article is to analyze the academic performance of university students in the area of Mathematics and its linkage with mediating teaching praxis. A type of documental and descriptive research was selected methodologically under the *qualitative approach* by which, through the *interstate sources triangulation method* proposed by Cisterna in [7], it is possible to analyze and contrast the legal theoretical bases, as well as the answers emitted by the key actors of the investigation applying as technique a structured

Received 08/02/2018. Revised 23/02/2018. Accepted 01/05/2018.
MSC (2010): Primary 97D60; Secondary 97B40.
Corresponding author: Derling Mendoza

type interview. The Universidad Iberoamericana del Ecuador (UNIB.E) was chosen. The results indicate the need to strengthen the academic performance of students (undergraduate) in the area of Mathematics of a teaching praxis based on critical reflection, using a dialogical approach, virtualization of teaching and learning processes, opening of Spaces for self-monitoring, ongoing consultations, strengthening transdisciplinarity and making practical decisions in optimizing the different production systems.

Key words and phrases: academic performance, university education, teaching of Mathematics, teaching praxis, mediation of teaching and learning processes.

1 Introducción

El rendimiento de los estudiantes universitarios tal como lo señala la UNESCO (ver [29]), representa una de las mayores preocupaciones para la conformación y crecimiento del mercado global competitivo dadas las necesidades sociales en el marco del desarrollo económico y social a nivel mundial; así como también, la actualización del perfil de competencias del profesional en distintas áreas del saber vinculadas al ámbito científico y enfrentar el crecimiento demográfico mundial.

Aunado a ello, tal como lo manifiestan Bekerman, Galagovsky y Laborde en [4], actualmente los niveles de rendimiento estudiantil y los procesos de enseñanza y aprendizaje en las disciplinas científicas deberían coadyuvar a un permanente cambio social, tecnológico, académico y cultural que fomente en los distintos actores de cada disciplina la incorporación y desarrollo constante de competencias básicas inherentes a su ámbito de acción.

De allí, la continua necesidad por promover procesos de enseñanza y aprendizaje que fortalezcan, en áreas tales como Química, Física y Matemática a nivel universitario, el desarrollo de la creatividad, la consolidación de las estrategias didácticas mediadoras como un aporte para afianzar un proceso educativo multidisciplinario que induzca a nuevos escenarios para una mejor didáctica universitaria en las áreas científicas del contexto nacional e internacional.

Sin embargo, a juicio de Izquierdo, Caamaño y Quintanilla (ver [15]), dentro de las áreas del conocimiento universitario a nivel mundial que pierden más interés en los procesos de enseñanza y aprendizaje, vinculadas con las disciplinas científicas que dependen de la motivación que generan en los estudiantes sus profesores, se encuentra lamentablemente el área de Matemática, la cual es percibida por la población estudiantil universitaria actual como desvinculada de su realidad, no se capta su importancia para las investigaciones y su aplicación en la vida cotidiana.

En virtud de ello, en Ecuador, Arteaga en [3], plantea:

> *En la educación superior se observa especialmente en las carreras técnicas, docentes que no poseen preparación académica en educación, existiendo problemas en la impartición de las clases, las universidades en su gran mayoría tienen en su cuerpo de docentes, a profesores o facilitadores que no han alcanzado el cuarto nivel de educación (p.25).*

El autor fomenta un tipo de modalidad instruccional alternativa donde se resalta la mediación cognitiva del docente a través de la interacción didáctica mediadora, sobre todo en áreas del saber científico como la Matemática, con la finalidad de suscitar en el educando la construcción social del aprendizaje. A la par de combatir el miedo a esta área, así como suscitar confianza en el éxito de los estudiantes cuando son evaluados.

Lo anterior fue confirmado por un estudio realizado por la Universidad de Valencia en España, donde los estudiantes opinaron cómo entre los factores que afectan y promueven su desmotivación e incentivan niveles de dificultad para aprender las disciplinas como la Matemática se encuentran la utilización por parte de los docentes de estrategias poco placentera. En este caso, más del 75 % de los encuestados explicó que no les interesaba ningún estudio científico y el 68 % indicaba su poco interés por la clase.

En consecuencia, el presente artículo basado en la relación entre el rendimiento académico de los estudiantes universitarios en el área de Matemática y la praxis docente mediadora contribuirá de manera andragógica, social y cognitiva, en primer lugar, tal como lo explica Bixio en [5], a consolidar educativamente el perfil profesional del educando, fomentando la aplicación de distintos estilos de enseñanza motivacionales, innovadores y creativas que susciten la implementación de canales comunicacionales y con una mayor significación psicológica para que los estudiantes puedan contribuir con la incorporación del conocimiento científico a sus carreras y la innovación en los procesos productivos nacionales e internacionales, con mayor alcance para los mercados globales.

A su vez, servirá como un antecedente nacional e internacional para futuras investigaciones donde se fomenten las ciencias numéricas como área del saber científico en un marco educativo motivacional, tanto a nivel teórico, como práctico epistemológico, ontológico e institucional universitario, donde el futuro profesional adquiera una visión integral de esta disciplina que lo ayudará con la promoción y comprensión del lenguaje simbólico, así como las funciones representacionales, comunicativas e instrumentales.

2 Sustento teórico

2.1 Enfoques y modelos didácticos para la enseñanza de la Matemática a nivel universitario

Para Ruiz Ortega en [25], entre los modelos didácticos para la enseñanza de las ciencias naturales se encuentra, el *modelo de enseñanza por transmisión–recepción*, en el cual los procesos de enseñanza y aprendizaje se ejecutan de manera inductiva (procesos observacionales) y se expresa una transmisión de conocimientos cerrados, otorgados por el docente.

No obstante, en este modelo el educando a modo conductista es considerado una página en blanco donde se le provee de contenidos, desconociendo su contexto social y cultural. Igualmente, este autor opina cómo el *modelo por descubrimiento*, constituye una propuesta que se origina como respuesta a las distintas dificultades presentadas por el modelo por transmisión.

Aunado a ello, el autor Adúriz en [1], manifiesta como otro de los modelos didácticos relevantes y vinculados con la enseñanza de la ciencia, es referido a la *recepción significativa*, el cual aduce a una perspectiva del aprendizaje significativo, en el marco del modelo expositivo de la enseñanza de la Matemática. Asimismo, aunque surge como un modelo innovador, todavía admite la ciencia y su enseñanza en el marco de expresar sólo un cúmulo de conocimientos.

Cabe destacar que el *modelo integrador* fue el seleccionado como enfoque pedagógico y epistemológico para la presente investigación, pues representa según Adúriz en [1], una de las maneras recomendadas para el aprendizaje de la ciencia haciendo ciencia, lo cual involucra el hacer, así como el comprender y el aprender, a la par que involucra el rol de la ciencia en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como sus distintos agentes en los cuales se encuentran: el estudiante y el docente, para llegar al objetivo fundamental de todo proceso de investigación, en este caso científica, con el fin de crear compatibilidad entre el conocimiento científico y el cotidiano.

2.2 Enseñanza de la Matemática y praxis docente mediadora

En lo concerniente al rendimiento estudiantil Hernández de Rincón en [14], lo entiende como un indicador de la productividad del sistema educativo que suministra información relevante para activar el proceso evaluativo, destacándose como *"un parámetro académico, resultado de estimaciones cuali-cuantitativas, que se aproximan a determinar el alcance de los aprendizajes obtenidos por un grupo de estudiantes un área del conocimiento y durante un período lectivo" (p.26).*

De esta manera, Ferrer, Hernández, Semprún y Chacín en [10], aluden al decaimiento del rendimiento estudiantil en ciertas carreras que requieren del pensamiento lógico abstracto y de perfil científico, como parte de las problemáticas y debilidades en el nivel de bachillerato, las competencias no aprehendidas, al igual que la falta de ajuste con las necesidades e intéreses del mercado mundial en la actualidad, tal como expresa Torres en [28]. En este caso, Téllez y González Silva en [27] afirman: *"Las preocupaciones no han estado centradas en el desempeño estudiantil como actividad de formación, sino en el rendimiento estudiantil, y dentro de éste especialmente el bajo rendimiento" (p.25).*

De este modo, la enseñanza de la Matemática como disciplina científica requiere de una praxis docente motivadora, medidora, la cual haga énfasis en las deficiencias conceptuales sobre los fundamentos teóricos, su aprendizaje por parte del educando y promover de manera creativa estrategias cognitivas y transdisciplinarias para atacar las fallas en la resolución de cálculos complejos, los cuales afectan considerablemente los parámetros académicos.

2.3 Estrategias didácticas mediadoras para la enseñanza de la Matemática universitaria

Las *estrategias didácticas mediadoras* (EDM), como las explica Ruiz Bolívar en [24], se vinculan con una modalidad instruccional, en términos de su conceptualización y en el marco de la descripción modelo y operacionalización, tomando en cuenta los cuatro momentos básicos de la instrucción: planificación, ejecución, autoevaluación reflexiva y evaluación de la instrucción. De esta manera, las EDM plantean una propuesta didáctica en la que se intenta suscitar, a través de diferentes medios educativos, la teoría y los hallazgos de la investigación, con énfasis en el ámbito científico, con el fin de beneficiar la mejora de la calidad de la instrucción, a partir del desarrollo de procesos cognoscitivos, meta-cognoscitivos y afectivos en la enseñanza. Sumado a esto, las EDM se basan en los postulados de la psicología cognoscitiva de procesamiento de información, el constructivismo y la psicología humanista, que en el caso de la enseñanza de las disciplinas científicas buscan alternativas motivantes y efectivas, para la construcción y afianzamiento del conocimiento. Así como también, afrontan el tipo de estructura comunicativa, la presentación y explicación de los contenidos, la intencionalidad educativa, la relación con los procesos de planificación y evaluación educativa y la consolidación de metas, resultados y logros en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

3 Metodología

La investigación se desarrolló bajo el enfoque cualitativo, el cual para Palella y Martins en [20], centra su atención en las relaciones y roles que desempeñan las personas en su contexto vital, de manera que el investigador interpreta la forma como se interrelacionan los referentes sociales, sus actividades y pensamiento en el marco del ámbito social y cultural donde se desenvuelven y cómo manejan dentro de éste sus problemas individuales.

Por ello, el presente estudio se basa en un análisis de contenido en cuanto a la relevancia que tiene la relación entre el rendimiento académico de los estudiantes universitarios en el área de Matematica y la praxis docente mediadora, tomando como muestra la UNIB.E. A su vez, esta investigación se puede considerar de tipo documental y descriptiva, pues se basó en un procedimiento sistemático de indagación, recolección, organización, análisis e interpretación de información en torno a un determinado tema.

A juicio de Arias en [3], este tipo de investigación radica en un proceso basado en la búsqueda, recuperación, análisis, crítica e interpretación de datos secundarios, es decir, integra tanto los datos obtenidos, como aquellos registrados por otros investigadores en fuentes documentales, con la finalidad de aportar nuevos conocimientos.

La revisión teórica y empírica consistió, en primer lugar, en la búsqueda de fuentes bibliográficas, así como también, al análisis de los resultados de las entrevistas estructuradas realizadas a los profesores y estudiantes de la UNIB.E, con un perfil específico, aplicándose el método de *triangulación de fuentes interestamental* propuesto por Cisterna en [7], el cual radica en establecer relaciones de comparación con los diversos tópicos para analizar la información recolectada, a través de las entrevistas y los textos legales, así como los antecedentes nacionales e internacionales de la investigación. La entrevista realizada a los estudiantes contenía las siguientes preguntas: ¿Qué piensas de las Matemáticas?; ¿Tu profesor tiene un lenguaje comprensivo al dar sus lecciones, si, no; por qué?; ¿Percibes la comprensión en las clases de Matemáticas?; ¿Tu profesor permite anexar nuevos o diferentes métodos de resolución de ejercicios matemáticos?; ¿Tu docente explica los ejercicios matemáticos mediante gráficos o solo con la aplicación numérica abstracta?; y ¿Consideras que tus notificaciones de Matemáticas son apropiadas por tu esfuerzo de estudio?.

Por otro lado, La entrevista realizada a los docents contenía las siguientes preguntas: ¿Te gusta ejercer las Matemáticas tal como indica el CEAACES?; ¿Considera que tus estudiantes comprenden las lecciones de Matemáticas?; ¿Al explicar los temas permites ejercer de distintas formas la resolución?; ¿Tus estudiantes participan en la resolución de matemáticos con diversos métodos?; ¿Los rendimientos académicos de tus estudiantes son considerados altos o bajos, por qué?; y ¿Mantiene una comunicación sistemática con tus estudiantes o solo de conocimiento matemático?

Cabe señalar, que el perfil de los actores claves se seleccionó a partir de las siguientes características: estudiantes de pregrado de las unidades curriculares de Matemática; así como también, profesores del área de Matemática, con más de dos años en la UNIB.E, titular o tiempo completo, los cuales poseen una categoría académica superior al egresado.

De igual forma, la postura epistemológica y ontológica adoptada por esta investigación sigue lo expresado por Galindo, Martínez y Fuentes en [12], en el marco del socioconstructivismo educativo de Vigotsky, Piaget y Croock, los cuales se enfocan tanto en el análisis de las investigaciones cualitativas de los procesos sociales y científicos relacionados con la interacción, y obtienen como beneficio la construcción de nuevos conocimientos o significados. En este caso, mejorar el rendimiento académico de los estudiantes universitarios en el área de Matemática a partir de una praxis docente mediadora.

Con todo lo descrito, se escogió la *teoría de la acción comunicativa de Habermas* (ver [13]), quien destaca en el fomento de habilidades comunicativas a nivel didáctico, a través de procesos de enseñanza y aprendizaje dialógicos, con una visión inter y transdisciplinaria esencial para suscitar motivación en los estudiantes de las áreas científica a partir de una praxis docente motivacional y dialógica.

Lo expresado anteriormente es ratificado andragógica y ontológicamente por Martínez en [19], en el marco de las investigaciones cualitativas pues, para el autor, en el área educativa existen diversos fenómenos, los cuales pueden ser estudiados tales como: procesos de enseñanza y aprendizaje, relaciones entre padres-docentes-educandos y el contexto sociocultural.

4 Resultados y discusión

El análisis de la investigación, tal como se describió anteriormente se efectuó a través de la triangulación de fuentes interestamental, con la finalidad de contrastar tanto la opinión de los actores claves, con las referencias documentales, legales y antecedentes nacionales e internacionales relacionados con la temática del rendimiento académico del estudiante universitario en el área de Matemática y su relación con la praxis docente, a los efectos de esta investigación sirvió para: consolidar y contribuir con el aprendizaje significativo en áreas del conocimiento científico universitario; fomentar la motivación para enseñar y aprender disciplinas como Álgebra, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral; y generar un entorno andragógico, epistemológico y social que favorecerá las prácticas educativas creativas y socio afectivas en virtud de la interrelación de saberes.

Los resultados de las entrevistas realizadas, tanto a los docentes como a los estudiantes de las distintas mallas curriculares que abarcan Matemática en la UNIB.E, permitieron conocer la necesidad de flexibilizar e interrelacionar saberes que contribuyan con la ampliación de escenarios alternativos para la práctica de disciplinas científicas, encuentros interuniversitarios y, sobre todo, que los docentes de esta unidad curricular impulsen una familiarización con los contextos teóricos y prácticos de la Matemática para la vida, vincular los contenidos y competencias con otras áreas del saber, recalcar la necesidad de asesorías continuas universitarias y virtualizar las asignaciones para aquellos estudiantes jefes de familias o trabajadores. Todo ello en el marco de contextos de enseñanza que susciten la asertividad bajo el clima de respeto, la atmósfera de aceptación, la corresponsabilidad para el desarrollo de contenidos y la integración cooperativa. Además, que los docentes entrevistados apoyaron la idea de suscitar un cambio del rol que contribuya con una enseñanza basada en la interacción de materiales virtuales, vinculación de contenidos y prácticas con el contexto institucional, regional, nacional e internacional, así como prácticas educativas que consoliden el perfil profesional de sus estudiantes.

Tanto estudiantes como docentes entrevistados concordaron en la necesidad andragógica y epistemológica de diseñar estrategias didácticas relacionadas con el paradigma multidimensional, motivacional, mediador y dialógico aplicado a las unidades curriculares de Matemática que consolide una didáctica psicoandragógica y tome en cuenta las necesidades, intéreses del grupo para aprender colectivamente de experiencias prácticas y teóricas.

De esta manera, para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en el área de Matemática resulta necesario generar una praxis docente basada en los procesos de integración, cognición y la motivación-emoción, tal como lo expresa la Constitución de la República del

Ecuador (2008), Plan Nacional del Buen Vivir PNBV (2013-2017) (ver [8]), así como la Ley Orgánica de Educación Superior LOES (ver [18]), donde la educación se desarrolla en el ser humano y garantizará su desarrollo holístico, se promueve esa participación social y educativa apoyada en la creatividad cultural, la integración, la corresponsabilidad y la acción ciudadana.

En concordancia con lo anterior, resulta esencial, divulgar principios axiológicos y cognitivos que fundamenten el quehacer didáctico en un paradigma epistemológico constructivista, dialógico e interpretativista que fortalezca el aprendizaje significativo a nivel colectivo y promueva el intercambio de puntos de vista.

Tal como lo expresa Velázquez en [30], las innovaciones pedagógicas deben suscitar espacios para la autocrítica reflexiva y el debate colectivo, en este caso para fortalecer el rendimiento de los estudiantes en áreas del saber científico relevantes para los planes de desarrollo económico, social, educativo y político nacional. Así como también, siguiendo lo expresado por Bekerman, Galagovsky y Laborde en [4], los contenidos para la enseñanza de las ciencias en el siglo XXI deben estar ajustados a los ámbitos históricos y sociales, donde se distribuyan y se evalúen los conocimientos.

Los resultados de las entrevistas a profundidad realizada a los actores claves de la investigación, el análisis de contenido aplicado a los antecedentes nacionales, internacionales, así como a los basamentos jurídicos a través de la triangulación de fuentes interestamental, se pudo constatar la necesidad de fortalecer y optimizar el rendimiento académico de los estudiantes universitarios en el área de Matemática, tomando como punto de partida la flexibilización y generar motivación a través de una praxis pedagógica basada en métodos y estrategias mediadoras, socioemocionales y dialógicas que fortalezcan la interacción de experiencias.

Asimismo, se pudo observar el requerimiento por actualizar la praxis docente y los procesos de enseñanza y aprendizaje con entornos, canales y herramientas virtuales, aplicar de la modalidad e-learning, así como también, la asesoría continua a través de tutores presenciales y virtuales, con el fin de apoyar los contenidos y prácticas ejecutados en las clases. De esta manera, se buscó una praxis docente basada en la comunicación, la crítica y la cooperación, donde se puedan, además, desarrollar estrategias que integren diversos procesos de planificación, contenido y evaluación en la didáctica cotidiana.

Tal como lo señala Ruiz en [24], los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de estrategias mediadoras, en este caso, en el área del saber científico buscan permanentemente el afianzamiento de nuevas alternativas para la enseñanza que coadyuven a una mayor comprensión en el marco del funcionamiento del sistema cognoscitivo humano e impulsen el entrenamiento permanente del aprendizaje significativo en las instituciones.

Por ello, se plantea un proceso socio-cognitivo esencial para propiciar el diálogo, las actividades didácticas flexibles, significativas, efectivas, dirigidas al logro de objetivos. Metodológica y epistemológicamente la presente investigación, justificó su valor heurístico a través del fomento psico-emocional que debe acompañar las propuestas institucionales universitarias en las áreas del saber científico adaptadas a una nueva visión pedagógica, psicológica práctica educativa, tecnológica y social.

Desde un marco ontológico y axiológico servirá redefinir nuevos conceptos educativos, transdisciplinarios basados en los paradigmas y teorías cognitivas y afectivas sustentadas en la corresponsabilidad comunicativa, tal como lo refiere el enfoque humanístico vinculado al estudio de las ciencias y la teoría crítica dialógica relacionada en el para qué de la experiencia educativa y la construcción conjunta de conocimientos, experiencias y diseño de proyectos.

5 Conclusiones y recomendaciones

En la presente investigación referida al rendimiento académico de los estudiantes universitarios en el área de Matemática y la praxis docente mediadora se pudo concluir andragógicamente la necesidad de estrategias de enseñanza y aprendizaje cooperativo, dialógico y psico-afectivo que fomenten la motivación de los contenidos y prácticas en clase, así como también, el continuo reforzamiento a través de asesorías presencias, virtuales, sin olvidar, el apoyo interinstitucional.

Por otro lado, epistemológicamente se buscó la consolidación de un aprendizaje cooperativo, dialógico basado en paradigmas y teorías educativas vinculadas con los enfoques socio-cognitivo, el socio-constructivismo educativo de Vigotsky (ver [31]), Piaget (ver [22]) y Crook (ver [9]), la teoría sociocultural de Vygotsky (ver [32]), y la teoría de la acción comunicativa de Habermas (ver [13]), con el fin de optimizar el aprendizaje universitario en las áreas del conocimiento científico, su actualización permanente, alcanzar las metas en los procesos de enseñanza, identificar fortalezas, a la par de debilidades que induzcan a un modelo educativo para el desarrollo social y económico expresado en el PNBV (2017-2021) (ver [8]). Así como también, la relevancia que tiene lo expuesto en la LOES (ver [18]), en cuanto a coadyuvar con el desarrollo de los principios orientadores de la ciencia, la tecnología y la innovación, la cual plantea entre sus objetivos estratégicos desarrollar un diagnóstico de los requerimientos en cuanto a las capacidades de producción que permitan garantizar un ámbito educativo innovador basado en el contexto social, científico y tecnológico.

Metodológica e institucionalmente el estudio sirvió como un aporte y antecedente nacional para investigaciones referidas al ámbito del rendimiento académico de los estudiantes universitarios en el área de Matemática y su vinculación con la praxis docente mediadora, con el objetivo de analizar a través de métodos como la triangulación interestamental de fuentes propuesta por Cisterna en [7], bases teóricas, antecedentes y entrevistas a profundidad que sirven para confirmar la relevancia que tiene en la actualidad el discurso de los actores y la síntesis interpretativa por parte del autor, a la par de promocionar pedagógicamente el diálogo de saberes constructivos y flexibilizar los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de la motivación.

A la par, desde los ámbitos axiológicos y ontológicos, se impulsa la mediación sustentada en la reflexión crítica, la utilización de un enfoque dialógico para la enseñanza universitaria e integrar las teorías y procesos apoyados en la interacción, la promoción de un modelo crítico autoconstructivo del aprendizaje para el estudio de las ciencias, la apertura de espacios para el automonitoreo y la transdisciplinariedad que deben tener las disciplinas científicas y en especial la Matemática como área del saber para la formación de profesionales.

Si bien, el estudio sobre el rendimiento académico de los estudiantes en distintas áreas científicas ha sido motivo de preocupación a nivel nacional e internacional, como aduce Bravo, Trelles y Barrazueta en [6]:

> *Es importante que los docentes de matemática se involucren en procesos de capacitación en aspectos pedagógicos, curriculares, didácticos y disciplinares que se traduzcan en una transición hacia nuevas prácticas educativas más eficientes, donde su rol sea mediar entre el estudiante y la consecución de sus aprendizajes (p.11).*

Dado que el rendimiento estudiantil en las disciplinas científicas se adversa por la formación y capacitación docente, por ello, el profesor u orientador debe explicar eficientemente al educando las cualidades, facetas, ideas y experiencias prácticas de este tipo de áreas del saber, donde muchas veces no siempre resulta fácil explicar y es preciso convertirlas en un pensamiento permanente con renovados estímulos.

Referencias

[1] Aduriz, B.; *El modelo integrador como enfoque pedagógico y epistemológico*, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, (UPEL). Rubio, Venezuela. 2004.

[2] Arias, F.; *El proyecto de investigación, introducción a la metodología científica*. Venezuela: Episteme. 2006.

[3] Arteaga, M.; *Problemática del aprendizaje de la matemática de los estudiantes del octavo y noveno año de educación básica del colegio nacional La Tingue del cantón Olmedo provincia de Loja*. Universidad Central del Ecuador Universidad Nacional de Loja. Facultad de Ingeniería Ciencias Físicas y Matemática. Quito, Ecuador. 2013.

[4] Bekerman, D.; Galagovsky, L.; Laborde, S. y Odetti, H.; *Enseñanza de la Química vs. Investigación en enseñanza de la Química: ¿divorcio, convivencia... o qué?*. Educación en ciencias químicas, **435** (2011), 49–55.

[5] Bixio. C.;*Las Estrategias Didácticas y el proceso de mediación. Enseñar a aprender*. Argentina: Homo Sapiens Ediciones. 2000.

[6] Bravo, F.; Trelles, C. y Barrazueta, J.; *Reflexiones sobre la evolución de la clase de matemáticas en el bachillerato ecuatoriano.* INNOVA Research Journal. **2**(7) (2017), 1–12.

[7] Cisterna Cabrera, F.; *Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en Investigación cualitativa*. Chile: Universidad del Bío Bío. 2005.

[8] Consejo Nacional de Planificación. *Plan Nacional Para el Buen Vivir (2017-2021).* República del Ecuador, 2017.

[9] Crook, Ch.; *Ordenadores y aprendizaje colaborativo.* Madrid: Ministerio de Educación y Cultura. Ediciones Morata. 1998.

[10] Ferrer, K.; Hernández, M.; Semprún, B.; Chacín, J.; González, E. y Archile, A.; *Evaluación del Rendimiento Estudiantil de Química Analítica en dos planes de estudio.* EDUCERE. **15**(52) (2011), 651–662.

[11] Galagovsky, L.; *La Enseñanza de la Química Pre-Universitaria: ¿Qué enseñar, cómo, cuánto, para quiénes?.* Revista Química Viva. **1** (2005), año 4, 8–22.

[12] Galindo González, R.; Martínez de la Cruz, N. y Ley Fuentes, M.; *Acercamiento epistemológico a la Teoría del Aprendizaje Colaborativo.* Revista Apertura. **4**(2) (2012), 1–3.

[13] Habermas, J.; *Teoría de la Acción Comunicativa I. Racionalidad de la acción y racionalización social.* México: Taurus. 2002.

[14] Hernández de Rincón, A.; *El rendimiento académico de las matemáticas en alumnos universitarios.* Encuentro Educacional. **12**(1) (2005), 9–30. Venezuela: Universidad del Zulia.

[15] Izquierdo, M.; Caamaño, A. y Quintanilla, M.; *Investigar en la enseñanza de la química: Nuevos horizontes: contextualizar y modelizar.* España: Universitat(SIC) Autónoma de Barcelona. 2007.

[16] Jiménez, G. y Llitjós, A.; *Procesos comunicativos en entornos telemáticos cooperativos.* Revista de Medios de Comunicación y Educación. **27** (2006), 149–154.

[17] Jiménez, G. y Llitjós, A.; *Cooperación en entornos telemáticos y la enseñanza de la Química.* Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las Ciencias. **3**(1) (2006), 115–133.

[18] *LOES: Ley Orgánica de Educación Superior.* República del Ecuador. 2016.

[19] Martínez, M.; *Metodología Cualitativa.* Caracas: Universidad Simón Bolívar. Instituto de estudio del conocimiento (INESCO). 2000.

[20] Pallela, S. y Martins, F.; *Metodología de la Investigación Cuantitativa.* Caracas: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (FEDEUPEL). 2006.

[21] Pérez, M.; *Inteligencia Interpersonal y dialógica autorreflexiva del docente hacia una pedagogía crítico social para la innovación en la Escuela Básica.* Tesis Doctoral no publicada para optar al título de Doctor en Educación en la Universidad Santa María. Caracas: Autor. 2008.

[22] Piaget, J.; *Psicología del niño.* Madrid: Morata. 1984.

[23] Piñero, A.; *No me gustan las Matemáticas.* Caracas: Ministerio de Ciencia y Tecnología. Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas. **11**(120) (2003), 1–13.

[24] Ruiz Bolivar, C.; *La Estrategia Didáctica Mediadora:Una propuesta Instruccional para el Desarrollo de los procesos cognitivos a través del currículum en el contexto de construcción socio-cultural del aprendizaje.* Ponencia presentada en el 5to. Encuetro Internacional (16to. Nacional) de Educación y Pensamiento, Puerto Rico. 2004.

[25] Ruiz Ortega, F.; *Modelos Didácticos para la Enseñanza de las Ciencias Naturales.* Revista latinoamericana de Estudios Educativos. **3**(2) (2007), 41–60.

[26] Semprún, B.; Chacín, J.; Abed El Kader, D.; Ferrer, K. y Piña, I.; *Evaluación del Rendimiento y Repitencia Estudiantil de la Asignatura de Análisis Instrumental de la Escuela de Bioanálisis durante el intervalo 2000-2006.* Ponencia presentada para las VII Jornadas Científicas Dres. Eligio Nucette y Lilia Meléndez de Nucette de la Facultad de Medicina de la Universidad del Zulia, Maracaibo. 2008.

[27] Téllez, M. y González Silva, H.; *Desempeño estudiantil y equidad en la universidad venezolana.* Cuadernos OPSU, **6**. Venezuela: Consejo Nacional de Universidades. 2002.

[28] Torres, M.; *Factores Motivacionales que inciden en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los estudiantes de secundaria.* Trabajo de Grado no publicado. Venezuela: Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidentales. 2006.

[29] UNESCO-IESALC. *Tendencias de la Educación Superior en América Latina y el Caribe.* (Documento en Línea). Disponible: `http://www.iesalc.unesco.org.ve`. (Consulta: 2017, Agosto 15). 2008.

[30] Velásquez de Díaz, A.; *Evaluación de los aprendizajes en el contexto de la Educación Universitaria.* Venezuela: Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria- Instituto de Tecnología "Jacinto Navarro Vallenilla". 2011.

[31] Vygotsky, L.; *Pensamiento y discurso.* Nueva York: Plenum Press. 1987.

[32] Vygotsky, L.; *Análisis de la Teoría de Vygotsky para la reconstrucción de la inteligencia social.* Editorial Universitaria Católica de Cuenca, Ecuador. 2014.

Guía para los Autores

Divulgaciones Matemáticas es una revista arbitrada que considera para su publicación trabajos inéditos de investigación, en todas las áreas de la Matemática y sus aplicaciones, historia o enseñanza. Contribuciones adecuadas trabajos de investigación, de divulgación e históricos y de enseñanza matemática. Se presta especial atención a los temas tratados en la reunión anual e itinerante de las **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** celebradas en Venezuela. Además, contempla una sección de problemas y soluciones, la cual presenta problemas que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado, sin conocimientos especializados.

El primer requisito para que un artículo sea publicable es su corrección matemática. En segundo lugar, el estilo expositivo debe ser atrayente y lo más fluido y organizado que sea posible. En los trabajos de investigación se tomarán en cuenta la relevancia y originalidad de los resultados obtenidos. El tercer requisito para que el cuerpo editorial de la revista acepte un artículo, para someterlo a evaluación y posible publicación, es que el mismo debe estar elaborado en LaTeX, utilizando una plantilla predefinida por la revista, se le pide a los autores respetar las instrucciones internas indicadas en la plantilla mencionada. El archivo fuente (.tex) y una versión en formato .dvi, .pdf o .ps (imprimible) debe enviarse por correo electrónico a `divulgaciones@demat-fecluz.org`. Si el artículo contiene figuras, éstas deben adjuntarse como archivos separados en formatos .png o .jpg.

Los lenguajes aceptados por la revista son español e inglés. Al someter un artículo, el autor debe remitir una carta en la que se haga constar que el artículo que se está sometiendo no ha sido publicado o sometido a otra revista de forma total o parcial. Dicha carta debe contener los siguientes datos: Nombre completo del autor o autores, título del artículo, firma del autor que somete el artículo (autor de correspondencia), y declaración expresa de conformidad de los demás autores (cuando exista más de un autor).

El autor, o autores, en el mensaje de sometimiento del manuscrito deben indicar la sección de la revista en la que sugiera debe ser incluido su trabajo, a saber: artículo de investigación, artículo de divulgación e histórico, artículo de enseñanza matemática. Los artículos deben organizarse en las siguientes secciones: Identificación, Resumen, Abstract, Introducción, Desarrollo, Agradecimiento (opcional), y Referencias bibliográficas (usar el estilo ejemplificado en la plantilla).

> **Identificación.** Esta debe incluir: Título completo del trabajo en castellano e inglés; Título corto para el trabajo; Nombre completo y dirección completa del autor o autores; Afiliación institucional; Dirección electrónica; Dos clasificaciones, una primaria y otra secundaria, de cinco caracteres de la AMS (MSC 2010).
>
> **Resumen:** Texto de no más de doscientas palabras que simplifique en esencia lo que se presenta a lo largo del trabajo. Debe tomar en cuenta aspectos como: Objetivos del trabajo; Metodología utilizada; Resultado. A continuación del resumen se deben incluir de tres a seis palabras o frases claves.
>
> **Abstract:** Una traducción al idioma inglés de todo lo expuesto en el resumen.

Cabe resaltar que **LA REVISTA SOLO PROCESARÁ LOS ARTÍCULOS QUE CUMPLAN CON TODOS LOS REQUISITOS ANTES EXPUESTOS**.

Guide for Authors

Divulgaciones Matemáticas is a refereed journal, which considers for publication, unpublished research papers in all branches of mathematics and its applications, history or teaching. Suitable contributions can be research papers, historical and/or teaching papers and bibliographical reviews. Special attention is paid to those topics covered by the annual itinerant meeting **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** held in Venezuela. In addition, the journal contemplates a section of problems and solutions, which contains problems that can be addressed by undergraduate students of mathematics without expertise.

Mathematical correctness is the first requirement for an article to be published. In second place, the exposition style should be attractive and most fluid and organized as possible. For research works the relevance and originality of the results will be taken into account. The third requirement to agree on the evaluation and possible publication of an article is its preparation in LaTeX using a predefined template by the journal. We ask the authors to respect the internal instructions given in the provided template. The source file (.tex) and a version .dvi, .pdf or .ps (printable) should be sent by email to `divulgaciones@demat-fecluz.org`. If the article contains figures, these should be attached as separate files in .jpg or .png formats.

The languages accepted by the journal are Spanish and English. When submitting an article, the author must include a separate letter stating that the article has not been published or submitted to another journal in total or partial way. The letter should contain the following information: Full name of author or authors, article title, signature of the author who submitts the article (corresponding author), and a declaration of conformity of the other authors.

When submitting a manuscript, the author or authors, should suggest the section of the journal in which the work should be included, namely research papers, expository and historical papers, mathematics teaching papers. Articles should be organized into the following sections: Identification, Abstract, Resumen, Introduction, Development, Acknowledgment (optional), and References (use the style exemplified in the template).

> **Identification**. This should include: Full title in Spanish and English; short title for the article; Full name and full address of author or authors; Institutional affiliation; Electronic address; Two classifications, one primary and one secondary, of five characters of the AMS (MSC 2010).
>
> **Abstract:** Text of not more than two hundred words simplify essentially what is presented throughout the work. You should take into account aspects such as work objectives; Methodology used; Result. Following the abstract should include three to six key words or phrases.
>
> **Resumen:** A Spanish language translation of the above in the abstract.

Should be noted that **THE JOURNAL WILL QNLY PROCESS ARTICLES THAT MEET ALL THE REQUIREMENTS MENTIONED ABOVE**.

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS, Vol. 19, No. 1
Se terminó de editar en Agosto del 2018
en el Departamento de Matemática (DEMAT)
Maracaibo - Venezuela.

Divulgaciones Matemáticas

Vol. 19, No. 1, 2018

Contenido (Contents):

Artículos de Investigación
(Research papers)

Artículos de Divulgación e Históricos
(Expository and historical papers)

Artículos de Enseñanza Matemática
(Mathematical teaching papers)

Problemas y Soluciones
(Problems and Solutions)