Universidad del Zulia

Divulgaciones Matemáticas

Facultad Experimental de Ciencias

Departamento de Matemática

Depósito legal: pp 199302ZU392
ISSN 1315-2068

Maracaibo - Venezuela

Vol. 18 - No. 1 - 2017

Divulgaciones Matemáticas

Revista Matemática de la Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Departamento de Matemática

Revista arbitrada, publicada de forma digital, de libre acceso, indizada en Mathematical Reviews, MathSci online/CD-ROM, Zentralblatt für Mathematik y Revencyt. Se publica un volumen anual compuesto por dos números, que aparecen en junio y diciembre.

Dirección Postal:

Revista Divulgaciones Matemáticas
Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526
Maracaibo, Estado Zulia
Venezuela

Correo electrónico: `divulgaciones@demat-fecluz.org`

URL: `divmat.demat-fecluz.org`

Depósito Legal pp 199302ZU392

Compuesta con LaTeX y AMS-LaTeX en el Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de ciencias, Universidad del Zulia.

Universidad del Zulia

Maracaibo, Venezuela

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS

Vol. 18 | 2017 | No. 1

Presentación

El Comité Editorial de ***Divulgaciones Matemáticas*** se complace en presentar el **Vol. 18**, **No. 1**, **2017**. En el presente número están contenidos los artículos procesados durante el año **2017** que fueron evaluados y aceptados para su publicación.

Es importante resaltar que la revista recibió un total de 5 manuscritos, que fueron sometidos para su evaluación y posible publicación. Uno de estos trabajos no cumplía con el formato de la revista, por lo cual fue rechazado y se invitó al autor del mismo a escribir el artículo usando la plantilla de la revista, sin obtener respuesta. Un (1) manuscrito reprobó la evaluación de los árbitros y sólo tres (3) cumplieron con los requisitos que pide la revista y aprobaron la evaluación de los árbitros respectivos. Sin embargo, a pesar de la poca cantidad de artículos, el Comité Editorial decidió publicar este número para mostrar a la comunidad matemática que la revista sigue en funcionamiento, pese a las dificultades, tratando de matener el mejor nivel de calidad posible.

El trabajo editorial relacionado con este número es el resultado del esfuerzo de algunos miembros del Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de Ciencias. Los Editores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible este número: a los autores de los trabajos que se presentan, que dieron su voto de confianza a la revista; a los árbitros que evaluaron los artículos, cuya labor desinteresada permitió satisfacer los estándares de calidad de la revista y mejorar sensiblemente la forma de los trabajos; al equipo editorial de ***Divulgaciones Matemáticas***; y en especial al Prof. José Heber Nieto por su aporte para la sección de ***Problemas y Soluciones***. A todos, mil gracias.

Por último, el Comité Editorial de ***Divulgaciones Matemáticas*** ofrece disculpas a los autores de los artículos por los posibles inconvenientes causados, debido al retraso en la publicación del presente número. Además, invitamos a la comunidad matemática venezolana e internacional a seguir dándonos su voto de confianza sometiendo sus trabajos en la revista para evaluación y posible publicación.

Dr. Alirio Peña [1] — Dr. Tobías Rosas Soto.[2]

Dr. Vinicio Ríos[3]

---

[1] Editor en Jefe de *Divulgaciones Matemáticas*

[2] Editor del presente número y Editor Adjunto de *Divulgaciones Matemáticas*

[3] Editor Asociado y Miembro del Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas*

Presentation

The Editorial Board of ***Divulgaciones Matemáticas*** is pleased to present the **Vol. 18**, **No. 1**, **2017**. Articles contained in this issue are those processed during the year **2017** and were evaluated and accepted for publication.

It is important to note that the journal received a total of 5 manuscripts, which were submitted for evaluation and possible publication. One of these articles did not comply with the format of the journal, so it was rejected and the author was invited to write the article using the template of the journal, without obtaining a response. One (1) manuscript failed the evaluation of the referees and only three (3) complied with the requirements requested by the journal and approved the evaluation of the respective referees. However, in spite of the small number of articles, the Editorial Board decided to publish this issue to show the mathematical community that the journal is still working, despite the difficulties, is still active and makes efforts to keep the highest possible quality level.

The editorial work related to this issue is the result of the efforts of some members of the Department of Mathematics of the Experimental Faculty of Sciences. The Editors want to express their gratitude to all of those who made this issue possible: to the authors of the presented works, who gave their vote of confidence to the journal; to the referees, who evaluated the articles with selfless work, guaranteeing the quality standards of the journal and significantly improving the way of working; to the editorial team of ***Divulgaciones Matemáticas***; and especially to Professor José Heber Nieto, for his contribution to the ***Problems and Solutions*** section. To all of them, thanks a lot.

Finally, the Editorial Board of ***Divulgaciones Matemáticas*** offer an apology to the authors of the articles for any inconvenience caused by the delay in the publication of this issue. In addition, we invite the Venezuelan and international mathematical community to continue giving their support by submitting their articles to our journal for evaluation and possible publication.

Dr. Alirio Peña [4]

Dr. Tobías Rosas Soto.[5]

Dr. Vinicio Ríos[6]

[4]Chief Editor of *Divulgaciones Matemáticas*
[5]Editor of the present issue and Adjunct Editor of *Divulgaciones Matemáticas*
[6]Associate Editor and Member of the Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas*

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS
Vol. 18, No. 1, 2017

Contenido (Contents):

Artículos de Investigación
(Research papers)

Artículos de Divulgación e Históricos
(Expository and historical papers)

Problemas y Soluciones
(Problems and Solutions)

Divulgaciones Matemáticas Vol. 18, No. 1 (2017), pp. 1–9

Evaluation of some integrals involving classical polynomials of Hermite and Legendre using Laplace transform method and hypergeometric approach

Evaluación de algunas integrales que involucran los polinomios clásicos de Hermite y Legendre, usando el método de transformadas de Laplace y el enfoque hipergeométrico

M.I. Qureshi (miqureshi_delhi@yahoo.co.in)
Saima Jabee (saimajabee007@gmail.com)
M. Shadab (shadabmohd786@gmail.com)
Department of Applied Sciences and Humanities
Faculty of Engineering and Technology
Central University
Jamia Millia Islamia, New Delhi-110025, India

Abstract

In this paper we have described some novel integrals associated with different higher order polynomials such as classical Hermite's polynomials and classical Legendre's polynomials. The following integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-x^2) H_{n-2k}(x)dx \ , \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \exp(-x^2) H_n(x)dx \ ,$$

$$\int_0^{\infty} t^n \exp(-t^2) H_n(xt)dt \quad \text{and} \quad \int_x^{\infty} t^{n+1} \exp(-t^2) P_n\left(\frac{x}{t}\right)dt$$

are evaluated using hypergeometric approach and Laplace transform technique, which is a different approach from the approaches given by the other authors in the field of special functions.

Key words and phrases: Gauss's summation theorem; classical Legendre's polynomials of first kind; classical Hermite's polynomials; generalized hypergeometric function; Laplace transformation.

Received 10/04/2017. Revised 27/04/2017. Accepted 20/07/2017.
MSC (2010): Primary 33C20; Secondary 33C45.
Corresponding author: Saima Jabee

Resumen

En este artículo hemos descrito algunas integrales novedosas asociadas con diferentes polinomios de orden superior, tales como los polinomios clásicos de Hermite y los polinomios clásicos de Legendre. Las siguientes integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-x^2) H_{n-2k}(x) dx \ , \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \exp(-x^2) H_n(x) dx \ ,$$

$$\int_0^{\infty} t^n \exp(-t^2) H_n(xt) dt \quad \text{and} \quad \int_x^{\infty} t^{n+1} \exp(-t^2) P_n\left(\frac{x}{t}\right) dt$$

Las siguientes integrales se evalúan utilizando el enfoque hipergeométrico y la técnica de transformada de Laplace, que es un enfoque diferente de los enfoques dados por los otros autores en el campo de funciones especiales.

Palabras y frases clave: Teorema de la sumas de Gauss; polinomios clásicos de Legendre de primera clase; polinomios clásicos de Hermite; función hipergeométrica generalizada; Transformada de Laplace.

1 Introduction, definitions and preliminaries

The theory of integrals involving the classical orthogonal polynomials (Laguerre, Hermite, Legendre, Bessel, Tchebychev and as in Askey-scheme) has been developed by many authors (see, [1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, 9, 10]) and other special cases therein.

Motivated essentially, we aim at presenting four integral formulae associated with classical polynomials of Hermite and Legendre using Laplace transform method and hypergeometric approach. On specializing the parameters, the evaluated integrals may be reduced to almost elementary integrals and as special cases appearing in applied mathematics, engineering and physical sciences.

The widely-used Pochhammer symbol $(\lambda)_\nu$ $(\lambda, \nu \in \mathbb{C})$ is defined by

$$(\lambda)_\nu := \frac{\Gamma(\lambda+\nu)}{\Gamma(\lambda)} = \begin{cases} 1 & (\nu = 0; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \\ \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1) & \left(\nu = n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-\right) \end{cases} , \tag{1.1}$$

it is being understood *conventionally* that $(0)_0 = 1$ and assumed *tacitly* that the Γ quotient exists.

The *generalized hypergeometric function* ${}_pF_q$ with p numerator parameters $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ and q denominator parameters $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$, is defined by

$${}_pF_q\left[\begin{array}{c} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; \end{array} z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} (\alpha_j)_n}{\prod_{j=1}^{q} (\beta_j)_n} \frac{z^n}{n!}, \tag{1.2}$$

$$\big(p, q \in \mathbb{N}_0;\ p \leqq q+1\ ;\ p \leqq q \text{ and } |z| < \infty;$$

$p = q+1$ and $|z| < 1$; $p = q+1, |z| = 1$ and $\mathrm{Re}(\omega) > 0$; $p = q+1, |z| = 1, z \neq 1$ *and* $0 \geq \ \mathrm{Re}(\omega) > -1\big)$,
where

$$\omega := \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j$$

$$\big(\alpha_j \in \mathbb{C}\ (j = 1, 2, \ldots, p); \beta_j \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-(j = 1, 2, \ldots, q)\big).$$

Laplace transform of $t^{\alpha-1}$:

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}, \tag{1.3}$$

where $\mathrm{Re}(s) > 0$, $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < \infty$ or $\mathrm{Re}(s) = 0$, $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$.

Guass's summation theorem: The Gauss's summation theorem plays a vital role in the proof of many interesting results and some physical problems [11, p.49(Th.18)]

$${}_2F_1\left[\begin{array}{rr} a, b; & \\ c; & 1 \end{array}\right] \;=\; \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \tag{1.4}$$

where $c \neq 0, -1, -2, -3...$ and $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$.

Special cases of Gauss's summation theorem: By using the Gauss's summation theorem, it is easy to prove (see, [11, p.69(Q.N.4)])

$${}_2F_1\left[\begin{array}{rr} \frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}; & \\ b+\frac{1}{2}; & 1 \end{array}\right] \;=\; \frac{2^n (b)_n}{(2b)_n}, \tag{1.5}$$

where $b + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, -3...$ and $n = 0, 1, 2, 3, ...$

$${}_2F_1\left[\begin{array}{rr} -n, b; & \\ c; & 1 \end{array}\right] \;=\; \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, \tag{1.6}$$

where $c \neq 0, -1, -2, -3...$ and $n = 0, 1, 2, 3, ...$

Classical Hermite's polynomials: Here, we are interested to use hypergeometric form of classical Hermite's polynomials (see, [11, p.191])

$$H_n(x) \;=\; (2x)^n {}_2F_0\left[\begin{array}{rr} \frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}; & \\ \overline{}; & \frac{-1}{x^2} \end{array}\right], \tag{1.7}$$

where $n = 0, 1, 2, 3, ...$

Legendre's polynomials of first kind: For the sake of convenient hypergeometric approach, we shall use two hypergeometric forms of Legendre's polynomials of first kind (see, [11, p.166 (Eq.4) and p.167 (Eq.7)])

$$P_n(x) \;=\; (x)^n {}_2F_1\left[\begin{array}{rr} \frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}; & \\ 1; & \frac{x^2-1}{x^2} \end{array}\right], \tag{1.8}$$

$$P_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (2x)^n}{n!} {}_2F_1\left[\begin{array}{ll} \frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}; & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{2}-n; & \end{array}\right], \tag{1.9}$$

where $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

$$\{Gamma\ function\ of\ non-positive\ integers\}^{-1} = 0, \tag{1.10}$$

$$\{Factorial\ of\ negative\ integers\}^{-1} = 0. \tag{1.11}$$

2 First integral

Consider the following integral:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-x^2) H_{n-2k}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+m} \exp(-x^2) H_m(x) dx, \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $n = m + 2k$.
Applying the definition of classical Hermite's polynomials (1.7) in the equation (2.1), we get

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+m} \exp(-x^2)(2x)^m {}_2F_0\left[\begin{array}{ll} \frac{-m}{2}, \frac{-m+1}{2}; & \frac{-1}{x^2} \\ \rule{2cm}{0.4pt}; & \end{array}\right] dx \\ &= 2^{m+1} \sum_{p=0}^{[\frac{m}{2}]} \frac{(\frac{-m}{2})_p (\frac{-m+1}{2})_p (-1)^p}{p!} \int_0^{\infty} \exp(-x^2) x^{2(k+m-p)} dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Using suitable substitution and applying the definition of Laplace transform (1.3) in the equation (2.2), we get

$$\begin{aligned} I_1 &= 2^m \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)_{k+m} \sum_{p=0}^{[\frac{m}{2}]} \frac{(\frac{-m}{2})_p (\frac{-m+1}{2})_p}{(\frac{1}{2}-k-m)_p p!} \\ &= 2^m \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)_{k+m} {}_2F_1\left[\begin{array}{ll} \frac{-m}{2}, \frac{-m+1}{2}; & 1 \\ \frac{1}{2}-k-m; & \end{array}\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Now applying the Gauss's summation theorem (1.5) in the equation (2.3), we get

$$I_1 = \frac{2^{-2k}\sqrt{\pi}(m+2k)!}{k!}. \tag{2.4}$$

Now replacing m by $n - 2k$, we get

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-x^2) H_{n-2k}(x) dx = \frac{2^{-2k}\sqrt{\pi} n!}{k!}. \tag{2.5}$$

Particular case: When $k = 0$ in the equation (2.5), we get

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-x^2) H_n(x) dx = n!\sqrt{\pi}. \tag{2.6}$$

Using the expansion of x^n in a series of Hermite's polynomials, above integral of equation (2.6) was evaluated by Rainville [11].

3 Second integral

Consider the second integral:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \exp(-x^2) H_n(x) dx,$$

where $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

Case I: (i) When $n = 2m$ and $k = 2m-1$ in the integral I_2, we get

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} \exp(-x^2) H_{2m}(x) dx \qquad (3.1) \\ &= 2^{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{4m-1} \exp(-x^2)\, {}_2F_0 \left[\begin{array}{ll} -m, -m+\frac{1}{2}; & \frac{-1}{x^2} \\ \overline{\phantom{-m, -m+\frac{1}{2}}}; & \end{array} \right] dx \\ &= 2^{2m} \sum_{p=0}^{m} \frac{(-m)_p (-m+\frac{1}{2})_p (-1)^p}{p!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{4m-2p-1} \exp(-x^2) dx. \end{aligned}$$

Since the integrand is an odd function in x, so applying the property of definite integral, we get

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} \exp(-x^2) H_{2m}(x) dx = 0. \tag{3.2}$$

Case I: (ii) When $n = 2m$ and $k = 2m-2$ in the integral I_2, we get

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} \exp(-x^2) H_{2m}(x) dx \qquad (3.3) \\ &= 2^{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{4m-2} \exp(-x^2)\, {}_2F_0 \left[\begin{array}{ll} -m, -m+\frac{1}{2}; & \frac{-1}{x^2} \\ \overline{\phantom{-m, -m+\frac{1}{2}}}; & \end{array} \right] dx \\ &= 2^{2m+1} \sum_{p=0}^{m} \frac{(-m)_p (-m+\frac{1}{2})_p (-1)^p}{p!} \int_{0}^{\infty} x^{4m-2p-2} \exp(-x^2) dx. \qquad (3.4) \end{aligned}$$

Using suitable substitution and applying the definition of Laplace transform (1.3) in the equation (3.4), we get

$$\begin{aligned} I_4 &= 2^{2m} \Gamma\left(2m - \frac{1}{2}\right) \sum_{p=0}^{m} \frac{(-m)_p (-m+\frac{1}{2})_p}{(\frac{3}{2} - 2m)_p p!} \\ &= 2^{2m} \Gamma\left(2m - \frac{1}{2}\right) {}_2F_1 \left[\begin{array}{ll} -m, -m+\frac{1}{2}; & 1 \\ \frac{3}{2} - 2m; & \end{array} \right]. \qquad (3.5) \end{aligned}$$

Applying the Gauss's summation theorem (1.6) in the equation (3.5), we get

$$\begin{aligned} I_4 &= 2^{2m}\Gamma\left(2m-\frac{1}{2}\right)\frac{(1-m)_m}{\left(\frac{3}{2}-2m\right)_m} \\ &= 2^{2m}\Gamma\left(2m-\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(\frac{3}{2}-2m)}{\Gamma(1-m)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \\ &= \frac{2^{2m}\pi}{\Gamma(1-m)\Gamma(\frac{3}{2}-m)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

When m=1,2,3,... and due to presence of $\Gamma(1-m)$ in denominator of the equation (3.6), we get

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2}\exp(-x^2)H_{2m}(x)dx = 0. \tag{3.7}$$

Similarly, when $n = 2m$ and $k = 2m-3, 2m-4, ...2, 1, 0$, corresponding integrals obtained from the integral I_2, will be zero.

Case II: (i) When $n = 2m+1$ and $k = 2m$ in the integral I_2, we get

$$I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\exp(-x^2)H_{2m+1}(x)dx \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &= 2^{2m+1}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{4m+1}\exp(-x^2)\,{}_2F_0\left[\begin{array}{lc} -m, -m-\frac{1}{2}; & \frac{-1}{x^2} \\ \overline{\phantom{-m, -m-\frac{1}{2}}}; & \end{array}\right]dx \\ &= 2^{2m+1}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-m)_p(-m-\frac{1}{2})_p(-1)^p}{p!}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{4m-2p+1}\exp(-x^2)dx. \end{aligned}$$

Since the integrand is an odd function in x, so applying the property of definite integral, we get

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\exp(-x^2)H_{2m+1}(x)dx = 0. \tag{3.9}$$

Case II: (ii) When $n = 2m+1$ and $k = 2m-1$ in the integral I_2, we get

$$I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1}\exp(-x^2)H_{2m+1}(x)dx \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} &= 2^{2m+1}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{4m}\exp(-x^2)\,{}_2F_0\left[\begin{array}{lc} -m, -m-\frac{1}{2}; & \frac{-1}{x^2} \\ \overline{\phantom{-m, -m-\frac{1}{2}}}; & \end{array}\right]dx \\ &= 2^{2m+2}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-m)_p(-m-\frac{1}{2})_p(-1)^p}{p!}\int_{0}^{\infty} x^{4m-2p}\exp(-x^2)dx. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Using suitable substitution and applying the definition of Laplace transform (1.3) in the equation (3.11), we get

$$\begin{aligned} I_6 &= 2^{2m+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)_{2m}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-m)_p(-m-\frac{1}{2})_p}{(\frac{1}{2}-2m)_p p!} \\ &= 2^{2m+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)_{2m}\ {}_2F_1\left[\begin{array}{c} -m, -m-\frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}-2m; \end{array} 1\right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Applying the Gauss's summation theorem (1.6) in the equation (3.12), we get

$$\begin{aligned} I_6 &= 2^{2m+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)_{2m}\frac{(1-m)_m}{(\frac{1}{2}-2m)_m} \\ &= 2^{2m+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)_{2m}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m)\Gamma(1-m)} \\ &= \frac{2^{2m+1}\pi}{\Gamma(\frac{1}{2}-m)\Gamma(1-m)}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

When $m = 1, 2, 3, ...$ and due to presence of $\Gamma(1-m)$ in denominator of (3.13), we get

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1}\exp(-x^2)H_{2m+1}(x)dx \quad = \quad 0. \tag{3.14}$$

Similarly, when $n = 2m + 1$ and $k = 2m - 2, 2m - 3, ..., 2, 1, 0$, corresponding integrals obtained from I_2, will be zero.
The unification of above integrals can be written as:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\exp(-x^2)H_n(x)dx = 0, \tag{3.15}$$

where $k = 0, 1, 2, 3, ..., (n - 1)$.
Above integral (3.15) was derived with the help of Hermite's differential equation and orthogonal property of Hermite's polynomials.
From the equation (2.6) and the equation (3.15), we get

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\exp(-x^2)H_n(x)dx = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1 \\ n!\sqrt{\pi}, & k = n. \end{cases} \tag{3.16}$$

4 Curzon's integral

Consider the third integral:

$$I_7 \quad = \quad \int_0^{\infty} t^n\exp(-t^2)H_n(xt)dt \tag{4.1}$$

$$= (2x)^n \int_0^\infty t^{2n} \exp(-t^2) \; {}_2F_0 \left[\begin{array}{ll} \frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}; & \frac{-1}{(tx)^2} \\ \overline{}; & \end{array} \right] dt$$

$$= (2x)^n \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(\frac{-n}{2})_p (\frac{-n+1}{2})_p (-1)^p (x)^{-2p}}{p!} \int_0^\infty t^{2n-2p} \exp(-t^2) dt. \quad (4.2)$$

Using suitable substitution and applying the definition of Laplace transform (1.3) in the equation (4.2), we get

$$I_7 = (2)^{n-1} x^n \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(\frac{-n}{2})_p (\frac{-n+1}{2})_p (-1)^p (x)^{-2p}}{p!} \Gamma\left(n - p + \frac{1}{2}\right)$$

$$= (2)^{n-1} x^n \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)_n \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(\frac{-n}{2})_p (\frac{-n+1}{2})_p (x)^{-2p}}{(\frac{1}{2} - n)_p p!}$$

$$= (2)^{n-1} x^n \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)_n \; {}_2F_1 \left[\begin{array}{ll} \frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}; & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{2} - n; & \end{array} \right]. \quad (4.3)$$

Applying the definition of Legendre's polynomials (1.9) in the equation (4.3), we get

$$\int_0^\infty t^n \exp(-t^2) H_n(xt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} n! P_n(x). \quad (4.4)$$

Curzon [6] and [11, p.191(eq.4), p.199(Q.N.4)] evaluated the integral I_7, by using a different approach.

5 Rainville's integral

Consider the fourth integral:

$$I_8 = \int_x^\infty t^{n+1} \exp(-t^2) P_n\left(\frac{x}{t}\right) dt. \quad (5.1)$$

Applying the definition of Legendre's polynomials (1.8) in the equation (5.1), we get

$$I_8 = \int_x^\infty t^{n+1} \exp(-t^2) \left(\frac{x}{t}\right)^n \; {}_2F_1 \left[\begin{array}{ll} \frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}; & \frac{x^2 - t^2}{x^2} \\ 1; & \end{array} \right] dt$$

$$= x^n \exp(-x^2) \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(\frac{-n}{2})_p (\frac{-n+1}{2})_p (x)^{-2p}}{(1)_p p!} \int_x^\infty \exp(-t^2 + x^2) t (x^2 - t^2)^p dt$$

$$= \frac{1}{2} x^n \exp(-x^2) \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(\frac{-n}{2})_p (\frac{-n+1}{2})_p (-1)^p (x)^{-2p}}{p! p!} \int_0^\infty \exp(-T) T^p dT, \quad (5.2)$$

where $(t^2 - x^2) = T$.
Using suitable substitution and applying the definition of Laplace transform (1.3) in the equation

(5.2), we get

$$\begin{aligned} I_8 &= \frac{1}{2}x^n \exp(-x^2)\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(\frac{-n}{2})_p(\frac{-n+1}{2})_p(-1)^p(x)^{-2p}}{p!} \\ &= \frac{1}{2}x^n \exp(-x^2)\,{}_2F_0\left[\begin{array}{c} \frac{-n}{2},\frac{-n+1}{2}; \\ \overline{}; \end{array} \;\frac{-1}{x^2}\right]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Applying the definition of classical Hermite's polynomials (1.7) in the equation (5.3), we get

$$\int_x^\infty t^{n+1}\exp(-t^2)P_n\left(\frac{x}{t}\right)dt = 2^{-n-1}\exp(-x^2)H_n(x). \tag{5.4}$$

Rainville [10, p.271] and [11, p.191(eq.5), p.199(Q.N.6)] evaluated the integral I_8, by using a different approach.

References

[1] P. Agarwal, S. Jain, S. Agarwal and M. Nagpal, *On a new class of integrals involving Bessel functions of the first kind*, Comm. Num. Ana., **2014** (2014), 1–7.

[2] J. Choi, P. Agarwal, S. Mathur and S.D. Purohit, *Certain new integral formulas involving the generalized Bessel functions*, Bull. Korean Math. Soc., **51**(4) (2014), 995–1003.

[3] J. Choi and P. Agarwal, *Certain unified integrals involving a product of Bessel functions of first kind*, Hon. Math. J., **35**(4) (2013), 667–677.

[4] J. Choi and P. Agarwal, *Certain Unified Integrals Associated with Bessel functions*, Boundary Value Problems, **95** (2013), 667–677.

[5] J. Choi, A. Hasanove, H. M. Srivastava and M. Turaev, *Integral representations for Srivastava's triple hypergeometric functions*, Taiwanese J. Math., **15**(6) (2011), 2751–2762.

[6] H.E.J. Curzon, *On a connection between the functions of Hermite and the functions of Legendre*, Proc. London Math. Soc., **12**(2) (1913), 236–259.

[7] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (6th ed.), CA: Academic Press Inc, San Diego (2000).

[8] R. Mathur, *Integral Representation of Exton's Triple Hypergeometric Series*, Int. J. Math. Ana., **6**(48) (2012), 2357–2360.

[9] M.I. Qureshi, M. Shadab and M.S. Baboo, *Evaluation of some novel integrals involving Legendre function of second kind using hypergeometric approach*, Palestine J. Math., **6**(1) (2017), 68–75.

[10] E.D. Rainville *Notes on Legendre polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc., **51** (1945), 268–271.

[11] E.D. Rainville, *Special Functions*, The Macmillan Co. Inc., New York (1960); Reprinted by Chelsea Publ. Co. Bronx, NewYork (1971).

Divulgaciones Matemáticas Vol. 18 No. 1 (2017), pp. 10–33

Generalized q-Mittag-Leffler function and its properties

Función q-Mittag-Leffler generalizada y sus propiedades

B. V. Nathwani (bharti.nathwani@yahoo.com,bidavemsu@yahoo.co.in)
Department of Mathematics, Faculty of Science,
The Maharaja Sayajirao University of Baroda, Vadodara-390 002, INDIA.

Abstract

Motivated essentially by the success of the applications of the Mittag-Leffler functions in Science and Engineering, we propose here a unification of certain q-extensions of generalizations of Mittag-Leffler function together with Saxena-Nishimoto's function, Bessel-Maitland function, Dotsenko function, Elliptic Function, etc. We obtain Mellin-Barnes contour integral representation, a q-difference equation, Eigen function property. As a specialization, a generalization of q-Konhauser polynomial is considered for which the series inequality relations and inverse series relations are obtained.

Key words and phrases: q-Mittag-Leffler function, q-Bessel function, q-difference equation, q-inverse series, eigen function, generalized q-Konhauser polynomial, series inequality relations.

Resumen

Motivados esencialmente por el éxito de las aplicaciones de las funciones de Mittag-Leffler en Ciencia e Ingeniería, proponemos aquí una unificación de ciertas q-extensiones de generalizaciones de la función de Mittag-Leffler incluyendo la función de Saxena-Nishimoto, la función de Bessel-Maitland, función de Dotsenko, función elíptica, etc. Obtenemos la representación integral de contorno de Mellin-Barnes, una ecuación de q-diferencia, propiedad de función Eigen. Como especialización, se considera un polinomio generalizado de q-Konhauser para el cual se obtienen las relaciones de desigualdad en serie y relaciones en serie inversa.

Palabras y frases clave: Función q-Mittag-Leffler, función q-Bessel, ecuación de q-diferencia, series q-inversas, función Eigen, polinomios q-Konhauser generalizados, relaciones de desigualdad en serie.

1 Introduction

Since the time of Wiman [18], many researchers have proposed and studied various generalizations of the Mittag-Leffler function (ML-function) [11] (also [5], [7], [12], [14], [15], [17]).

Received 06/01/17. Revised 27/04/17. Accepted 04/08/17.
MSC (2010): Primary 33B15; Secondary 33E12; 33E99.
Corresponding author: B. V. Nathwani

We propose here a generalized structure of the Mittag-Leffler function which provides a q-extension to the function:

$$E^{\gamma,q}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{qn} z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta) n!}, \tag{1}$$

due to Shukla and Prajapati [17], where $\Re(\alpha,\beta,\gamma)>0, q\in(0,1)\cup\mathbb{N}$.
Interestingly, the proposed function ((12) and (13) below) also enables us to define and include the q-analogues of

(i) Bessel-Maitland function [6, Eq.(1.7.8), p.19] :

$$J^{\mu}_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma(\nu+n\mu+1)\ n!},$$

(ii) Dotsenko function [6, Eq.(1.8.9), p.24] :

$${}_2R_1(a,b;c,\omega;\mu;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\frac{\omega}{\mu})}{\Gamma(c+n\frac{\omega}{\mu})} \frac{z^n}{n!},$$

(iii) A particular form ($m=2$) of extension of Mittag-Leffler function:

$$E_{\gamma,K}[(\alpha_j,\beta_j)_{1,2};z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{Kn}}{\Gamma(\alpha_1 n+\beta_1)\Gamma(\alpha_2 n+\beta_2) n!} z^n,$$

due to Saxena and Nishimoto [16], where

$$z,\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{C}, \Re(\alpha_1+\alpha_2) > \Re(K)-1, \Re(K)>0,$$

(iv) The Elliptic function [9, Eq.(1), p.211] :

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}; & k^2 \\ 1; & & \end{matrix} \right).$$

The following definitions and formulas will be used in this work. For $a\in\mathbb{C}$, and $0<|q|<1$, the q-shifted factorial is defined by [4, Eq.(1.2.15), p.3 and Eq.(1.2.30), p.6]

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1 & if \quad n=0 \\ (1-a)(1-aq)...(1-aq^{n-1}) & if \quad n\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}$$

For any n,

$$(a;q)_n = \frac{(q;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty},$$

where

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)\ , \quad |q|<1.$$

A q-binomial coefficient is (cf. [4, Ex.(1.2), p.20] with r=1):

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_r = \frac{(q^r;q^r)_n}{(q^r;q^r)_{n-m}\ (q^r;q^r)_m}, r \neq 0. \tag{3}$$

A q-Gamma function is defined as [4, Eq.(1.10.1), p.16]:

$$\Gamma_q(\alpha) \ = \ \frac{(q;q)_\infty\ (1-q)^{1-\alpha}}{(q^\alpha;q)_\infty}, \tag{4}$$

where $\alpha \neq 0, -1, -2, ...$ and $0 < q < 1$.

A q-Stirling's asymptotic formula [10, Eq.(2.25), p.482] is given by

$$\Gamma_q(x) \sim (1+q)^{\frac{1}{2}}\ \Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)\ (1-q)^{\frac{1}{2}-x}\ e^{\mu_q(x)}, \tag{5}$$

where $\mu_q(x) = \dfrac{\theta\ q^x}{1-q-q^x}$, $0 < \theta < 1$.

Theorem 1.1. *If $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is an entire function then the order $\varrho(f)$ of f is given by [2, Eq.(1.2)]*

$$\varrho(f) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{n\ \log n}{\log(1/|a_n|)}. \tag{6}$$

and the type of the function σ is given by [8]

$$e\varrho\sigma = \lim_{n\to\infty} \sup \left(n\,|a_n|^{\varrho/n}\right). \tag{7}$$

For every positive ϵ, the asymptotic estimate [8, Eq.(16)]

$$|f(z)| < exp\left((\sigma+\epsilon)\ |z|^\varrho\right),\ |z| \geq r_0 > 0 \tag{8}$$

holds with ϱ, σ as in (6), (7) for $|z| \geq r_0(\epsilon),\ r_0(\epsilon)$ sufficiently large.

The two q-exponential functions are defined as [4, Eq.(II.1), p.236]

$$e_q(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(x;q)_\infty},\ |x| < 1 \tag{9}$$

and [4, Eq.(II.2), p.236]

$$E_q(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{(q;q)_n} = (-x;q)_\infty,\ |x| < \infty. \tag{10}$$

The q-derivative of a function $f(x)$ is defined by [4, Ex.1.12, p.22]

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(xq)}{x(1-q)}. \tag{11}$$

In view of two q-analogues of exponential function, we define q-generalized Mittag-Leffler functions in the forms:

Definition 1.1. If $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) > 0,\ r \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{N},\ \delta, \mu > 0,\ s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ then

$$E^{\gamma,\delta}_{\alpha,\,\beta,\,\lambda,\,\mu}(z; s, r|q) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{pn}\ q^{pn(n-1)/2}\ [\Gamma_q(\gamma+\delta n)]^s}{\Gamma_q(\beta+\alpha n)\ [\Gamma_q(\lambda+\mu n)]^r\ (q;q)_n} z^n, \tag{12}$$

where $p = \alpha^2 + r\mu^2 - s\delta^2 + 1$ with $\Re(p) > 0$.

Definition 1.2. If $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) > 0,\ r \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{N}, \delta, \mu > 0,\ s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $\alpha^2 + r\mu^2 + 1 = s\delta^2$ then

$$e^{\gamma,\delta}_{\alpha,\,\beta,\,\lambda,\,\mu}(z; s, r|q) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\Gamma_q(\gamma+\delta n)]^s}{\Gamma_q(\beta+\alpha n)\ [\Gamma_q(\lambda+\mu n)]^r\ (q;q)_n} z^n. \tag{13}$$

Alternatively, in view of (4) these q-forms can also be put in the form:

$$\begin{aligned} E^{\gamma,\delta}_{\alpha,\,\beta,\,\lambda,\,\mu}(z; s, r|q) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{pn}\ q^{pn(n-1)/2}\ \frac{(q^{\alpha n+\beta};q)_\infty\ [(q^{\lambda+\mu n};q)_\infty]^r}{[(q^{\gamma+\delta n};q)_\infty]^s} \\ &\quad \times \frac{z^n}{(q;q)_n}, \end{aligned} \tag{14}$$

and

$$e^{\gamma,\delta}_{\alpha,\,\beta,\,\lambda,\,\mu}(z; s, r|q) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{\alpha n+\beta};q)_\infty\ [(q^{\lambda+\mu n};q)_\infty]^r}{[(q^{\gamma+\delta n};q)_\infty]^s\ (q;q)_n} z^n. \tag{15}$$

We shall refer to these functions as *q-gml*.

The objective of constructing this function is to:

(i) Include certain existing generalizations of Mittag-Leffler function.

(ii) Include Bessel-Maitland function, Dotsenko function, Saxena-Nishimoto function, Elliptic function.

(iii) Obtain inverse inequality relations and some other inequalities by means of the parameter "s".

The q-analogues of the above stated Shukla and Prajapati's function (1) and those functions listed above from (i) through (iv) are all yielded by the q-gml (12) or (13). They are tabulated below (see Table 1) together with the indicated substitutions.

The explicit forms of the functions mentioned in thi Table 1 are as stated below.

- q-Mittag-Leffler function:

$$E_\alpha(z|q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n\ q^{n(n-1)/2}\right]^{\alpha^2}\ (q^{\alpha n+1};q)_\infty\ z^n.$$

- q-Analogue of Wiman's function:

$$E_{\alpha,\beta}(z|q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n\ q^{n(n-1)/2}\right]^{\alpha^2}\ (q^{\alpha n+\beta};q)_\infty\ z^n.$$

q-Function of	**r**	**s**	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{\mu}$	**Particular case of**
Mittag-Leffler	0	1	α	1	1	1	-	-	(12)
Wiman	0	1	α	β	1	1	-	-	(12)
Prabhakar	0	1	α	β	γ	1	-	-	(12)
Shukla and Prajapati	0	1	α	β	γ	q	-	-	(12)
Bessel-Maitland	0	0	μ	$\nu+1$	-	-	-	-	(12)
Dotsenko	-1	1	ω/ν	c	a	1	b	ω/ν	(13)
Saxena-Nishimoto	1	1	α_1	β_1	γ	K	β_2	α_2	(12)
Elliptic	-1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	(13)

Table 1: q-Functions

- q-Analogue of Prabhakar's generalized ML-function:

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z|q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n\ q^{n(n-1)/2}\right]^{\alpha^2}\ (q^{\alpha n+\beta};q)_\infty}{(q^{\gamma+n};q)_\infty\ (q;q)_n}z^n.$$

- q-ML-function of Shukla and Prajapati (q is replaced by δ):

$$E^{\gamma,\delta}_{\alpha,\beta}(z|q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n\ q^{n(n-1)/2}\right]^{(\alpha^2-\delta^2+1)}\ (q^{\alpha n+\beta};q)_\infty}{(q^{\gamma+\delta n};q)_\infty\ (q;q)_n}z^n.$$

- q-Bessel-Maitland function:

$$J^{\mu}_{\nu}(-z;q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n\ q^{n(n-1)/2}\right]^{(\mu^2+1)}\ (q^{\mu n+\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_n}z^n.$$

(Later on, this will be referred to this as q-BMF)

- q-Dotsenko function:

$$_2R_1(a,b;c,\omega;\nu;z;q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{c+\frac{\omega}{\nu}n};q)_\infty}{(q^{b+\frac{\omega}{\nu}n};q)_\infty\ (q^{n+a};q)_\infty\ (q;q)_n}z^n.$$

- q-Form (of the particular case $m=2$) of the function due to Saxena and Nishimoto:

$$\begin{aligned}E_{\gamma,K}[(\alpha_j,\beta_j)_{1,2};z|q] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n\ q^{n(n-1)/2}\right]^{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-K^2+1)}}{(q^{\gamma+Kn};q)_\infty\ (q;q)_n}\\ &\quad\times(q^{\alpha_1 n+\beta_1};q)_\infty\ (q^{\alpha_2 n+\beta_2};q)_\infty\ z^n.\end{aligned}$$

(Later on, this will be referred to as q-SNF)

- q-Elliptic function:

$$K(\sqrt{z}|q) = \frac{\pi}{2}\ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}; & z \\ 1; & & \end{matrix}\right).$$

We first show the convergence of series in (12) and (13); this is followed by Mellin-Barnes integral representation, difference equation and eigen function property. As a special case of (12), a q-extension of the Konhauser polynomial is illustrated and, associated inequalities are established.

2 Main Results

In this section, we prove the following results.

2.1 Convergence

Theorem 2.1.1. *Let $0 < q < 1$, $\Re(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) > 0$, $\Re(\alpha^2) + r\mu^2 - s\delta^2 + 1 > 0$, $\delta, \mu > 0$, $r \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{C}$. Then $E^{\gamma,\delta}_{\alpha,\,\beta,\,\lambda,\,\mu}(z; s, r|q)$ is an entire function of order zero.*

Proof. Put

$$V_n = \frac{(-1)^{pn}\ q^{pn(n-1)/2}\ [\Gamma_q(\gamma + \delta n)]^s}{\Gamma_q(\beta + \alpha n)\ [\Gamma_q(\lambda + \mu n)]^r\ \Gamma_q(n+1)} \tag{16}$$

to get

$$E^{\gamma,\delta}_{\alpha,\,\beta,\,\lambda,\,\mu}(z; s, r|q) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n\ z^n.$$

Then in view of (5), we get after some simplification,

$$\begin{aligned} V_n \quad \sim \quad & \frac{(-1)^{pn}\ q^{pn(n-1)/2}\ (1+q)^{\frac{1}{2}(s-r-2)}\ (\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2}))^{s-r-2}\ (1-q)^{n+\frac{1}{2}}}{(1-q)^{-s(\frac{1}{2}-\gamma-\delta n)}\ (1-q)^{\frac{1}{2}-\beta-\alpha n}\ (1-q)^{r(\frac{1}{2}-\lambda-\mu n)}} \\ & \times e^{\frac{\theta q^{\gamma+\delta n}}{1-q-q^{\gamma+\delta n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{\beta+\alpha n}}{1-q-q^{\beta+\alpha n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{\lambda+\mu n}}{1-q-q^{\lambda+\mu n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{1+n}}{1-q-q^{1+n}}}. \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|V_n|} \quad \sim \quad & \left|\frac{(1+q)^{\frac{1}{2}(s-r-2)}\ (\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2}))^{(s-r-2)}\ (1-q)^{s(\frac{1}{2}-\gamma-\delta n)}\ (1-q)^{n+\frac{1}{2}}}{(1-q)^{\frac{1}{2}-\beta-\alpha n}\ (1-q)^{r(\frac{1}{2}-\lambda-\mu n)}}\right|^{\frac{1}{n}} \\ & \times \left| e^{\frac{\theta q^{\gamma+\delta n}}{1-q-q^{\gamma+\delta n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{\beta+\alpha n}}{1-q-q^{\beta+\alpha n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{\lambda+\mu n}}{1-q-q^{\lambda+\mu n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{1+n}}{1-q-q^{1+n}}}\right|^{\frac{1}{n}} \\ & \times \left|(-1)^p\ q^{p(n-1)/2}\right|. \end{aligned}$$

Making limit $n \to \infty$, this gives

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|V_n|} \sim \left|(1-q)^{\alpha + r\mu - s\delta + 1}\right| \lim_{n\to\infty} \left|q^{p(n-1)/2}\right| = 0$$

when $\Re(\alpha^2)+r\mu^2-s\delta^2+1>0$. Thus, the function (12) is an *entire* function. Its order may be determined by using Theorem 1.1. In fact, by choosing $f(z)=E^{\gamma,\delta}_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(z;s,r|q)$ and $u_n=V_n$, Theorem 1.1 gets particularized to

$$\varrho(E^{\gamma,\delta}_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(z;s,r|q))=\lim_{n\to\infty}\sup\frac{n\ \log n}{\log(1/|V_n|)},$$

where

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{|V_n|}\right) &= \log\left(\left|\frac{\Gamma_q(\beta+\alpha n)\ [\Gamma_q(\lambda+\mu n)]^r\ \Gamma_q(n+1)}{q^{n(n-1)(\alpha^2+r\mu^2-s\delta^2+1)/2}\ [\Gamma_q(\gamma+\delta n)]^s}\right|\right)\\ &= \log|\Gamma_q(\alpha n+\beta)+r\log|\Gamma_q(\lambda+\mu n)|\\ &\quad +\log|\Gamma_q(n+1)|-\frac{1}{2}n(n-1)[\Re(\alpha^2+r\mu^2-s\delta^2+1)]\log q\\ &\quad -s\log|\Gamma_q(\gamma+\delta n)|.\end{aligned}\tag{17}$$

From the definition (4) of q-Gamma function, one finds

$$\begin{aligned}\log|\Gamma_q(\alpha n+\beta)| &= \log\left|\frac{(q;q)_\infty}{(q^{\alpha n+\beta};q)_\infty}(1-q)^{1-\alpha n-\beta}\right|\\ &= \log\left|\frac{(q;q)_\infty}{(q^{\alpha n+\beta};q)_\infty}\right|(1-q)^{1-n\Re(\alpha)-\Re(\beta)}\\ &= \log|(q;q)_\infty|+(1-n\Re(\alpha)-\Re(\beta))\log(1-q)\\ &\quad -\log\left|(q^{\alpha n+\beta};q)_\infty\right|;\end{aligned}\tag{18}$$

in which

$$\begin{aligned}\log\left|(q^{\alpha n+\beta};q)_\infty\right| &= \log\left(\prod_{k=0}^{\infty}\left|1-q^{\alpha n+\beta+k}\right|\right)\\ &= \log\left(\lim_{m\to\infty}\prod_{k=0}^{m}\left|1-q^{\alpha n+\beta+k}\right|\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\log\left|1-q^{\alpha n+\beta+k}\right|\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\log\left|1-q^{\alpha n+\beta+k}\right|.\end{aligned}$$

Here it may be noted that [2, p.207]

$$\log\left|1-q^{\alpha n+\beta+k}\right|\le\log(1+\left|q^{\alpha n+\beta+k}\right|)\le\left|q^{\alpha n+\beta+k}\right|=q^{n\Re(\alpha+\beta)+k}$$

which leads us to

$$\sum_{k=0}^{\infty}\log\left|1-q^{\alpha n+\beta+k}\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}q^{n\Re(\alpha+\beta)+k}=\frac{q^{n\Re(\alpha+\beta)}}{1-q}.$$

This implies that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left|(q^{\alpha n+\beta};q)_\infty\right|}{n\ \log n}=0.$$

Consequently from (18), it follows that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|\Gamma_q(\alpha n+\beta)|}{n\ \log n}=0.$$

This last limit and the trivial limit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\log n}=\infty$$

when used in (17), yields

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1/|V_n|)}{n\log n}=\infty.$$

Thus,

$$\varrho(E^{\gamma,\delta}_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(z;s,r|q))=0.$$

□

Theorem 2.1.2. *The function* $e^{\gamma,\delta}_{\alpha,\,\beta,\,\lambda,\,\mu}(z;s,r|q)$ *represents absolutely convergent series for* $|z|<\left|(1-q)^{(s\delta-\alpha-r\mu-1)}\right|$ *and* $|q|<1$.

Proof. Take

$$U_n=\frac{[\Gamma_q(\gamma+\delta n)]^s}{\Gamma_q(\beta+\alpha n)\ [\Gamma_q(\lambda+\mu n)]^r\ \Gamma_q(n+1)} \tag{19}$$

then

$$e^{\gamma,\delta}_{\alpha,\,\beta,\,\lambda,\,\mu}(z;s,r|q)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n\ z^n.$$

Now in view of the q- analogue of Stirling's asymptotic formula (5), we get

$$\begin{aligned}U_n\quad\sim\quad&\frac{(1+q)^{\frac{1}{2}(s-r-2)}\ (\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2}))^{s-r-2}\ (1-q)^{n+\frac{1}{2}}}{(1-q)^{-s(\frac{1}{2}-\gamma-\delta n)}\ (1-q)^{\frac{1}{2}-\beta-\alpha n}\ (1-q)^{r(\frac{1}{2}-\lambda-\mu n)}}\\&\times e^{\frac{\theta q^{\gamma+\delta n}}{1-q-q^{\gamma+\delta n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{\beta+\alpha n}}{1-q-q^{\beta+\alpha n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{\lambda+\mu n}}{1-q-q^{\lambda+\mu n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{1+n}}{1-q-q^{1+n}}}.\end{aligned}$$

This gives

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|U_n|}\quad\sim\quad&\left|\frac{(1+q)^{\frac{1}{2}(s-r-2)}\ (\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2}))^{(s-r-2)}\ (1-q)^{s(\frac{1}{2}-\gamma-\delta n)}\ (1-q)^{n+\frac{1}{2}}}{(1-q)^{\frac{1}{2}-\beta-\alpha n}\ (1-q)^{r(\frac{1}{2}-\lambda-\mu n)}}\right|^{\frac{1}{n}}\\&\times\left|e^{\frac{\theta q^{\gamma+\delta n}}{1-q-q^{\gamma+\delta n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{\beta+\alpha n}}{1-q-q^{\beta+\alpha n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{\lambda+\mu n}}{1-q-q^{\lambda+\mu n}}}\ e^{-\frac{\theta q^{1+n}}{1-q-q^{1+n}}}\right|^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

whence

$$\frac{1}{R} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n|} \sim \left|(1-q)^{\alpha+r\mu-s\delta+1}\right|.$$

Thus, the series in (13) converges absolutely if $|z| < R = (1-q)^{s\delta-\Re(\alpha)-r\mu-1}$. □

2.2 Contour integral

Theorem 2.2.1. *Let $\alpha > 0; \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ with $\Re(\beta,\gamma,\lambda) > 0$ and $\delta,\ \mu > 0$. Then the function $E^{\gamma,\,\delta}_{\alpha,\,\beta,\,\lambda,\,\mu}\,(z;s,r|q)$ is expressible as the Mellin - Barnes q-integral given by*

$$E^{\gamma,\,\delta}_{\alpha,\,\beta,\,\lambda,\,\mu}\,(z;s,r|q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{(-1)^{-pS}\ q^{-pS(-S-1)/2}\ \Gamma_q(S)\ [\Gamma_q(\gamma-\delta S)]^s}{\Gamma_q(\beta-\alpha S)\ [\Gamma_q(\lambda-\mu S)]^r} \times (-z)^{-S}\ \mathrm{d}_q S, \quad (20)$$

where $|argz| < \pi$. The contour L of integration begins from $-i\infty$ and proceeds towards $+i\infty$, and is indented to keep the poles of integrand at $S = -n$ to the left; and the poles at $S = (\gamma+n)/\delta$ to the right of the path for all $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Proof. The integral on the right hand side of (20) may be evaluated as the sum of the residues at the poles $S = 0, -1, -2, \ldots$. In fact, in view of the definition of residue,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{(-1)^{-pS}\ q^{-pS(-S-1)/2}\ \Gamma_q(S)\ [\Gamma_q(\gamma-\delta S)]^s\ (-z)^{-S}}{\Gamma_q(\beta-\alpha S)\ [\Gamma_q(\lambda-\mu S)]^r}\ \mathrm{d}_q S \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underset{S=-n}{Res} \left[\frac{(-1)^{-pS}\ q^{-pS(-S-1)/2}\ \Gamma_q(S)\ (-z)^{-S}}{\Gamma_q(\beta-\alpha S)\ [\Gamma_q(\lambda-\mu S)]^r\ [\Gamma_q(\gamma-\delta S)]^{-s}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{S\to -n} \frac{\pi(S+n)}{sin\pi S} \frac{(-1)^{-pS}\ q^{-pS(-S-1)/2}\ [\Gamma_q(\gamma-\delta S)]^s\ (-z)^{-S}}{\Gamma_q(\beta-\alpha S)\ [\Gamma_q(\lambda-\mu S)]^r\ \Gamma_q(1-S)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{pn}\ q^{pn(n-1)/2}\ [\Gamma_q(\gamma+\delta n)]^s}{\Gamma_q(\beta+\alpha n)\ [\Gamma_q(\lambda+\mu n)]^r\ \Gamma_q(n+1)} z^n \\
&= E^{\gamma,\delta}_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(z;s,r|q).
\end{aligned}$$

□

By dropping the factor $q^{N(N-1)/2}$ in this proof, we get

Theorem 2.2.2. *Let $\alpha \in \mathbb{R}_+; \beta,\ \gamma,\ \lambda \in \mathbb{C}$, with $\Re(\beta,\gamma,\lambda) > 0$ and $\delta,\ \mu > 0$. Then the function $e^{\gamma,\,\delta}_{\alpha,\,\beta,\,\lambda,\,\mu}\,(z;s,r|q)$ is expressible as the Mellin - Barnes q-integral given by*

$$e^{\gamma,\delta}_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(z;s,r|q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Gamma_q(S)\ [\Gamma_q(\gamma-\delta S)]^s\ (-z)^{-S}}{\Gamma_q(\beta-\alpha S)\ [\Gamma_q(\lambda-\mu S)]^r}\ \mathrm{d}_q S, \quad (21)$$

where $|argz| < \pi$; the contour L of integration begins from $-i\infty$ and proceeds towards $+i\infty$, and is indented to keep the poles of integrand at $S = -n$ to the left; and the poles at $S = (\gamma+n)/\delta$ to the right of the path, for all $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

2.3 Difference equation

With the aid of the following operators, the difference equations of both the q-analogues will be derived. Put

$$\Lambda_q f(x) = f(x) - f(xq^{-1}), \quad \Theta f(x) = f(x) - f(xq), \tag{22}$$

$$\mathcal{D}_q\ f(x) = (1-q)\ D_q f(x) := (1-q)\ \frac{f(x) - f(xq)}{x - xq} = \frac{f(x) - f(xq)}{x}, \tag{23}$$

$$\frac{\left\{\prod_{u=0}^{a-1}\prod_{v=0}^{a-1}[\Theta + c^{-u}q^{1-(b+v)/a} - 1]^m\right\}}{\left\{\prod_{u=0}^{a-1}\prod_{v=0}^{a-1}[c^{-u}q^{1-(b+v)/a}]^m\right\}} = \Phi_{u,v}^{(a,b,c;m)} \tag{24}$$

and

$$\frac{\left\{\prod_{u=0}^{a-1}\prod_{v=0}^{a-1}[\Theta + c^{-u}q^{(b+v)/a} - 1]^m\right\}}{\left\{\prod_{u=0}^{a-1}\prod_{v=0}^{a-1}[c^{-u}q^{-(b+v)/a}]^m\right\}} = \Psi_{u,v}^{(a,b,c;m)}. \tag{25}$$

In these notations, the q-difference equation satisfied by (12) is derived in the following theorem.

Theorem 2.3.1. *Let $\alpha, \mu, \delta \in \mathbb{N}$, then $E_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}^{\gamma,\delta}(z;s,r|q)$ satisfies the equation*

$$\begin{aligned}&\left[\Phi_{\ell,k}^{(\mu,\lambda,\eta;r)}\ \Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)}\ \Theta\right] E_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}^{\gamma,\delta}(z;s,r|q)\\ &-\left[(-1)^p\ z\ \Psi_{j,i}^{(\delta,\gamma,\zeta;s)}\right] E_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}^{\gamma,\delta}(zq^p;s,r|q) = 0,\end{aligned} \tag{26}$$

in which ζ is δ^{th} root of unity, η is μ^{th} root of unity, σ is α^{th} root of unity.

Proof. In the first place, the coefficient of z^n in the series representation of $E_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}^{\gamma,\delta}(z;s,r|q)$ will be expressed in q-factorial notation with the help of the set of formulas [4, Appendix I]:

$$(a;q)_{kn} = (a, aq, \dots, aq^{k-1}; q^k)_n,$$

$$(a^k;q^k)_n = (a, a\omega_k, \dots, a\omega_k^{k-1}; q^k)_n \text{ in which } \omega_k = e^{(2\pi i)/k},$$

$$(A;q^n)_{\nu k} = (A^{1/n};q)_{\nu k}\ (A^{1/n}\omega;q)_{\nu k} \dots (A^{1/n}\omega^{n-1};q)_{\nu k}, \text{ where } \omega^n = 1,$$

and

$$(q^\gamma;q^\delta)_n = (q^{\gamma/\delta};q)_n\ (\varpi q^{\gamma/\delta};q)_n \dots (\varpi^{\delta-1}q^{\gamma/\delta};q)_n = \prod_{i=0}^{\delta-1}(\varpi^i q^{\gamma/\delta};q)_n,$$

where $\varpi^\delta = 1$. Then following the notation used in (16) for the coefficient of z^n, we get

$$V_n \quad = \quad \frac{(-1)^{pn}\ q^{pn(n-1)/2}\ [(q^\gamma;q)_{\delta n}]^s}{[(q^\lambda;q)_{\mu n}]^r\ (q^\beta;q)_{\alpha n}\ (q;q)_n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{pn}\ q^{pn(n-1)/2}\ [(q^{\gamma};q)_{\delta n}]^{s}}{[(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^{r}\ (q^{\beta};q)_{\alpha n}\ (q;q)_{n}} \\
&= \frac{(-1)^{pn}\ q^{pn(n-1)/2}\ [(q^{\gamma};q^{\delta})_{n}]^{s}\ [(q^{\gamma+1};q^{\delta})_{n}]^{s}\cdots[(q^{\gamma+\delta-1};q^{\delta})_{n}]^{s}}{[(q^{\lambda};q^{\mu})_{n}]^{r}\ [(q^{\lambda+1};q^{\mu})_{n}]^{r}\cdots[(q^{\lambda+\mu-1};q^{\mu})_{n}]^{r}} \\
&\quad \times \frac{1}{(q^{\beta};q^{\alpha})_{n}\ (q^{\beta+1};q^{\alpha})_{n}\cdots(q^{\beta+\alpha-1};q^{\alpha})_{n}(q;q)_{n}} \\
&= \frac{(-1)^{pn}\ q^{pn(n-1)/2}}{(q;q)_{n}}\ \left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\eta^{\ell}\ q^{(\lambda+k)/\mu};q)_{n}]^{r}\right\}^{-1} \\
&\quad \times\left\{\prod_{j=0}^{\delta-1}\ \prod_{i=0}^{\delta-1}[(\zeta^{j}\ q^{(\gamma+i)/\delta};q)_{n}]^{s}\right\}\left\{\prod_{h=0}^{\alpha-1}\prod_{m=0}^{\alpha-1}(\sigma^{h}\ q^{(\beta+m)/\alpha};q)_{n}\right\}^{-1} \qquad (27)
\end{aligned}
$$

where ζ is δ^{th} root of unity, η is μ^{th} root of unity, σ is α^{th} root of unity. Now take

$$\prod_{j=0}^{\delta-1}\ \prod_{i=0}^{\delta-1}[(\zeta^{j}\ q^{(\gamma+i)/\delta};q)_{n}]^{s}=\mathcal{A}_{n},\ \prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\eta^{\ell}\ q^{(\lambda+k)/\mu};q)_{n}]^{r}=\mathcal{B}_{n}, \qquad (28)$$

and

$$\prod_{h=0}^{\alpha-1}\prod_{m=0}^{\alpha-1}(\sigma^{h}\ q^{(\beta+m)/\alpha};q)_{n}=\mathcal{C}_{n},\ (-1)^{pn}\ q^{pn(n-1)/2}=D_{n} \qquad (29)$$

then

$$\sum_{n=0}^{\infty}V_{n}\ z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{n}\ D_{n}}{\mathcal{B}_{n}\ \mathcal{C}_{n}\ (q;q)_{n}}z^{n}=W, \quad \text{say.}$$

Since the series in (12) converges, we have

$$\Theta W=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{n}\ D_{n}\ \Theta z^{n}}{\mathcal{B}_{n}\ \mathcal{C}_{n}\ (q;q)_{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{n}\ D_{n}}{\mathcal{B}_{n}\ \mathcal{C}_{n}}\frac{1-q^{n}}{(q;q)_{n}}z^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{n}\ D_{n}}{\mathcal{B}_{n}\ \mathcal{C}_{n}}\frac{z^{n}}{(q;q)_{n-1}}.$$

Next operating by $\Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)}$, we get

$$
\begin{aligned}
\Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)}\Theta\ W &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{n}\ D_{n}}{\mathcal{B}_{n}\ (q;q)_{n-1}}\frac{\left\{\prod\limits_{h=0}^{\alpha-1}\prod\limits_{m=0}^{\alpha-1}(\Theta+\sigma^{-h}q^{1-(\beta+m)/\alpha}-1)\right\}}{\left\{\prod\limits_{h=0}^{\alpha-1}\prod\limits_{m=0}^{\alpha-1}(\sigma^{-h}q^{1-(\beta+m)/\alpha})\right\}} \\
&\quad \times\frac{z^{n}}{\left\{\prod\limits_{h=0}^{\alpha-1}\prod\limits_{m=0}^{\alpha-1}(\sigma^{h}q^{(\beta+m)/\alpha};q)_{n}\right\}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{n}\ D_{n}}{\mathcal{B}_{n}\ (q;q)_{n-1}}\frac{\left\{\prod\limits_{h=0}^{\alpha-1}\prod\limits_{m=0}^{\alpha-1}(1-\sigma^{h}q^{n-1+(\beta+m)/\alpha})\right\}}{\left\{\prod\limits_{h=0}^{\alpha-1}\prod\limits_{m=0}^{\alpha-1}(\sigma^{h}q^{(\beta+m)/\alpha};q)_{n}\right\}}z^{n}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_n \; D_n}{\mathcal{B}_n \; \mathcal{C}_{n-1} \; (q;q)_{n-1}} z^n.$$

Finally,

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\ell,k}^{(\mu,\lambda,\eta;r)} \; \Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)} \; \Theta W \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_n \; D_n}{\mathcal{C}_{n-1} \; (q;q)_{n-1}} \frac{1}{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\eta^{-\ell} q^{1-(\lambda+k)/\mu})]^r\right\}} \\
&\times \frac{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\Theta+\eta^{-\ell} q^{1-(\lambda+k)/\mu}-1)]^r\right\}}{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\eta^{\ell} \; q^{(\lambda+k)/\mu};q)_n]^r\right\}} \; z^n \\
= \;& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_n \; D_n}{\mathcal{C}_{n-1} \; (q;q)_{n-1}} \frac{1}{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\eta^{-\ell} q^{1-(\lambda+k)/\mu})]^r\right\}} \\
&\times \frac{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(-q^n+\eta^{-\ell} q^{1-(\lambda+k)/\mu})]^r\right\}}{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\eta^{\ell} \; q^{(\lambda+k)/\mu};q)_n]^r\right\}} \; z^n \\
= \;& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_n \; D_n}{\mathcal{B}_{n-1} \; \mathcal{C}_{n-1} \; (q;q)_{n-1}} z^n.
\end{aligned}$$

Thus,

$$\Phi_{\ell,k}^{(\mu,\lambda,\eta;r)} \; \Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)} \; \Theta W \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{n+1} \; D_{n+1}}{\mathcal{B}_n \; \mathcal{C}_n \; (q;q)_n} z^{n+1}. \tag{30}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}
&\Psi_{j,i}^{(\delta,\gamma,\zeta;s)} \; E_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}^{\gamma,\delta}(zq^p;s,r|q) \\
= \;& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_n \; D_n \; q^{pn}}{\mathcal{B}_n \; \mathcal{C}_n \; (q;q)_n} \frac{\left\{\prod_{j=0}^{\delta-1}\prod_{i=0}^{\delta-1}[(\Theta+\zeta^{-j} q^{-(\gamma+i)/\delta}-1)]^s\right\}}{\left\{\prod_{j=0}^{\delta-1}\prod_{i=0}^{\delta-1}[(\zeta^{-j} q^{-(\gamma+i)/\delta})]^s\right\}} z^n \\
= \;& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n \; q^{pn}}{\mathcal{B}_n \; \mathcal{C}_n \; (q;q)_n} \left\{\prod_{j=0}^{\delta-1}\prod_{i=0}^{\delta-1}[(\zeta^{j} \; q^{(\gamma+i)/\delta};q)_n]^s\right\} \\
&\times \left\{\prod_{j=0}^{\delta-1}\prod_{i=0}^{\delta-1}[(1-\zeta^{j} q^{n+(\gamma+i)/\delta})]^s\right\} z^n,
\end{aligned}$$

that is,

$$z\ (-1)^p\ \Psi_{j,i}^{(\delta,\gamma,\zeta;s)}\ \ E_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}^{\gamma,\delta}(zq^p;s,r|q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{n+1}\ D_{n+1}}{\mathcal{B}_n\ \mathcal{C}_n\ (q;q)_n}z^{n+1}. \tag{31}$$

On comparing (30) and (31), the equation (26) is obtained. □

The q-difference equation satisfied by the function (13) is given in following theorem whose proof follows line-to-line just dropping the factor $q^{n(n-1)/2}$ that is, dropping D_n in (29).

Theorem 2.3.2. *Let $\alpha,\mu,\delta\in\mathbb{N}$, then $Y=e_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}^{\gamma,\delta}(z;s,r|q)$ satisfies the equation*

$$\left[\Phi_{\ell,k}^{(\mu,\lambda,\eta;r)}\ \Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)}\ \Theta - z\ \Psi_{j,i}^{(\delta,\gamma,\zeta;s)}\right]Y=0, \tag{32}$$

where ζ is δ^{th} root of unity, η is μ^{th} root of unity, σ is α^{th} root of unity.

2.4 Eigen function property

Take

$$\frac{\prod_{u=0}^{a-1}\prod_{v=0}^{a-1}[(\Lambda_q+c^{-u}q^{1-(b+v)/a}-1)]^m}{\left\{\prod_{u=0}^{a-1}\prod_{v=0}^{a-1}[c^{-u}q^{1-(b+v)/a}]^m\right\}}=\Omega_{u,v}^{(a,b,c;m)}, \tag{33}$$

and

$$\Delta_q=\mathcal{D}_q\ \Omega_{j,i}^{(\delta,\gamma,\zeta;-s)}\ \Phi_{\ell,k}^{(\mu,\lambda,\eta;r)}\ \Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)}. \tag{34}$$

Here the operators $\Omega_{j,i}^{(\delta,\gamma,\zeta;-s)}, \Phi_{\ell,k}^{(\mu,\lambda,\eta;r)}, \Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)}$ in (34) are not commutative with the operator $\mathcal{D}_q$. This property does not hold for the function $E_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}^{\gamma,\delta}(z;s,r|q)$, but it is established for the function $e_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}^{\gamma,\delta}(z;s,r|q)$ in

Theorem 2.4.1. *Let $\alpha,\mu,\delta\in\mathbb{N}$ and the q-difference operator Θ be defined by (22), then $e_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}^{\gamma,\delta}(z;s,r|q)$ is an eigen function with respect to the operator Δ_q defined by (34). That is, for any non zero c,*

$$\Delta_q\ e_{\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu}^{\gamma,\delta}(cz;s,r|q)=c\ e_{\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu}^{\gamma,\delta}(cz;s,r|q). \tag{35}$$

Proof. With $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ and $\mathcal{C}_n$ as in (28) and in (29),

$$e_{\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu}^{\gamma,\delta}(cz;s,r|q)\ \ =\ \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n\ \mathcal{A}_n}{\mathcal{B}_n\ \mathcal{C}_n\ (q;q)_n}z^n.$$

Now if $e_{\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu}^{\gamma,\delta}(cz;s,r|q)=Y_c$ then in the notation (24),

$$\Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)}\ Y_c\ \ =\ \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n\ \mathcal{A}_n}{\mathcal{B}_n\ (q;q)_n}\frac{\left\{\prod_{h=0}^{\alpha-1}\prod_{m=0}^{\alpha-1}(\Theta+\sigma^{-h}q^{1-(\beta+m)/\alpha}-1)\right\}}{\left\{\prod_{h=0}^{\alpha-1}\prod_{m=0}^{\alpha-1}(\sigma^{-h}q^{1-(\beta+m)/\alpha})\right\}}$$

$$\times \frac{z^n}{\left\{\prod_{h=0}^{\alpha-1}\prod_{m=0}^{\alpha-1}(\sigma^h q^{(\beta+m)/\alpha};q)_n\right\}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n\ \mathcal{A}_n}{\mathcal{B}_n\ (q;q)_n} \frac{\left\{\prod_{h=0}^{\alpha-1}\prod_{m=0}^{\alpha-1}(1-\sigma^h q^{n-1+(\beta+m)/\alpha})\right\}}{\left\{\prod_{h=0}^{\alpha-1}\prod_{m=0}^{\alpha-1}(\sigma^h q^{(\beta+m)/\alpha};q)_n\right\}} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n\ \mathcal{A}_n}{\mathcal{B}_n\ \mathcal{C}_{n-1}\ (q;q)_n} z^n.$$

Next

$$\begin{aligned}
\Phi_{\ell,k}^{(\mu,\lambda,\eta;r)}\ \Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)}\ Y_c &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n\ \mathcal{A}_n}{\mathcal{C}_{n-1}\ (q;q)_n} \frac{1}{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\eta^\ell\ q^{(\lambda+k)/\mu};q)_n]^r\right\}} \\
&\quad \times \frac{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\Theta+\eta^{-\ell}q^{1-(\lambda+k)/\mu}-1)]^r\right\}}{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\eta^{-\ell}q^{1-(\lambda+k)/\mu})]^r\right\}}\ z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n\ \mathcal{A}_n}{\mathcal{C}_{n-1}\ (q;q)_n} \frac{1}{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\eta^{-\ell}q^{1-(\lambda+k)/\mu})]^r\right\}} \\
&\quad \times \frac{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(-q^n+\eta^{-\ell}q^{1-(\lambda+k)/\mu})]^r\right\}}{\left\{\prod_{\ell=0}^{\mu-1}\prod_{k=0}^{\mu-1}[(\eta^\ell\ q^{(\lambda+k)/\mu};q)_n]^r\right\}}\ z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n\ \mathcal{A}_n}{\mathcal{B}_{n-1}\ \mathcal{C}_{n-1}\ (q;q)_n} z^n.
\end{aligned}$$

Further using (33),

$$\begin{aligned}
\Omega_{j,i}^{(\delta,\gamma,\zeta;-s)}\Phi_{\ell,k}^{(\mu,\lambda,\eta;r)}\Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)}Y_c &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\mathcal{B}_{n-1}\ \mathcal{C}_{n-1}\ (q;q)_n} \\
&\quad \times \frac{\left\{\prod_{j=0}^{\delta-1}\prod_{i=0}^{\delta-1}[(\zeta^{-j}q^{1-(\gamma+i)/\delta})]^s\right\}}{\left\{\prod_{j=0}^{\delta-1}\prod_{i=0}^{\delta-1}[(\Delta_q+\zeta^{-j}q^{1-(\gamma+i)/\delta}-1)]^s\right\}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left\{\prod_{j=0}^{\delta-1}\prod_{i=0}^{\delta-1}[(\zeta^j\ q^{(\gamma+i)/\delta};q)_n]^s\right\}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{\mathcal{B}_{n-1}\ \mathcal{C}_{n-1}\ (q;q)_n}\\
&\times\frac{\left\{\prod_{j=0}^{\delta-1}\prod_{i=0}^{\delta-1}[(\zeta^{-j}q^{1-(\gamma+i)/\delta})]^s\right\}}{\left\{\prod_{j=0}^{\delta-1}\prod_{i=0}^{\delta-1}[(-q^n+\zeta^{-j}q^{1-(\gamma+i)/\delta})]^s\right\}}\\
&\times\left\{\prod_{j=0}^{\delta-1}\prod_{i=0}^{\delta-1}[(\zeta^j\ q^{(\gamma+i)/\delta};q)_n]^s\right\}\ z^n\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n\ \mathcal{A}_{n-1}}{\mathcal{B}_{n-1}\ \mathcal{C}_{n-1}\ (q;q)_n}z^n.
\end{aligned}
$$

Finally,

$$
\begin{aligned}
\Delta_q\ Y_c &= \mathcal{D}_q\ \Omega_{j,i}^{(\delta,\gamma,\zeta;-s)}\ \Phi_{\ell,k}^{(\mu,\lambda,\eta;r)}\ \Phi_{h,m}^{(\alpha,\beta,\sigma;1)}\ Y_c\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n\ \mathcal{A}_{n-1}\ z^{n-1}}{\mathcal{B}_{n-1}\ \mathcal{C}_{n-1}(q;q)_{n-1}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^{n+1}\ \mathcal{A}_n}{\mathcal{B}_n\ \mathcal{C}_n\ (q;q)_n}z^n\\
&= c\ e_{\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu}^{\gamma,\delta}(cz;s,r|q).
\end{aligned}
$$

□

2.5 Generalized q-Konhauser polynomial

The well known q-Konhauser polynomial [1]

$$
Z_m^{\beta}(x;k|q)=\frac{[q^{\beta+1}]_{km}}{(q^k;q^k)_m}\sum_{n=0}^{m}\frac{q^{kn(kn-1)/2+kn(m+\beta+1)}(q^{-mk};q^k)_n}{[q^{\beta+1}]_{kn}\ (q^k;q^k)_n}\ x^{kn}, \tag{36}
$$

with $\Re(\mu)>-1$, admits a generalization by means of the q-*gml* (12) by taking $\alpha,\delta,\mu,r,s\in\mathbb{N}$, $\gamma=$ a negative integer: $-m$, replacing β by $\beta+1$, and z by a real variable x^k, $k\in\mathbb{N}$, and denoting the polynomial thus obtained by $B_{n^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;s,r)$ as follows.

Definition 2.5.1. For $\alpha,\beta,\lambda>0$, $m,\delta,\mu,k,s\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $m^*=\lfloor\frac{m}{\delta}\rfloor$, the greatest integer part of $\frac{m}{\delta}$, define

$$
\begin{aligned}
B_{m^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;s,r|q) &= \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha m}}{[(q^k;q^k)_m]^s}\sum_{n=0}^{m^*}\frac{q^{sk\delta n(m+(\delta nk-1)/2)+\delta n(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^\lambda;q)_{\mu n}]^r}\\
&\quad\times\frac{[(q^{-mk};q^k)_{\delta n}]^s}{(q^k;q^k)_n}\ x^{kn}.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Note 1. Here (36) is a particular case $s = 1, r = 0, \delta = 1$, and $\alpha = k$ of (37).

The presence of parameter "s" yields the *unusual* inverse series relations involving the inequalities. In fact, for $s = 1$ the usual inverse series relations occur whereas for other values of s the inverse inequality relations occur. This is shown in the following theorems.

If the real functions $F(x, n; s|q)$, $G(x, n; s|q)$, are such that

$$F(x,n;s|q) < B_{n^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;s,r|q),\ G(x,n;s|q) > B_{n^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;s,r|q),$$

then there hold the following inequality relations.

Theorem 2.5.1. *Let $F(x, n; s|q)$ and $G(x, n; s|q)$ be real valued functions, $\alpha, \beta, \lambda > 0$, and $\mu, k, s \in \mathbb{N}$, $r, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $n^* = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$, then*

$$F(x,n;s|q) < B_{n^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;s,r|q) \tag{38}$$

implies

$$\begin{aligned} x^{kn} &> q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-skmn(kmn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^r\ (q^k;q^k)_n}{[(q^k;q^k)_{mn}]^s} \\ &\times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{skj}\ [(q^{-kmn};q^k)_j]^s}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} F(x,j;s|q); \end{aligned} \tag{39}$$

and

$$\begin{aligned} x^{kn} &< q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-skmn(kmn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^r\ (q^k;q^k)_n}{[(q^k;q^k)_{mn}]^s} \\ &\times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{skj}\ [(q^{-kmn};q^k)_j]^s}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} G(x,j;s|q) \end{aligned} \tag{40}$$

implies

$$G(x,n;s|q) \quad > \quad B_{n^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;s,r|q). \tag{41}$$

Proof. Assume that the inequality (38) holds. Putting

$$\begin{aligned} \omega_n &= q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-skmn(kmn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^r\ (q^k;q^k)_n}{[(q^k;q^k)_{mn}]^s} \\ &\times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{skj}\ [(q^{-kmn};q^k)_j]^s}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} F(x,j;s|q), \end{aligned}$$

and substituting the series inequality (38) for $F(x, j; s|q)$, one gets

$$\begin{aligned} \omega_n &< q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-skmn(kmn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^r\ (q^k;q^k)_n}{[(q^k;q^k)_{mn}]^s} \\ &\times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{skj}\ [(q^{-kmn};q^k)_j]^s}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}}{[(q^k;q^k)_j]^s} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} \frac{q^{s(kmi(kmi-1)/2+kmij)+mi(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)}[(q^{-kj};q^k)_{mi}]^s\ x^{ki}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^\lambda;q)_{\mu i}]^r\ (q^k;q^k)_i} \\
= \quad & q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-skmn(mn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^\lambda;q)_{\mu n}]^r\ (q^k;q^k)_n}{[(q^k;q^k)_{mn}]^s} \\
&\times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{skj}\ (-1)^{sj} q^{skj(j-1)/2-skmnj}\ \left[(q^k;q^k)_{mn}\right]^s}{\left[(q^k;q^k)_{mn-j}\right]^s (q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} \\
&\times \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}}{((q^k;q^k)_j)^s} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} \frac{(-1)^{smi}\ q^{s(kmi(kmi-1)/2+kmij)+mi(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)}}{\left[(q^k;q^k)_{j-mi}\right]^s (q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^\lambda;q)_{\mu i}]^r} \\
&\times \frac{q^{skmi(kmi-1)/2-skjmi}\left((q^k;q^k)_j\right)^s\ x^{ki}}{(q^k;q^k)_i} \\
= \quad & \sum_{j=0}^{mn}\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} \frac{(-1)^{sj+smi}\ q^{s(kmi(kmi-1)/2+kmij)+mi(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)}}{\left[(q^k;q^k)_{j-mi}\right]^s \left[(q^k;q^k)_{mn-j}\right]^s} \\
&\times \frac{q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-skmn(kmn-1)/2+skmi(mi-1)/2-skjmi}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^\lambda;q)_{\mu i}]^r\ (q^k;q^k)_i} \\
&\times q^{skj+skj(j-1)/2-skmnj}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^\lambda;q)_{\mu n}]^r\ (q^k;q^k)_n\ x^{ki}.
\end{aligned}
$$

Now in view of the double series relation

$$
\sum_{i=0}^{mn}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{m} \rfloor} f(i,j) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{mn-mj} f(i+mj,j),
$$

we get

$$
\begin{aligned}
\omega_n \quad < \quad & \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{mn-mi} \frac{(-1)^{sj}\ q^{skmi(kmi-1)/2}\ q^{mi(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)}}{\left((q^k;q^k)_j\right)^s \left[(q^k;q^k)_{mn-mi-j}\right]^s} \\
&\times q^{skj(mi-mn+1)+skmi(mi-mn)-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)+skj(j-1)/2} \\
&\times q^{-skmn(kmn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^\lambda;q)_{\mu n}]^r\ (q^k;q^k)_n}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^\lambda;q)_{\mu i}]^r\ (q^k;q^k)_i}\ x^{ki} \\
= \quad & x^{kn} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q^{s(kmi(kmi-1)/2+(mi-mn)(skmi+\alpha\beta+\alpha)+r\mu\lambda)}}{\left[(q^k;q^k)_{mn-mi}\right]^s\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^\lambda;q)_{\mu i}]^r\ (q^k;q^k)_i} \\
&\times (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^\lambda;q)_{\mu n}]^r (q^k;q^k)_n\ x^{ki} \\
&\times \sum_{j=0}^{mn-mi} (-1)^{sj}\ q^{skj(j-1)/2}\ q^{skj(mi-mn+1)} \begin{bmatrix} mn-mi \\ j \end{bmatrix}_{q^k}^s \\
\leq \quad & x^{kn} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q^{skmi(kmi-1)/2+s(kmi(kmi-1)/2+(mi-mn)(skmi+\alpha\beta+\alpha)+r\mu\lambda)}}{\left[(q^k;q^k)_{mn-mi}\right]^s\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^\lambda;q)_{\mu i}]^r\ (q^k;q^k)_i} \\
&\times (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^\lambda;q)_{\mu n}]^r (q^k;q^k)_n\ x^{ki}
\end{aligned}
$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{mn-mi}(-1)^j\ q^{kj(j-1)/2}\ q^{skj(mi-mn+1)}\begin{bmatrix}mn-mi\\ j\end{bmatrix}_{q^k}\right)^s$$

$$= \quad x^{kn}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{q^{s(kmi(kmi-1)/2+skmi(mi-mn)}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^r}{[(q^k;q^k)_{mn-mi}]^s\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu i}]^r}$$

$$\times\frac{(q^k;q^k)_n}{(q^k;q^k)_i}\ x^{ki}\ \left\{\prod_{j=1}^{mn-mi}(1-q^{k(mi-mn+j)})\right\}^s.$$

Here the product on the right hand side vanishes, hence $\omega_n < x^{kn}$. Next, the proof of another inequality relations stated above runs as follows. Here assume that (40) holds true. Now if

$$\nu_n \quad = \quad \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{[(q^k;q^k)_n]^s}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\frac{q^{s(kmj(kmj-1)/2+skmjn)+mj(\alpha\beta+\alpha)+r\mu\lambda)}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu j}]^r}$$

$$\times\frac{[(q^{-nk};q^k)_{mj}]^s}{(q^k;q^k)_j}\ x^{kj}$$

then substituting the series inequality (40) for x^{kn} , we get

$$\nu_n \quad < \quad \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{[(q^k;q^k)_n]^s}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\frac{q^{s(kmj(kmj-1)/2+kmjn)+mj(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu j}]^r\ (q^k;q^k)_j}$$

$$\times q^{-mj(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-skmj(kmj-1)/2}\ \frac{[(q^{-nk};q^k)_{mj}]^s\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha j}}{[(q^k;q^k)_{mj}]^s}$$

$$\times[[q^{\lambda}]_{\mu j}]^r\ (q^k;q^k)_j\ \sum_{i=0}^{mj}\frac{q^{ski}\ [(q^{-kmj};q^k)_i]^s}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}}G(x,i;s|q)$$

$$= \quad \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{((q^k;q^k)_n)^s}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{m}\rfloor}\frac{(-1)^{smj}\ q^{skmjn-snmj+skmj(mj-1)/2}\ ((q^k;q^k)_n)^s}{\left[(q^k;q^k)_{(n-mj)}\right]^s\ \left[(q^k;q^k)_{mj}\right]^s}$$

$$\times\sum_{i=0}^{mj}\frac{(-1)^{is}\ q^{ski}\ q^{ski(i-1)/2-skimj}\ \left[(q^k;q^k)_{mj}\right]^s}{\left[(q^k;q^k)_{(n-mj)}\right]^s\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha i}}G(x,i;s|q)$$

$$= \quad \sum_{mj=0}^{n}\sum_{i=0}^{mj}\frac{(-1)^{smj+is}\ q^{ski(i+1)/2+skmj(mj-1)/2-skimj}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{\left[(q^k;q^k)_{(n-mj)}\right]^s\ \left[(q^k;q^k)_{(mj-i)}\right]^s\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha i}}$$

$$\times G(x,i;s|q).$$

In view of double series relation

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}f(k,j)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}f(k,j).$$

this takes the form:

$$\nu_n \quad < \quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{mj=i}^{n}\frac{(-1)^{smj+is}\ q^{ski(i+1)/2+skmj(mj-1)/2-skimj}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{\left[(q^k;q^k)_{(n-mj)}\right]^s\ \left[(q^k;q^k)_{(mj-i)}\right]^s\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha i}}$$

$$
\begin{aligned}
& \times G(x,i;s|q) \\
= \;& G(x,n;s|q) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{is}\ q^{ski(i+1)/2}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}}\ G(x,i;s|q) \\
& \times \sum_{mj=i}^{n} \frac{(-1)^{smj}\ q^{skmj(mj-1)/2-skimj}}{\left[(q^k;q^k)_{(n-mj)}\right]^s\ \left[(q^k;q^k)_{(mj-i)}\right]^s} \\
= \;& G(x,n;s|q) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}}\ G(x,i;s|q) \\
& \times \sum_{mj=0}^{n-i} \frac{(-1)^{smj}\ q^{skmj(mj-1)/2}}{\left[(q^k;q^k)_{(n-i-mj)}\right]^s\ \left[(q^k;q^k)_{mj}\right]^s} \\
= \;& G(x,n;s|q) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q^{ski(i+1)/2}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\left[(q^k;q^k)_{(n-i)}\right]^s}\ G(x,i;s|q) \\
& \times \sum_{mj=0}^{n-i} (-1)^{smj}\ q^{skmj(mj-1)/2} \begin{bmatrix} n-i \\ mj \end{bmatrix}_k^s \\
\leq \;& G(x,n;s|q) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q^{ski(i+1)/2}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\left[(q^k;q^k)_{(n-i)}\right]^s}\ B_{i^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;s,r|q) \\
& \times \left(\sum_{mj=0}^{n-i} (-1)^{mj}\ \ q^{kmj(mj-1)/2} \begin{bmatrix} n-i \\ mj \end{bmatrix}_k \right)^s \qquad (42) \\
= \;& G(x,n;s|q) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q^{ski(i+1)/2}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\left[(q^k;q^k)_{(n-i)}\right]^s}\ G(x,i;s|q) \\
& \times \left\{ \prod_{mj=1}^{n-i} \left(1-q^{kmj-k}\right) \right\}^s .
\end{aligned}
$$

This gives $\nu_n < G(x,n;s|q)$. □

Towards the converse of these inequality relations, we obtain

Theorem 2.5.2. *With the same restrictions as stated in Theorem 9, to the parameters involved,*

$$
\begin{aligned}
x^{kn} \;\; > \;\; & q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-skmn(kmn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^\lambda;q)_{\mu n}]^r\ (q^k;q^k)_n}{[(q^k;q^k)_{mn}]^s} \\
& \times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{skj}\ [(q^{-kmn};q^k)_j]^s}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}}\ F(x,j;s|q) \qquad (43)
\end{aligned}
$$

implies

$$F(x,n;s|q) < B_{n^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;s,r|q); \qquad (44)$$

and

$$G(x,n;s|q) > B_{n^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;s,r|q)m \qquad (45)$$

implies

$$\begin{aligned} x^{kn} &< q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-skmn(kmn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^r\ (q^k;q^k)_n}{[(q^k;q^k)_{mn}]^s} \\ &\times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{skj}\ [(q^{-kmn};q^k)_j]^s}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}}\ G(x,j;s|q)m. \end{aligned} \tag{46}$$

The proof runs parallel to that of Theorem 2.5.1, hence is omitted. For $s=1$, the polynomial (37) possesses the following inverse series relation.

Theorem 2.5.3. *For* $\alpha,\beta,\lambda>0,\ m,\mu,k\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$\begin{aligned} B_{n^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q) &= \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{(q^k;q^k)_n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \frac{q^{k(mj(mj-1)/2+mjn)+mj(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu j}]^r} \\ &\times \frac{(q^{-nk};q^k)_{mj}\ x^{kj}}{(q^k;q^k)_j} \end{aligned} \tag{47}$$

if and only if

$$\begin{aligned} \frac{x^{kn}}{(q^k;q^k)_n} &= q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-kmn(kmn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^r}{(q^k;q^k)_{mn}} \\ &\times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{kj}\ (q^{-kmn};q^k)_j}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} B_{j^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q), \end{aligned} \tag{48}$$

and for $n\neq ml,\ l\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{q^{kj}\ (q^{-kn};q^k)_j}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} B_{j^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q) = 0. \tag{49}$$

Proof. The proof of (47) implies (48) runs as follows. Here the equality (47) holds. Putting

$$\begin{aligned} J_n &= q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-kmn(kmn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^r\ (q^k;q^k)_n}{(q^k;q^k)_{mn}} \\ &\times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{kj}\ (q^{-kmn};q^k)_j}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} B_{j^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q) \end{aligned}$$

and substituting the series equality (47) for $B_{j^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q)$, we get

$$\begin{aligned} J_n &= q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-kmn(kmn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^r\ (q^k;q^k)_n}{(q^k;q^k)_{mn}} \\ &\times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{kj}\ (q^{-kmn};q^k)_j}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}}{(q^k;q^k)_j} \\ &\times \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} \frac{q^{kmi(kmi-1)/2+kmij+mi(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)}\ (q^{-kj};q^k)_{mi}\ x^{ki}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu i}]^r\ (q^k;q^k)_i} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-kmn(mn-1)/2}\ \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^{r}\ (q^{k};q^{k})_{n}}{(q^{k};q^{k})_{mn}} \\
&\times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{kj}\ (-1)^{j} q^{kj(j-1)/2-kmnj}(q^{k};q^{k})_{mn}}{(q^{k};q^{k})_{mn-j}(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} \\
&\times \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}}{(q^{k};q^{k})_{j}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} \frac{(-1)^{mi}\ q^{kmi(kmi-1)/2+kmij+mi(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)}}{(q^{k};q^{k})_{j-mi}(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu i}]^{r}} \\
&\times \frac{q^{kmi(kmi-1)/2-kjmi}(q^{k};q^{k})_{j}\ x^{ki}}{(q^{k};q^{k})_{i}} \\
&= \sum_{j=0}^{mn} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} (-1)^{j+mi}\ q^{kmi(kmi-1)/2+kmi(mi-1)/2+m(i-n)(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)} \\
&\times \frac{q^{-kmn(kmn-1)/2+kj(j+1)/2-kmnj}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^{r}}{(q^{k};q^{k})_{j-mi}(q^{k};q^{k})_{mn-j}(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu i}]^{r}\ (q^{k};q^{k})_{i}} \\
&\times (q^{k};q^{k})_{n}\ x^{ki}.
\end{aligned}
$$

Now in view of the double series relation

$$
\sum_{i=0}^{mn} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{m} \rfloor} f(i,j) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{mn-mj} f(i+mj,j),
$$

we get

$$
\begin{aligned}
J_n &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{mn-mi} (-1)^{j}\ q^{kmi(kmi-1)/2+m(i-n)(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)+kj(mi-mn+1)} \\
&\times \frac{q^{kj(j-1)/2-kmn(kmn-1)/2+kmi(mi-mn)}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^{r}}{(q^{k};q^{k})_{j}\ (q^{k};q^{k})_{mn-mi-j}(q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu i}]^{r}} \\
&\times \frac{(q^{k};q^{k})_{n}}{(q^{k};q^{k})_{i}}\ x^{ki} \\
&= \frac{x^{kn}}{(q^{k};q^{k})_{n}} + \sum_{i=0}^{n-1} q^{kmi(kmi-1)/2+kmi(mi-mn)+(mi-mn)(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)} \\
&\times \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^{r}(q^{k};q^{k})_{n}}{(q^{k};q^{k})_{mn-mi}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu i}]^{r}(q^{k};q^{k})_{i}}\ x^{ki} \\
&\times \sum_{j=0}^{mn-mi} (-1)^{j}\ q^{kj(j-1)/2}\ q^{kj(mi-mn+1)} \begin{bmatrix} mn-mi \\ j \end{bmatrix}_{q^{k}} \\
&= \frac{x^{kn}}{(q^{k};q^{k})_{n}} + \sum_{i=0}^{n-1} q^{kmi(kmi-1)/2+(mi-mn)(kmi+\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)} \\
&\times \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu n}]^{r}(q^{k};q^{k})_{n}}{(q^{k};q^{k})_{mn-mi}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha i}\ [(q^{\lambda};q)_{\mu i}]^{r}(q^{k};q^{k})_{i}}\ x^{ki}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \times \sum_{j=0}^{mn-mi} (-1)^j \; q^{kj(j-1)/2} \; q^{kj(mi-mn+1)} \begin{bmatrix} mn-mi \\ j \end{bmatrix}_{q^k} \\
= \;& \frac{x^{kn}}{(q^k;q^k)_n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q^{kmi(kmi-1)/2+kmi(mi-mn)} \; (q^{\beta+1};q)_{\alpha n} \; [(q^\lambda;q)_{\mu n}]^r}{(q^k;q^k)_{mn-mi} \; (q^{\beta+1};q)_{\alpha i} \; [(q^\lambda;q)_{\mu i}]^r \; (q^k;q^k)_i} \\
& \times (q^k;q^k)_n \; x^{ki} \prod_{j=1}^{mn-mi} (1-q^{k(mi-mn+j)}) \\
= \;& \frac{x^{kn}}{(q^k;q^k)_n}
\end{aligned}
$$

as the product on the right hand side vanishes. To show further that (47) also implies (49), we may substitute for $B_{j^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q)$ from (47) to the left hand side of (49), to get

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n} \frac{q^{kj} \; (q^{-kn};q^k)_j}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} B_{j^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q) \\
= \;& \sum_{j=0}^{n} \frac{q^{kj} \; (-1)^j \; q^{kj(j-1)/2-knj} (q^k;q^k)_n \; (q^k;q^k)_j}{(q^k;q^k)_{n-j} (q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} \\
& \times \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{m} \rfloor} \frac{(-1)^{mi} \; q^{kmi(kmi-1)/2+mi(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)+kmi(kmi-1)/2}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i} \; [(q^\lambda;q)_{\mu i}]^r \; (q^k;q^k)_{j-mi} \; (q^k;q^k)_i} \; x^{ki} \\
= \;& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \frac{q^{3kmi(kmi-1)/2+kmi-knmi+mi(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)} \; (q^k;q^k)_n}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha i} \; [(q^\lambda;q)_{\mu i}]^r \; (q^k;q^k)_{n-mi} \; (q^k;q^k)_i} \; x^{ki} \\
& \times \sum_{j=0}^{n-mi} (-1)^j \; q^{kj(j-1)/2} \; q^{kj(mi-n+1)} \; \begin{bmatrix} n-mi \\ j \end{bmatrix}_{q^k}.
\end{aligned}
$$

Here the inner sum on the r.h.s. is actually the product

$$
\prod_{j=1}^{n-mi} \left(1-q^{k(mi-n+j)}\right)
$$

which vanishes for $j=n-mi$ and n not an integer multiple of m. Thus completing the first part. The proof of converse part runs as follows [3]. In order to show that both the series (48) and the condition (49) together imply the series (47), a simplest inverse series relations [13, Eq.(1), p.43]:

$$
\Delta_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{q^{knj} \; (q^{-kn};q^k)_j}{(q^k;q^k)_j} \; \Psi_j \; \Leftrightarrow \; \Psi_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{q^{kj} \; (q^{-kn};q^k)_j}{(q^k;q^k)_j} \; \Delta_j
$$

may be used. Here putting

$$
\Psi_j = \frac{q^{kj} \; (q^k;q^k)_j}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} \; B_{j^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q),
$$

and considering one sided relation that is, the series on the left hand side implies the series on the right side, we get

$$\Delta_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{q^{kj}\ (q^{-kn};q^k)_j}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}}\ B_{j^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q) \tag{50}$$

$$\Rightarrow\ B_{n^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q) = \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}}{(q^k;q^k)_n}\ \sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-kn};q^k)_j}{(q^k;q^k)_j}\ \Delta_j. \tag{51}$$

Since the condition (49) holds, $\omega_n = 0$ for $n \neq ml,\ l \in \mathbb{N}$, whereas

$$\Delta_{mn} = \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{kj}\ (q^{-kmn};q^k)_j}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}}\ B_{j^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q).$$

But since the series (48) holds true.

$$\Delta_{mn} = \frac{q^{mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)}\ q^{kmn(kmn-1)/2}\ (q^k;q^k)_{mn}\ x^{kn}}{(q^k;q^k)_n\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^\lambda;q)_{\mu n}]^r}.$$

Consequently, the inverse pair (50) and (51) assume the form:

$$\begin{aligned} B_{n^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q) \quad &= \quad \frac{(q^{\beta+1};q)_{\alpha n}}{(q^k;q^k)_n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \frac{q^{k(mj(mj-1)/2+mjn)+mj(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)}}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}\ [(q^\lambda;q)_{\mu j}]^r} \\ &\quad \times \frac{(q^{-nk};q^k)_{mj}}{(q^k;q^k)_j}\ x^{kj}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \frac{x^{kn}}{(q^k;q^k)_n} \quad &= \quad \frac{q^{-mn(\alpha\beta+\alpha+r\mu\lambda)-kmn(kmn-1)/2}\ (q^{\beta+1};q)_{\alpha n}\ [(q^\lambda;q)_{\mu n}]^r}{(q^k;q^k)_{mn}} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{mn} \frac{q^{kj}\ (q^{-kmn};q^k)_j}{(q^{\beta+1};q)_{\alpha j}} B_{j^*}^{(\alpha,\beta,\lambda,\mu)}(x^k;1,r|q), \end{aligned}$$

subject to the condition (49). □

3 Acknowledgements

The author thank the research scholar Ms. Meera Chudasama for pointing out some corrections. Author also sincerely thanks her guide Dr. B. I. Dave and the referee(s) for making the valuable suggestions for the improvement of the manuscript.

References

[1] W. A. Al-Salam and A. Verma, *q-Konhauser polynomials*, Pacific Journal of Mathematics **1**(108) (1983), 1–7.

[2] M. H. Annaby and Z. S. Mansour,*q-Fractional calculus and equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2012).

[3] B. I. Dave and M. Dalbide, *Gessel-Stanton's inverse series and a system of q-polynomials*, Bull. Sci. math. **138** (2014), 323–334.

[4] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[5] I. S. Gupta and L. Debnath, *Some properties of the Mittag-Leffler functions*, Integral Trans. Spec. Funct. **18**(5) (2007), 329–336.

[6] H. J. Haubold, A. M. Mathai, and R. K. Saxena, *The H-Function: Theory and Applications*, Centre for Mathematical Sciences, Pala Campus, Kerala, India **37** (2008).

[7] A. A. Kilbas, M. Saigo, and R. K. Saxena, *Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators*, Integral Transforms Spec. Funct. **15** (2004), 31–49.

[8] V. S. Kiryakova, *Multiple (multiindex) Mittag-Leffler functions and relations to generalized fractional calculus*, Journal of Computational and Applied Mathematics **118** (2000), 241–259.

[9] Y. L. Luke, *The Special Functions and their approximations*, Academic Press, New York, London **1** (1969).

[10] M. Mansour, *An asymptotic expansion of the q-Gamma function* $\Gamma_q(x)$, Journal of Nonlinear Mathematical Physics **13**(4) (2006), 479–483.

[11] G. Mittag-Leffler, *Sur la nouvelle fonction* $E_\alpha(x)$, C. R. Acad. Sci., Paris **137** (1903), 554–558.

[12] S.D. Purohit and S.L. Kalla, *A generalization of* $q-$*Mittag-Leffler function*, Mat.Bilt. **35** (2011), 15–26.

[13] J. Riordan, *Combinatorial identities*, Wiley, New York/London/Sydney (1968).

[14] M. Saigo and A. A. Kilbas, *On Mittag Leffler type function and applications*, Integral Transforms Spec. Funct. **7** (1998), 97–112.

[15] R. K. Saxena, S. Kalla, and R. Saxena, *Multivariate analogue of generatized Mittag-Leffer function*, Integral Transform. Spec. Funct. **22**(7) (2011), 533–548.

[16] R. K. Saxena and K. N. Nishimoto, *Fractional calculus of generalized Mittag-Leffler functions*, J. Fract. Calc. **37** (2010), 43–52.

[17] A. K. Shukla and J. C. Prajapati, *On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties*, J. Math. Anal. Appl. **336**(2) (2007), 797–811.

[18] A. Wiman, *Über de fundamental satz in der theoric der funktionen* $E_\alpha(x)$, Acta Math. **29** (1905), 191–201.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 18, No. 1 (2017), pp. 34–54

Álgebras booleanas, órdenes parciales y axioma de elección

Boolean algebras, partial orders and axiom of choice

Franklin Galindo (franklin.galindo@ucv.ve)
Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia.
Escuela de Filosofía. Universidad Central de Venezuela.

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar una demostración de un teorema clásico sobre álgebras booleanas y ordenes parciales de relevancia actual en teoría de conjuntos, como por ejemplo, para aplicaciones del método de construcción de modelos llamado "forcing"(con álgebras booleanas completas o con órdenes parciales). El teorema que se prueba es el siguiente: "*Todo orden parcial se puede extender a una única álgebra booleana completa (salvo isomorfismo)*". Donde *extender* significa "*sumergir densamente*". Tal demostración se realiza utilizando cortaduras de Dedekind siguiendo el texto "Set Theory"de Jech, y otras ideas propias del autor de este artículo. Adicionalmente, se formulan algunas versiones débiles del axioma de elección relacionadas con las álgebras booleanas, las cuales son también de gran importancia para la investigación en teoría de conjuntos y teoría de modelos, pues estas son poderosas técnicas de construcción de modelos, como por ejemplo, el teorema de compacidad (permite construir modelos no estándar, etc) y el teorema del ultrafiltro, que permite construir ultraproductos (pueden ser usados para investigar problemas de cardinales grandes, etc). Se presentan algunas referencias de problemas abiertos sobre el tema.

Palabras y frases claves: Álgebras booleanas, órdenes parciales, completación de álgebras booleanas, método de forcing, axioma de elección, teoría de modelos.

Abstract

The objective of this paper is to present a demonstration of a classical theorem on boolean algebras and partial orders of current relevance in set theory, as for example, for applications of model construction method called "forcing" (with boolean algebras complete or with partial orders). The theorem to be proved is as follows: "*Any partial order can be extended to a single complete boolean algebra (up to isomorphism)*". Where to *extend* means "*embed densely*". Such a demonstration is done using Dedekind's cuts following the text "Set Theory" of Jech, and other ideas of the author of this article. In addition, some weak versions of the axiom of choice related to boolean algebras are formulated, which are also of great importance for the research in set theory and model theory, since this are powerful model construction techniques, such as the compactness theorem (allows the construction of non-standard models, etc.) and the ultrafilter theorem, which allows the construction of

Recibido 18/05/2017. Revisado 01/10/2017. Aceptado 25/10/2017.
MSC (2010): Primary 03G05; Secondary 03E25.
Autor de correspondencia: Franklin Galindo

ultraproducts (can be used to investigate problems of large cardinals, etc). Some references of open problems on the subject are presented.

Key words and phrases: Boolean algebras, partial orders, completion of boolean algebras, method of forcing, axiom of choice, model theory.

1 Introducción

El objetivo de este artículo es presentar una demostración de un teorema clásico sobre álgebras booleanas y ordenes parciales de relevancia actual en teoría de conjuntos, como por ejemplo, para aplicaciones del método de construcción de modelos llamado “forcing"(con álgebras booleanas completas o con órdenes parciales). El teorema que se prueba es el siguiente: “*Todo orden parcial se puede extender a una única álgebra booleana completa (salvo isomorfismo)*". Donde extender significa “*sumergir densamente*". Tal demostración se realiza utilizando cortaduras de Dedekind siguiendo los textos de Jech: “Set Theory"(2002); “Set Theory"(1978) (ver [20, 21]); y otras ideas propias del autor de este trabajo, las cuales están presentes (principalmente) en la prueba que se presenta de un teorema previo (Teorema 4.1): “*Todo orden parcial separativo se puede extender a una álgebra booleana completa*". Adicionalmente, se formulan algunas versiones débiles del axioma de elección relacionadas con las álgebras booleanas, las cuales son también de gran importancia para la investigación en teoría de conjuntos y en teoría de modelos, pues estas son poderosas técnicas de construcción de modelos, como por ejemplo: el teorema de compacidad, que permite construir modelos no estándar; y el teorema del ultrafiltro, el cual permite construir ultraproductos que pueden ser usados para investigar problemas de cardinales grandes.

Los teoremas de compacidad y ultraproductos son importantes, como por ejemplo, para construir modelos no estándar como (entre otros) el cuerpo ordenado y no arquimideano de los Hiper-Reales (de Robinson) con el que se hace análisis no estándar (ver [6, 26]). Dicho análisis es usado actualmente con éxito en análisis real, teoría de la medida, probabilidades, topología, análisis funcional, física, teoría de números, finanzas, etc (ver [6]). También, ultraproductos es muy útil para probar teoremas de cardinales grandes (cardinales inaccesibles, cardinales medibles, etc) en el contexto de la teoría de modelos. Además, compacidad es muy exitosa para investigar problemas de definibilidad, categoricidad y axiomatizabilidad finita de teorías matemáticas, también en el conntexto de la teoría de modelos (ver [7, 26]).

Como se dijo anteriormente el teorema que se demuestra en este artículo es un resultado matemático clásico (vale la pena resaltar que según Jech, ver [20, p. 89], dicho resultado se debe originalmente a Stone [32]) y existen pruebas del mismo, como por ejemplo, demostraciones topológicas en [25, p. 63-64] y [19, p. 258-275]. Una prueba de que los abiertos regulares de un espacio topológico forman un álgebra booleana, lo cual está estrechamente vinculado con este hecho, puede encontrarse también en [15, p. 12-16]. Sin embargo, la prueba del teorema que se presenta es en parte propia del autor de este trabajo y se basa en la demostración ofrecida por Jech en [20, p. 81-83] y [21, p. 152-154]. Por ejemplo, usa las definiciones de las operaciones booleanas entre cortaduras regulares que se hace en [20, p. 81-83] y [21, p. 152-154], usando el método de las cortaduras de Dedekind. En tales libros se formulan las definiciones y se enuncia el teorema, pero no se hace explícito el porqué las mismas satisfacen las propiedades de álgebra booleana. Jech deja ese trabajo al lector de sus textos, y aquí se realiza una demostración detallada de tal hecho (Teorema 4.1), usando ideas propias del autor de este artículo. Jech tampoco prueba explícitamente la “unicidad del álgebra booleana completa que extiende al orden parcial", define explícitamente la función que garantiza el isomorfismo pero no prueba que dicha función es efectivamente un isomorfismo entre las dos álgebras booleanas completas involucradas en la prueba, aquí se ofrece una demostración detallada de tal hecho siguiendo ideas de varias fuentes y del autor de este trabajo.

El resultado previo que se demuestra en este trabajo de que *a cada orden parcial separativo le corresponde una única álgebra booleana completa (salvo isomorfismo)*, se puede extender a todo orden parcial y es conocido que el álgebra booleana completa de las cortaduras regulares de un orden parcial, es isomorfa al álgebra booleana completa de los abiertos regulares de un espacio topológico inducido por tal orden parcial [2, p. 3-4] y [19, 20, 21, 25], entre otros. Entre el orden parcial y su correspondiente álgebra booleana completa asociada existe una relación de "inmersión densa", dicha relación es importante desde el punto de vista de la lógica matemática pues permite inferir (entre otros) que las dos versiones del método de construcción de modelos de la teoría de conjuntos llamado "forcing"más usadas contemporáneamente, forcing con ordenes parciales y forcing con álgebras booleanas completas, son equivalentes, es decir, producen los mismos modelos de ZFC, una prueba de ello puede encontrarse en [25, p. 221-222] y en [21, pp. 154-156], entre otros.

Es conocido que el método de forcing es de gran utilidad (desde su creación en 1963-64 por parte de Cohen en [4, 5] hasta la actualidad) para realizar pruebas metamatemáticas de teoremas metamatemáticos (independencia o consistencia relativa) y también para realizar pruebas metamatemáticas de teoremas matemáticos (ver [31]). Por ejemplo, con dicho método, se prueba (junto con el método de construcción de modelos de los conjuntos constructibles de Gödel presente en [14]) que el axioma de elección, la hipótesis del continuo y la hipótesis de Suslin son independientes de los axiomas estándar de la teoría de conjuntos (ver [20, 25]). También se ha probado con forcing la consistencia relativa con ZFC de algunos candidatos a nuevos axiomas de la teoría de conjuntos, bajo la hipótesis de que existen cardinales supercompactos, por ejemplo del axioma de Martin máximo (MM) y del axioma de forcing propio (PFA) (ver [20, 23]). Vale la pena resaltar que MM y PFA implican que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, es decir, MM y PFA implican que la hipótesis del continuo de Cantor ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) es falsa (ver [20, 23]). En conclusión, el método de forcing es importante para la investigación matemática y también para investigar los fundamentos de la matemática. Por lo tanto, el resultado lógico matemático que se demuestra en este artículo es valioso para la investigación matemática contemporánea pues, por ejemplo, permite mayor flexibilidad de trabajo con el forcing, ya que los resultados obtenidos usando forcing con órdenes parciales también se obtienen usando forcing con álgebras booleanas completas, y viceversa. Abundantes ejemplos de la aplicación del método de forcing (con órdenes parciales o con álgebras booleanas completas) pueden encontrarse en los textos [2, 20, 21, 22, 23, 25], y también en el artículo [12], entre otros.

En este artículo se presentan adicionalmente algunas (clásicas) versiones débiles del axioma de elección relacionadas con las álgebras booleanas: El teorema del ideal primo (Stone, 1936, ver [18]), el teorema del ultrafiltro (Tarski, 1930, ver [20]), el teorema de representación de Stone (1936, ver [20]) y los teoremas de completitud y compacidad para la lógica de primer orden con, lenguajes de cualquier cardinalidad (Gödel (1930), Malcev (1936), Henkin (1949), Lós (1955), ver [7]). Dichas versiones son equivalentes entre ellas [18], [22, p. 17-18], y [27, p. 121-122], y son consecuencia estricta del axioma de elección (ver [17]). Se describe la demostración usual del teorema del ideal primo (TIP), del teorema del ultrafiltro (TUF) y del teorema de representación de Stone (TRS), dichas pruebas usan el lema de Zorn (axioma de elección).

Una gran cantidad de aplicaciones (o investigaciones) matemáticas del TIP, del TUF, del TRS, del teorema de completitud para el cálculo de predicados de primer orden (con lenguajes de cualquier cardinalidad) y del teorema de compacidad para el cálculo de predicados de primer orden (con lenguajes de cuaquier cardinalidad) en la teoría de modelos y en la teoría de conjuntos puede encontrarse en los textos [6, 7, 16, 18, 22, 26, 27], entre otros.

Se presentan dos referencias que contienen varios problemas abiertos relacionados con la temática de este artículo, al final de la sección 4 y en la sección 5.

El orden de exposición será el siguiente: En la sección 2 se presenta la definición de álgebra booleana y se expondrán algunos ejemplos clásicos. En la sección 3 se definen: orden parcial; orden parcial separativo; y se exponen algunos ejemplos clásicos. En la sección 4, se definen las operaciones booleanas para las cortaduras regulares de un orden parcial separativo y se demuestra que la estructura resultante es un álgebra booleana completa. Además, se prueba que tal extensión es única (salvo isomorfismo), y se explica cómo extender tal resultado a cualquier orden parcial. En la última sección, la número 6, se formulan algunas versiones débiles del axioma de elección relacionadas con las álgebras booleanas: TIP, TUF, TRS y los teoremas de completitud y compacidad para Lógica de primer orden con lenguajes de cualquier cardinalidad, y se describe la demostración usual de tres de ellas: TIP, TUF y TRS.

2 Álgebras Booleanas.

Definición 2.1. *Un álgebra booleana es un conjunto B con al menos dos elementos,* 0 *y* 1 *(cero y uno), dotado de dos operaciones binarias* $+$ *(suma) y* $\bullet$ *(producto), y una operación unaria (complemento)* $'$*, las cuales satisfacen las siguientes propiedades (axiomas):*

1. $a+b=b+a$; $a\bullet b=b\bullet a$ *(Leyes conmutativas).*
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(a\bullet b)\bullet c=a\bullet(b\bullet c)$ *(Leyes asociativas).*
3. $a\bullet(b+c)=(a\bullet b)+(a\bullet c)$; $a+(b\bullet c)=(a+b)\bullet(a+c)$ *(Leyes distributivas).*
4. $a+a=a$; $a\bullet a=a$ *(Leyes de idempotencia).*
5. $a\bullet(a+b)=a$; $a+(a\bullet b)=a$ *(Leyes de absorción).*
6. $a+1=1$; $a\bullet 1=a$; $a+0=a$; $a\bullet 0=0$ *(Leyes de identidad, elementos neutros y dominación).*
7. $a+(a')=1$; $a\bullet(a')=0$; $(a')'=a$ *(Leyes de complemento).*
8. $(a+b)'=a'\bullet b'$; $(a\bullet b)'=a'+b'$ *(Leyes de De Morgan).*

Denotaremos a tal álgebra booleana así: $\mathcal{B}=\langle B,+,\bullet,',0,1\rangle$.

Por simplicidad consideraremos que $\mathcal{B}=B$, a menos que el contexto requiera distinguirlos. El orden parcial de $\mathcal{B}$ se define así, $p\leq q\leftrightarrow p\bullet q'=0$. Si $a,b\in\mathcal{B}$, entonces: $a+b$ es el supremo de a y b, $a\bullet b$ es el ínfimo de a y b, a' es el único $c\in\mathcal{B}$ tal que $a+c=1$ y $a\bullet c=0$. También: $a\leq b\leftrightarrow a+b=b\leftrightarrow a\bullet b=a$. Dos elementos a,b de $\mathcal{B}$ son incompatibles si y solo si $a\bullet b=0$. $a-b=a\bullet b'$. $D\subseteq\mathcal{B}$ es denso en $\mathcal{B}$ si $D\subseteq\mathcal{B}-\{0\}$ y $\forall b\in\mathcal{B}-\{0\}$ existe $d\in D$ tal que $d\leq b$. $\mathcal{B}$ es completa si el supremo de S ($\sum S$) y el ínfimo de S ($\prod S$) existen en $\mathcal{B}$, para cualquier $S\subseteq\mathcal{B}$. Sea κ un cardinal regular no numerable. $\mathcal{B}$ es κ-completa si $\sum X$ y $\prod X$ existen en $\mathcal{B}$, para todo subconjunto X de $\mathcal{B}$ tal que $|X|<\kappa$. Si $\mathcal{B}$ es $\aleph_1$-completa se dice que $\mathcal{B}$ es σ-completa. Un *átomo* del álgebra boolena $\mathcal{B}$ es un $a\in\mathcal{B}$ tal que $a\neq 0$ y no hay ningún elemento $x\in\mathcal{B}$ que esté entre

0 y a, es decir, $0 \leq x \leq a$ y $x \neq 0$ y $x \neq a$. Se dice que $\mathcal{B}$ es *atómica* si para cada $z \in \mathcal{B}$, $z \neq 0$, existe un átomo $w \in \mathcal{B}$ tal que $w \leq z$.

Definición 2.2. *Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{K}$ dos álgebras booleanas, entonces:*

1. *Una función $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{K}$ es un homomorfismo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{K}$ si $\forall x, y \in \mathcal{E}$ las siguientes tres condiciones son satisfechas:*
   - $h(x +^{\mathcal{E}} y) = h(x) +^{\mathcal{K}} h(y)$.
   - $h(x \bullet^{\mathcal{E}} y) = h(x) \bullet^{\mathcal{K}} h(y)$.
   - $h(x'^{\mathcal{E}}) = h(x)'^{\mathcal{K}}$.
2. *Una función $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{K}$ es un isomorfismo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{K}$ si h es un homomorfismo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{K}$ y además h es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva).*

Si existe un isomorfismo entre dos álgebras booleanas se dice que ellas son isomorfas.

2.1 Álgebras booleanas clásicas.

2.1.1 Álgebra booleana de Lindenbaum

Se definirá siguiendo (principalmente) los textos [8, 20, 27]. Primero se presentará el concepto de relación de equivalencia, el cual también se usará más adelante:

Definición 2.3. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A, es decir, $R \subseteq A \times A$.*

1. *R es reflexiva si y solo si $\forall x \in A$ se tiene que xRx.*
2. *R es simétrica si y solo si $\forall x, y \in A$ se tiene que $xRy \to yRx$.*
3. *R es transitiva si y solo si $\forall x, y, z \in A$ se tiene que $(xRy \wedge yRz) \to xRz$.*
4. *R es antisimétrica si y sólo si $\forall x, y \in A$ se tiene que $(xRy \wedge yRx) \to x = y$.*
5. *R es una relación de equivalencia si R es una relación reflexiva, simétria y transitiva.*

Sea $PROP$ el conjunto de todas las proposiciones del lenguaje del cálculo proposicional y $\vdash$ la relación de deducibidad en el mismo. Se define una relación de equivalencia ($\sim$) en $PROP$ de la siguiente manera: Sean $\chi, \sigma \in PROP$. $\chi \sim \sigma$ si y solo si $\vdash \chi \leftrightarrow \sigma$. Existen procedimientos de decisión efectiva (computables) para determinar si se cumple $\vdash \chi \leftrightarrow \sigma$ o no se cumple para dos proposiciones χ y σ cualquiera. Se puede demostrar sin dificultad que la relación $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto ella es una relación de equivalencia, entonces se considera el conjunto cociente:

$$\frac{PROP}{\sim} = \{[p] : p \in PROP\}$$

Y se definine el *Álgebra de Lindenbaum* $\mathcal{C} = \langle C, +, \bullet, ', 0, 1\rangle$ de la siguiente manera:

$$C = \frac{PROP}{\sim} \qquad [\psi]' = [\neg\psi] \qquad [\psi] \bullet [\chi] = [\psi \wedge \chi]$$

$$[\psi] + [\chi] = [\psi \vee \chi] \qquad 0 = [\psi \wedge \neg\psi] \qquad 1 = [\psi \vee \neg\psi]$$

El Álgebra de Lindenbaum $\mathcal{C} = \langle C, +, \bullet, ', 0, 1\rangle$ es un álgebra booleana.

2.1.2 Álgebra booleana de los conjuntos

Se definirá siguiendo (princialmente) a [20].

Definición 2.4. *Sea S un conjunto no vacío.*

1. *Un álgebra de conjuntos (o cuerpo de conjuntos) sobre S es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S, con las siguientes propiedades:*

   (a) $S \in \mathcal{F}$.

   (b) Si $A \in \mathcal{F}$, *entonces* $S - A \in \mathcal{F}$.

   (c) Si $A, B \in \mathcal{F}$, *entonces* $A \cup B \in \mathcal{F}$ *y* $A \cap B \in \mathcal{F}$.

   El conjunto $S - A$ se llama el complemento de A y se denota por A^c.

2. *Si además de (a),(b) y (c) $\mathcal{F}$ satisface (d) se dice que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de conjuntos sobre S:*

   (d) Si $\{A_i : i \in \aleph_0\} \subseteq \mathcal{F}$ *entonces* $\bigcup_{i\in\aleph_0} A_i \in \mathcal{F}$ *y* $\bigcap_{i\in\aleph_0} A_i \in \mathcal{F}$.

3. *Sea* $Z \subseteq P(S)$. $\sigma(Z) = \bigcap\{\mathcal{F} : Z \subseteq \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \text{ es } \sigma - \text{álgebra}\}$. $\sigma(Z)$ *es la menor σ-álgebra de conjuntos sobre S que contiene a Z.*

El álgebra de conjuntos $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, ^c, \emptyset, S\rangle$ es un álgebra booleana. También ocurre la dirección inversa, es decir, que toda álgebra booleana es un álgebra de conjuntos, en rigor, se cumple el teorema de representación de Stone (1936, [32]): "*Toda álgebra booleana es isomorfa a un álgebra de conjuntos*". Una prueba del mismo se realizará en este artículo en la última sección siguiendo ideas de [20, p. 81], entre otros. Un caso bastante usado de álgebra de conjuntos es cuando $\mathcal{F} = P(S)$. Es decir, $\langle P(S), \cup, \cap, ^c, \emptyset, S\rangle$. Sea S un conjunto con al menos dos elementos. Entonces el álgebra booleana $\langle P(S), \cup, \cap, ^c, \emptyset, S\rangle$ es atómica. Los átomos son precisamente todos los subconjuntos unitarios $\{x\}$ de S. Vale la pena resaltar que dos ejemplos de álgebra booleana de conjuntos muy usados en matemáticas son la "σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue" y la "σ-álgebra de los conjuntos borelianos de un espacio topológico", la definición de la "σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue"puede encontrarse (entre otros) en los textos [3, 13, 20, 29], y la definición de la "σ-álgebra de los conjuntos borelianos de un espacio topológico"se define a continuación siguiendo los textos [3, 13, 20, 29].

Definición 2.5. *Un espacio topológico es un par $(Y, \mathcal{T})$ donde Y es un conjunto no vacío, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ y se cumple:*

(a) $Y \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$.

(b) Si $O_1 \in \mathcal{T}$ *y* $O_2 \in \mathcal{T}$, *entonces,* $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.

(c) Si $Z \subseteq \mathcal{T}$, *entonces,* $\cup Z \in \mathcal{T}$.

Se dice que $\mathcal{T}$ es una topología para Y. Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman abiertos. $Z \subseteq Y$ es cerrado $\leftrightarrow$ $Y - Z$ es abierto. Sea $W \subseteq Y$. El interior de W, W°, es el mayor subconjunto abierto de Y que está contenido en W. La clausura de W, $\overline{W}$, es el menor subconjunto cerrado de Y que contiene a W.

Definición 2.6. *Sea $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico. σ(Abiertos de Y) es la σ-álgebra de Borel de Y (o los conjuntos borelianos de Y). σ(Abiertos de Y) se denotará por $\mathcal{B}(Y)$.*

Es importante destacar que $\mathcal{B}(Y)$ se puede construir inductivamente a partir de los conjuntos abiertos de Y, si Y es un *espacio polaco* (es decir, si Y es "métrico", "separable" y "completo", por ejemplo el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual, el espacio de Baire y el espacio de Cantor), se utiliza para dicha construcción inducción transfinita en el cardinal $\aleph_1$, la idea es partir de los abiertos de Y y cerrarlos (inductivamente) bajo complemento y unión numerable. Un ejemplo de tal definición puene encontrarse en [13, 20].

2.1.3 Álgebra de los intervalos cerrados-abiertos del intervalo [0,1].

Se definirá siguiendo (principalmente) a [28]: Sea $\langle J([0,1]), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, [0,1)\rangle$, donde $[0,1]$ es el intervalo cerrado de los números reales de extremos cero y uno, es decir, $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $J([0,1])$ es el conjunto de todas las uniones finitas de intervalos cerrados-abiertos $[a,b)$, con $a \leq b$, incluídos en $[0,1]$, $\cup$ es la unión conjuntista usual, $\cap$ es la intersección conjuntista usual, y la operación ^{c} no es el complemento (relativo) usual de los conjuntos, el complemento de un $[a_1,b_1) \cup [a_2,b_2), \cup [a_3,b_3) \cup \ldots \cup [a_k,b_k) \in J([0,1])$, $([a_1,b_1) \cup [a_2,b_2) \cup [a_3,b_3) \ldots \cup [a_k,b_k))^c$, es el conjunto diferencia $[0,1) \setminus$ *Unión finita de intervalos cerrados-abiertos*, es decir, es la unión finita de intervalos cerrados abiertos complementarios de la unión anterior, tal conjunto es: $[0,a_1) \cup [b_1,a_2) \cup [b_2,a_3) \cup \ldots \cup [b_k,1)$. Es claro que cada $x \in J([0,1])$ cumple que $x \cap x^c = \emptyset$, y $x \cup x^c = [0,1)$. Es decir: $([a_1,b_1) \cup [a_2,b_2) \cup [a_3,b_3) \ldots \cup [a_k,b_k)) \cap ([0,a_1) \cup [b_1,a_2) \cup ([b_2,a_3) \cup \ldots \cup [b_k,1)) = \emptyset$, y que $([a_1,b_1) \cup [a_2,b_2) \cup [a_3,b_3) \ldots \cup [a_k,b_k)) \cup ([0,a_1) \cup [b_1,a_2) \cup ([b_2,a_3) \cup \ldots \cup [b_k,1)) = [0,1)$. $\langle J([0,1]), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, [0,1)\rangle$ es un álgebra booleana. Notar que tal álgebra booleana no es atómica.

3 Ordenes parciales y ordenes parciales separativos.

A continuación se presenta la definición de "orden parcial" y de "orden parcial separativo" junto con otros conceptos relacionados que se usarán más adelante en este artículo:

Definición 3.1. *Un orden parcial es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación en P que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Además,*

1. *Dado un orden parcial $(P, \leq)$ se dice $p < q$ si y solo si $p \leq q \wedge p \neq q$.*

2. *Sea $(P, \leq)$ un orden parcial y $p, q \in P$. Se dice que p y q son compatibles si existe un $r \in P$ tal que $r \leq p \wedge r \leq q$. Y se dice que p y q son incompatibles si no existe un $r \in P$ tal que $r \leq p \wedge r \leq q$.*

3. *Un orden parcial $(P, \leq)$ es separativo si para todo $p, q \in P$ se cumple que: si $p \nleq q$, entonces existe $r \leq p$ tal que r es incompatible con q. Un orden parcial $(P, \leq)$ a veces se denotará por P.*

4. *Sean (P, R) un orden parcial y $D \subseteq P$. $x \in P$ es un elemento minimal (maximal) de D si $x \in D \wedge$ no existe ningún $y \in D$ tal que $y \neq x \wedge yRx$ (xRy). x es una cota inferior (superior) de D si $\forall y \in D$ se tiene que $xRy \vee y = x$ $(yRx \vee y = x)$. x es un ínfimo (supremo) de D si x es cota inferior (superior) de $D \wedge$ para todo $y \in P$, si y es una cota inferior (superior) de D, entonces $yRx \vee y = x$ $(xRy \vee y = x)$. x es un menor (mayor) elemento de D si $x \in D \wedge \forall y \in D$ se tiene que $xRy \vee y = x$ $(yRx \vee y = x)$.*

5. *Sea (P,R) un orden parcial. (P,R) es un orden total (o lineal) si la relación R satisface la propiedad de tricotomía: $\forall x,y \in P$ se tiene que $xRy \vee yRx \vee x=y$.*

3.1 Ordenes parciales separativos (y uno que no lo es).

Ejemplo 3.1.1. *El orden parcial (simple con mayor elemento) de Cohen $(\mathsf{C},\leq,1)$ se define como sigue:*

- $\mathsf{C}=\{p : p \text{ es función} \wedge |p|<\aleph_0 \wedge dom(p)\subseteq \aleph_0 \wedge ran(p)\subseteq\aleph_0\}$.
- $p\leq q \leftrightarrow q\subseteq p$.
- $1=\emptyset$.

Este orden parcial es separativo. Tal orden parcial aparece referido en relación con el método de forcing en [23], entre otros.

Ejemplo 3.1.2. *Sea $A=\{1,2\}$. El orden parcial $\langle P(A),\subseteq\rangle$ no es separativo, pues $P(A)$ tiene dos átomos, $\{1\}$ y $\{2\}$, y el conjunto vacío está incluído en todo conjunto.*

Ejemplo 3.1.3. *Sea $\alpha\geq\aleph_0$ un ordinal. C_α es un orden parcial de Cohen que se define como sigue:*

$$\mathsf{C}_\alpha=\{p : \mid p\mid<\aleph_0 \ \wedge\ dom(p)\subseteq\alpha\times\aleph_0\ \wedge rango(p)\subseteq 2\},$$

$$p\leq q\leftrightarrow q\subseteq p.$$

Este orden parcial es separativo. Tal orden parcial aparece referido en ralación con el método de forcing en [20, 23, 25] entre otros.

Ejemplo 3.1.4. *El orden parcial (con mayor elemento) de Sacks $(\mathsf{S_a},\leq,1)$ se define así,*

- $\mathsf{S_a}=\{p : p$ *es subárbol perfecto y no vacío del árbol binario completo*$\}$.
- $p\leq q\leftrightarrow p\subseteq q$.
- $1=$ *El árbol binario completo.*

Este orden parcial es separativo.

El par $(T,\leq)$ es un árbol si y solo si $(T,\leq)$ es un orden parcial y para cada $x\in T$ el par $(\{y\in T : y<x\},<)$ es un buen orden estricto (Un conjunto parcialmente ordenado por $<$ es un buen orden estricto si cada subcojunto distinto de vacío de dicho conjunto tiene un menor elemento según $<$, y además se cumple que para cada x, $x\not< x$.). Los elementos de T se llaman nodos. Un subárbol de T es un subconjunto $T^{'}\subseteq T$ con el orden inducido tal que, $\forall x\in T^{'}$, $\forall y\in T$ se cumple: $y<x\rightarrow y\in T^{'}$. El árbol binario completo es el orden parcial $(2^{<\aleph_0},\leq)$ constituído por todas las sucesiones finitas de ceros y unos, ordenadas por la relación de extensión. Es decir, $2^{<\aleph_0}=\bigcup\{2^n : n\in\aleph_0\}$ y $s\leq t$ si y solo si $s\subseteq t$ si y solo si t extiende a s. $(2^{<\aleph_0},\leq)$ se denomina el árbol binario completo de altura $\aleph_0$. Si $s\in 2^{<\aleph_0}$ tal que $dom(s)=n$ y $i=0$ o $i=1$, entonces $s^\wedge i=s\cup\{(n,i)\}$. Sea p un subárbol del árbol binario completo. El conjunto de las ramas de p, $[p]$, es $\{f\in 2^{\aleph_0} : f\restriction n\in p,\ \forall n\}$. Por ejemplo, $[2^{<\aleph_0}]=2^{\aleph_0}$. p es perfecto si y sólo si $\forall s\in p$ existe $t\supseteq s$ tal que $t^\wedge 0\in p$ y $t^\wedge 1\in p$. Tal orden parcial aparece referido en relación con el método de forcing en [23], entre otros.

4 Extensión de un orden parcial a un álgebra booleana completa

A continuación se define el álgebra booleana completa de las cortaduras regulares de un orden parcial separativo siguiendo a [20, 21]: Sea $(P, \leq)$ un orden parcial separativo. Un subconjunto $W \subseteq P$ es una *cortadura* en P si W es cerrado hacia abajo, es decir, si para todo $p, q \in P$ se cumple que si $p \leq q$ y $q \in W$, entonces $p \in W$. Notar que esta definición de cortadura se parece a la definición de cortadura que usó Dedekind para definir los números reales a partir de los números racionales (ver [9, 11], entre otros). Para cualquier $p \in P$, sea $W_p = \{x : x \leq p\}$. Por definición de W_p y la definición de cortadura se tiene que W_p es una cortadura en P. Una cortadura W en P es *regular* si para todo $p \in P$ se tiene que si $p \notin W$, entonces existe $q \leq p$ tal que $W_q \cap W = \emptyset$. Como P es separativo se cumple que W_p es regular, para todo $p \in P$. Sea D el conjunto de todas las cortaduras regulares en P. Si W es una cortadura en P se define $\overline{W} = \{p : W \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\}$. Se cumple (por definición) que $\overline{W}$ es una cortadura regular y además que es la menor (con respecto a la inclusión $\subseteq$) cortadura regular que contiene a W, esto se puede probar sin dificultad usando reducción al absurdo. Entonces se define para todo $X, Y \in D$ las siguientes tres operaciones:

$$X \bullet Y = X \cap Y \qquad\qquad X + Y = \overline{X \cup Y}$$

$$X' = \{p : W_p \cap X = \emptyset\} \qquad 1 = P \qquad 0 = \emptyset$$

Sea $\mathcal{D} = \langle D, +, \bullet, ', 0, 1\rangle$.

Una propiedad importante de las cortaduras, que será de utilidad en la demostración del teorema principal de esta sección, es la siguiente:

Proposición 4.1. *Si X es una cortadura regular, entonces $X = \overline{X}$.*

Demostración. $X \subseteq \overline{X}$. Como $X \subseteq X$ y $\overline{X}$ es la menor cortadura regular (con respecto a la relación de inclusión) que contiene a X, entonces $\overline{X} \subseteq X$. Por lo tanto, $X = \overline{X}$. □

Teorema 4.1. *$\mathcal{D}$ es un álgebra booleana completa (El álgebra booleana de las cortaduras regulares en P).*

Demostración. Para demostrar el teorema basta comprobar las leyes presentes en la Definición 2.1. Es claro que

$$A + B = B + A \quad \equiv \quad \overline{A \cup B} = \overline{B \cup A} \tag{4.1}$$

pues $A \cup B = B \cup A$ es una ley del álgebra booleana de conjuntos. También se cumple que,

$$A \bullet B = B \bullet A \tag{4.2}$$

porque $A \cap B = B \cap A$ es una ley del álgebra booleana de los conjuntos, con lo que se cumplen las leyes conmutativas.

Mostremos ahora que se cumplen las leyes asociativas. Primero veamos que

$$(A + B) + C = A + (B + C) \tag{4.3}$$

se desarrolla la definición del lado izquierdo de la igualdad (4.3) y se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{\overline{A \cup B} \cup C}}_{\clubsuit} &= \{p : (\overline{A \cup B} \cup C) \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \\ &= \{p : \left(\overline{A \cup B} \cap W_q\right) \cup (C \cap W_q) \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Y también que:

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \{s : (A \cup B) \cap W_r \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \\ &= \{s : (A \cap W_r) \cup (B \cap W_r) \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\overline{A \cup B} \cap W_q = \{s : (A \cap W_r) \cup (B \cap W_r) \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \cap W_q \tag{4.6}$$

Luego, desarrollando la definición del lado derecho de la igualdad (4.3) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{A \cup \overline{B \cup C}}}_{\spadesuit} &= \{p : (A \cup \overline{B \cup C}) \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \\ &= \{p : (A \cap W_q) \cup (\overline{B \cup C} \cap W_q) \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Y también que:

$$\begin{aligned} \overline{B \cup C} &= \{s : (B \cup C) \cap W_r \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \\ &= \{s : (B \cap W_r) \cup (C \cap W_r) \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\overline{B \cup C} \cap W_q = \{s : (B \cap W_r) \cup (C \cap W_r) \neq \emptyset,\ \forall r \leq s\} \cap W_q \tag{4.9}$$

Veamos ahora el siguiente *hecho*, relacionado con la notación anterior, que permitirá concluir la prueba de que se cumple (4.3).

Hecho 4.1.

1. *$p \in \clubsuit \Leftrightarrow$ Para todo $q \leq p$ se tiene que: $W_q \cap A \neq \emptyset \vee W_q \cap B \neq \emptyset \vee W_q \cap C \neq \emptyset$.*

2. *$p \in \spadesuit \Leftrightarrow$ Para todo $q \leq p$ se tiene que: $W_q \cap A \neq \emptyset \vee W_q \cap B \neq \emptyset \vee W_q \cap C \neq \emptyset$.*

Demostración del hecho. Para demostrar el ítem *1.* se utiliza la definición desarrollada en (4.4), (4.5) y (4.6).

($\Rightarrow$): Aplicando reducción al absurdo, tomemos $p \in \clubsuit$ y supongamos que existe un $q \leq p$ tal que $W_q \cap A = \emptyset \wedge W_q \cap B = \emptyset \wedge W_q \cap C = \emptyset$, entonces $p \notin \clubsuit$. Por la definición de $\clubsuit$ desarrollada en (4.4), (4.5) y (4.6), se tiene una contradicción.

($\Leftarrow$): Basta ver que $p \in \clubsuit$. Sea $q \leq p$, considerando la definición de $\clubsuit$ desarrollada en (4.4), (4.5) y (4.6) veamos que $\overline{A \cup B} \cap W_q \cup C \cap W_q \neq \emptyset$. Esto se hace directamente estudiando los posibles casos: $W_q \cap C \neq \emptyset$; $W_q \cap B \neq \emptyset$; y $W_q \cap A \neq \emptyset$. Pero, se puede apreciar claramente, por la definición de $\clubsuit$ desarrollada en (4.4), (4.5) y (4.6), que en cada caso se cumple $\overline{A \cup B} \cap W_q \cup C \cap W_q \neq \emptyset$. Por lo tanto, $p \in \clubsuit$.

De manera análoga se demuestra el ítem *2.*, considerando la definición desarrollada en (4.7), (4.8) y (4.9), tanto la dirección ($\Rightarrow$) como la dirección ($\Leftarrow$). $\square$

Considerando el hecho anterior se tiene que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$ y que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$, por lo tanto, $\clubsuit = \spadesuit$, mostrando que se cumple (4.3).

La ley asociativa $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$ es claramente cierta pues $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ es una ley del álgebra boolena de conjuntos.

Concentrémonos ahora en demostrar las leyes distributivas. Comencemos por ver que:

$$A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C) \quad \equiv \quad A \cap \overline{B \cup C} = \overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)} \tag{4.10}$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad (4.10) se tiene que:

$$\begin{aligned} \underbrace{A \cap \overline{B \cup C}}_{\clubsuit} &= A \cap \{p : (B \cup C) \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \\ &= A \cap \{p : (B \cap W_q) \cup (C \cap W_q) \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Desarrollando el lado derecho de la igualdad (4.10) se tiene que:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)}}_{\spadesuit} &= \{p : [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \\ &= \{p : [(A \cap B \cap W_q) \cup (A \cap C \cap W_q)] \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Es claro que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$ se cumple por el desarrollo expuesto en (4.11) y (4.12). La prueba de que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$ usa el desarrollo (4.11) y (4.12), reducción al absurdo y regularidad: Sea $p \in \spadesuit$ y supongase que $p \notin A$, entonces como A es regular se tiene que existe un $q \leq p$ tal que $A \cap W_q = \emptyset$, así $p \notin \spadesuit$. Contradicción, pues por hipótesis: $p \in \spadesuit$. Por lo tanto, $p \in A$. Luego, considerando el desarrollo (4.11) y (4.12) se concluye que $p \in \clubsuit$. En consecuencia $\spadesuit \subseteq \clubsuit$, de manera que $\clubsuit = \spadesuit$.

Veamos ahora que

$$A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C) \quad \equiv \quad \overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A \cup B} \cap \overline{A \cup C} \tag{4.13}$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad (4.13) se tiene que:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{A \cup (B \cap C)}}_{\clubsuit} &= \{p : [A \cup (B \cap C)] \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \\ &= \{p : [(A \cup B) \cap (A \cup C)] \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Desarrollando el lado derecho de la igualdad (4.13) se tiene que:

$$\overline{A \cup B} = \{p : (A \cup B) \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} = \{p : (A \cap W_q) \cup (B \cap W_q) \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\}$$

$$\overline{A \cup C} = \{p : (A \cup C) \cap W_q \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\} = \{p : (A \cap W_q) \cup (C \cap W_q) \neq \emptyset,\ \forall q \leq p\}$$

$$\underbrace{\overline{A \cup B} \cap \overline{A \cup C}}_{\spadesuit} = \{p : [(A \cap W_q) \cup (B \cap W_q) \neq \emptyset] \wedge [(A \cap W_q) \cup (C \cap W_q) \neq \emptyset],\ \forall q \leq p\} \tag{4.15}$$

Entonces por el desarrollo en (4.14) y (4.15) es claro que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$. Por otro lado, sea $p \in \spadesuit$, vamos que $p \in \clubsuit$. Si $q \leq p$, se cumple que $W_q \cap A = \emptyset$ o $W_q \cap A \neq \emptyset$. Si $W_q \cap A \neq \emptyset$, entonces por el desarrollo en (4.14) y (4.15) se tiene que $[(A \cup B) \cap (A \cup C)] \cap W_q \neq \emptyset$. Si $W_q \cap A = \emptyset$, entonces $B \cap W_q \neq \emptyset$ y $C \cap W_q \neq \emptyset$. De modo que existe $t \in C \cap W_q$ y $s \in B \cap W_q$ tal que $s \in C$ o $t \in B$, pues si $s \notin C$ y $t \notin B$, entonces por reguralidad de las cortaduras existen $i \leq s$

y $j \leq t$ tal que $W_i \cap C = \emptyset$ y $W_j \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, como $i, j \leq q$ y $W_q \cap A = \emptyset$, se tiene que $W_i \cap A = \emptyset$ y $W_j \cap A = \emptyset$. También $W_i \cap C = \emptyset$ y $W_j \cap B = \emptyset$. En consecuencia, i, j no cumplen con la condición del último conjunto del desarrollo (4.15) e $i, j \leq p$. De manera que $p \notin \spadesuit$, contradiciendo la hipótesis. Luego, $s \in C$ o $t \in B$ y, por lo tanto, $C \cap B \cap W_q \neq \emptyset$. Así, $p \in \clubsuit$, es decir, $\spadesuit \subseteq \clubsuit$, en conclusión $\clubsuit = \spadesuit$.

Mostremos ahora las leyes de idempotencia. Primero veamos que

$$A + A = A \tag{4.16}$$

Usando la Proposición 4.1 y la ley del álgebra booleana de conjuntos $A \cup A = A$, la demostración de (4.16) es la siguiente: $\overline{A \cup A} = \overline{A} = A$. Es claro que $A \bullet A = A$ se cumple, pues $A \cap A = A$ es una ley del álgebra booleana de conjuntos.

Las leyes de absorción $A \bullet (A + B) = A$ y $A + (A \bullet B) = A$ resultan obvias cuando se escribe su definición: $[A \cap (\overline{A \cup B})] = A$ y $[A \cup (A \cap B)] = A$, respectivamente. Por otro lado, tomando en cuenta la Proposición 4.1 y las leyes del álgebra booleana de conjuntos, las leyes de identidad (elementos neutros y dominación) $A + 1 = 1$, $A \bullet 1 = A$, $A + 0 = A$ y $A \bullet 0 = 0$ resultan evidentes cuando se escribe su definición: $\overline{A \cup P} = P$, $A \cap P = A$; $\overline{A \cup \emptyset} = A$; y $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Veamos la validez de las leyes de complemento. Primero, tenemos que:

$$A + (A') = 1 \quad \equiv \quad \underbrace{\overline{A \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\}}}_{\clubsuit} = P \tag{4.17}$$

Es claro que $\clubsuit \subseteq P$, por definición de cortadura regular de P. Para demostrar que $P \subseteq \clubsuit$ se realiza el siguiente desarrollo y luego se aplica reducción al absurdo:

$$\begin{aligned} \overline{A \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\}} &= \{i : (A \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\}) \cap W_j \neq \emptyset,\ \forall j \leq i\} \\ &= \{i : (A \cap W_j) \cup (\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j) \neq \emptyset,\ \forall j \leq i\} \end{aligned}$$

Supongamos que $p \in P$ y $p \notin \clubsuit$, entonces existe un $j \leq p$ tal que $(A \cap W_j) \cup (\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j) = \emptyset$. Así, $j \notin A$, pues si $j \in A$ se cumple que $A \cap W_j \neq \emptyset$. En consecuencia, por la regularidad de A, se tiene que existe $k \leq j$ tal que $W_k \cap A = \emptyset$. Por lo tanto, $k \in \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j$. Luego $(A \cap W_j) \cup (\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j) \neq \emptyset$, contradiciendo la hipótesis. De manera que $p \in \clubsuit$, con lo que se obtiene (4.17)

Por otro lado, veamos que

$$A \bullet (A') = 0 \quad \equiv \quad A \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} = \emptyset \tag{4.18}$$

Supongamos que $A \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$, entonces existe un $z \in A$ tal que $W_z \cap A = \emptyset$, pero $z \in W_z \cap A$, lo que es una contradicción. Comprobando así (4.18).

Verifiquemos que

$$(A')' = A \quad \equiv \quad \underbrace{\{q : W_q \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} = \emptyset\}}_{\clubsuit} = A$$

Se probará que $\clubsuit \subseteq A$ por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $z \in \clubsuit$ tal que $z \notin A$, entonces por regularidad de A existe $l \leq z$ tal que $W_l \cap A = \emptyset$. En consecuencia $l \in \{p : W_p \cap A = \emptyset\}$ y, como $l \in W_z$, se tiene que $W_z \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$. Por lo tanto $z \notin \clubsuit$, contradiciendo la hipótesis. Luego, $\clubsuit \subseteq A$. Por otro lado, sea $z \in A$, entonces $W_z \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} = \emptyset$. En consecuencia $z \in \clubsuit$. Luego, $A \subseteq \clubsuit$, concluyendo que $\clubsuit = A$.

Veamos ahora que se cumplen las leyes de De Morgan. Primero probemos que

$$(A+B)' = A' \bullet B' \quad \equiv \quad \{p : W_p \cap \overline{A \cup B} = \emptyset\} = \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\}$$

$$\begin{aligned}\underbrace{\{p : W_p \cap \overline{A \cup B} = \emptyset\}}_{\clubsuit} &= \{p : W_p \cap \{z : \forall l \leq z(W_l \cap (A \cup B) \neq \emptyset)\} = \emptyset\} \\ &= \{p : W_p \cap \{z : \forall l \leq z(W_l \cap A \cup W_l \cap B) \neq \emptyset)\} = \emptyset\}\end{aligned}$$

$$\underbrace{\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\}}_{\spadesuit} = \{p : W_p \cap A = \emptyset \wedge W_p \cap B = \emptyset\}$$

Considerando el desarrollo realizado, se demostrará que $\clubsuit = \spadesuit$. Veamos que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$. Si $m \in \clubsuit$, entonces $W_m \cap \{z : (W_l \cap A) \cup (W_l \cap B) \neq \emptyset,\ \forall l \leq z\} = \emptyset$. Si $m \notin \spadesuit$, se concluye que $W_m \cap A \neq \emptyset \vee W_m \cap B \neq \emptyset$. Tomando en cuenta el primer caso de la disyunción se tiene que existe $k \in W_m \cap A$. Luego, $W_k \cap A \neq \emptyset$ y más todavía, $k \in \{z : (W_l \cap A) \cup (W_l \cap B) \neq \emptyset,\ \forall l \leq z\}$, pues como $k \in A$ se cumple que $W_l \cap A \neq \emptyset,\ \forall l \leq k$. En consecuencia, como $k \in W_m$ se tiene que:

$$W_m \cap \{z : (W_l \cap A) \cup (W_l \cap B) \neq \emptyset,\ \forall l \leq z\} \neq \emptyset$$

entonces $m \notin \clubsuit$, contradiciendo la hipótesis. Si se toma el segundo caso de la disyunción, $W_m \cap B \neq \emptyset$, se aplica el mismo procedimiento y se obtiene la misma contradicción. Por tanto, $\clubsuit \subseteq \spadesuit$.

Probemos ahora que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$. Sea $z \in \spadesuit$, entonces $W_z \cap A = \emptyset$ y $W_z \cap B = \emptyset$. También $(W_l \cap A = \emptyset) \wedge (W_p \cap B = \emptyset),\ \forall l \leq z$. Si $z \notin \clubsuit$, entonces:

$$W_z \cap \{z : (W_l \cap A) \cup (W_l \cap B) \neq \emptyset,\ \forall l \leq z\} \neq \emptyset$$

En consecuencia, existe un $s \leq z$ tal que $(W_l \cap A) \cup (W_l \cap B) \neq \emptyset,\ \forall l \leq s$. De modo que $(W_z \cap A \neq \emptyset) \vee (W_z \cap B \neq \emptyset)$, contradiciendo la hipótesis. Por tanto, $z \in \clubsuit$. Luego, $\spadesuit \subseteq \clubsuit$.

Comprobemos la última ley de De Morgan

$$(A \bullet B)' = A' + B' \quad \equiv \quad \{p : W_p \cap (A \cap B) = \emptyset\} = \overline{\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cup \{p : W_p \cap B = \emptyset\}}$$

Llamemos $\underbrace{\{p : W_p \cap (A \cap B) = \emptyset\}}_{\clubsuit}$ y hagamos

$$\underbrace{\overline{\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cup \{p : W_p \cap B = \emptyset\}}}_{\spadesuit} =$$

$$= \{k : W_m \cap (\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cup \{p : W_p \cap B = \emptyset\}) \neq \emptyset,\ \forall m \leq k\} =$$

$$= \{k : [(W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\}) \cup (W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\})] \neq \emptyset,\ \forall m \leq k\}$$

Se debe probar que $\clubsuit = \spadesuit$. Veamos que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$. Sea $z \in \clubsuit$, entonces $W_z \cap (A \cap B) = \emptyset$. Sea $m \leq z$, aquí se deben estudiar 5 casos:

Caso 1: Si $W_m \subseteq A$, entonces por hipótesis $W_m \cap B = \emptyset$ y en consecuencia

$$W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset.$$

Caso 2: Si $W_m \subseteq B$, entonces por hipótesis $W_m \cap A = \emptyset$ y en consecuencia

$$W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset.$$

Caso 3: Si $W_m \cap A = \emptyset$ y $W_m \cap B = \emptyset$, entonces

$$W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset.$$

Caso 4: Si $W_m \cap A \neq \emptyset$, entonces existe $r \in W_m$ tal que $r \in A$. r no puede estar en B, pues si estuviera, como él pertenece a $W_m \subseteq W_z$ se tendría que $W_z \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis. Luego $r \notin B$, entonces por regularidad de la cortadura B existe un $d \leq r$ tal que $W_d \cap B = \emptyset$. $d \in W_m$, por lo tanto $W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset$.

Caso 5: Si $W_m \cap B \neq \emptyset$, se procede de manera análoga al *Caso 4* y se obtiene el resultado buscado $W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$. En consecuencia $z \in \spadesuit$, de modo que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$.

Ahora se realiza la prueba de que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$. Aplicando reducción al absurdo, supongamos que existe un $z \in \spadesuit$ y que $z \notin \clubsuit$, entonces $W_z \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe un $d \leq z$ tal que $d \in A \cap B$. Si $W_d \cap \{p : W_d \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$, entonces existe un $s \leq d$ tal que $W_s \cap A = \emptyset$. Pero $s \in A$ y $s \in W_s$, contradicción. Luego, $W_d \cap \{p : W_d \cap A = \emptyset\} = \emptyset$. Si $W_d \cap \{p : W_d \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset$, entonces existe un $s \leq d$ tal que $W_s \cap B = \emptyset$. Pero $s \in B$ y $s \in W_s$, contradicción. Luego, $W_d \cap \{p : W_d \cap A = \emptyset\} = \emptyset$ y $W_d \cap \{p : W_d \cap B = \emptyset\} = \emptyset$. En consecuencia $z \notin \spadesuit$, contradiciendo la hipótesis. Por tanto, $\spadesuit \subseteq \clubsuit$.

Para terminar la prueba del teorema solo falta mostrar que $\mathcal{D}$ es completa. Recordemos que $\mathcal{D}$ es completa si el supremo de S ($\sum S$) y el ínfimo de S ($\prod S$) existen en $\mathcal{D}$, para cualquier $S \subseteq \mathcal{D}$. Esto se cumple pues si $S = \{S_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{D}$, entonces se prueba sin dificultad que $\prod S = \bigcap_{j \in J} S_i \in \mathcal{D}$ y $\sum S = \overline{\bigcup_{j \in J} S_j} \in \mathcal{D}$, usando las definiciones de cortaduras regulares. □

Como $\mathcal{D}$ es el álgebra booleana completa de las cortaduras regulares en P se denota $\mathcal{D} = c.r(P)$. Vale la pena resaltar que la función $e : P \longrightarrow \mathcal{D}$, definida por $e(p) = W_p$, es una función que preserva el orden y, además, el conjunto $\{e(p) : p \in P\} \subseteq \mathcal{D} \setminus \{0\}$ es denso en $\mathcal{D}$. Se dice que la función e es una *inmersión densa* de P en $\mathcal{D}$.

También se puede probar que $\mathcal{D}$ es única salvo isomorfismo (ver [2, 19, 20, 21, 25]). Veamos un prueba de esto en el siguiente lema:

Lema 4.1. *Dadas dos álgebras booleanas completas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ que tienen a P como subconjunto denso, la función $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ definida así:*

$$\pi(c) = \sum^{\mathcal{E}} \{p \in P : p \leq_{\mathcal{C}} c\},$$

es un isomorfismo entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$.

Demostración. Sea $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ definida por

$$h(e) = \sum^{\mathcal{C}} \{p \in P : p \leq_{\mathcal{E}} e\}.$$

Probemos que las funciones compuestas $h \circ \pi = 1_{\mathcal{C}}$ y que $\pi \circ h = 1_{\mathcal{E}}$, para concluir que $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ es una función biyecctiva. Veamos que $h \circ \pi = 1_{\mathcal{C}}$, para esto probemos que

$$p \leq_{\mathcal{C}} c \Longleftrightarrow p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c), \tag{4.19}$$

para cada $p \in P$ y cada $c \in \mathcal{C}$. Si $p \leq_{\mathcal{C}} c$, entonces $\pi(p) = p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)$, por la propiedad del supremo. Ahora, si $p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)$, entonces $p \bullet \pi(c) = p$ y $p \bullet \sum^{\mathcal{E}}\{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\} = \sum^{\mathcal{E}}\{p \bullet q : q \leq_{\mathcal{C}} c\} = p$, porque $\mathcal{E}$ es una álgebra booleana completa y satisface la propiedad de distributividad generalizada. Dado que si $q \leq_{\mathcal{C}} c$, entonces $p \bullet q \leq_{\mathcal{C}} p \bullet c \leq_{\mathcal{C}} c$, se tiene que $p \leq_{\mathcal{C}} c$ (por la propiedad del supremo, ya que c es una cota superior). Así, se obtiene la ecuación (4.9).

Por otro lado, por la densidad de P en $\mathcal{C}$ se tiene que,

$$c = \underbrace{\sum^{\mathcal{C}}\{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\}}_{Sup},$$

En efecto, se tiene que $Sup \leq_{\mathcal{C}} c$, ya que c es una cota superior del conjunto $\{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\}$ y, además, se tiene que $c \leq_{\mathcal{C}} Sup$ ya que si $c \not\leq_{\mathcal{C}} Sup$, entonces $c \bullet (Sup)' \neq 0$. Luego, por la densidad de P se tiene que existe un $q \in P$, con $q \neq 0$, tal que $q \leq_{\mathcal{C}} c \bullet (Sup)'$. De modo que $q \leq_{\mathcal{C}} c$ y $q \leq_{\mathcal{C}} (Sup)'$. Como $q \leq_{\mathcal{C}} c$, entonces $q \in \{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\}$ y, por tanto, $q \leq_{\mathcal{C}} Sup$. Así, $q \leq_{\mathcal{C}} (Sup)'$ y $q \leq_{\mathcal{C}} Sup$. Esto implica que $q = 0$ (pues en toda álgebra booleana se cumple que $z \leq w$ y $x \leq y$, entonces $z \bullet x \leq w \bullet y$).

De lo anterior se concluye que,

$$c = \sum^{\mathcal{C}}\{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\} = \sum^{\mathcal{C}}\{q \in P : q \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)\} = h(\pi(c)),$$

es decir, $h \circ \pi = 1_{\mathcal{C}}$.

Por último, probemos que $\pi \circ h = 1_{\mathcal{E}}$, para esto veamos que $p \leq_{\mathcal{E}} e$ si y solo si $p \leq_{\mathcal{C}} h(e)$, para cada $p \in P$ y cada $e \in \mathcal{E}$. La prueba se realiza de manera análoga al caso anterior. Por lo tanto, $\pi \circ h = 1_{\mathcal{E}}$. De modo que $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ es una función biyecctiva.

Por otro lado, se cumple que $\pi(0_{\mathcal{C}}) = 0_{\mathcal{E}}$ y $\pi(1_{\mathcal{C}}) = 1_{\mathcal{E}}$, entonces falta probar que π preserva las funciones de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$. Como tales funciones se pueden definir con el orden parcial de cada una de ellas (definido a su vez por sus operaciones booleanas), es suficiente probar que π preserva el orden entre ambas estructucturas, es decir, que $(\mathcal{C}, \leq_{\mathcal{C}})$ es isomorfa con $(\mathcal{E}, \leq_{\mathcal{E}})$. Probemos que:

$$c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2 \Longleftrightarrow \pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2).$$

Si $c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2$, entonces $\pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2)$, por la propiedad de supremo. Luego, si $\pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2)$, entonces $c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2$ ya que, por reducción al absurdo, si $c_1 \not\leq_{\mathcal{C}} c_2$, entonces $c_1 \bullet {c_2}' \neq 0$. Luego, como P es un subconjunto denso de $\mathcal{C}$, existe un $p \in P$, con $p \neq 0$, tal que $p \leq_{C} (c_1 \bullet {c_2}')$. En consecuencia, $p \leq_{C} c_1$ y $p \leq_{C} {c_2}'$. Por tanto $p \bullet {c_2}' = p \neq 0$, es decir, $p \not\leq_{\mathcal{C}} c_2$. Así, por la ecuación (4.19) se concluye que

$$p \not\leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2) \tag{4.20}$$

Por otro lado, por la hipótesis y por la propiedad de supremo, se tiene que $p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2)$, entonces

$$p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2) \tag{4.21}$$

Las ecuaciones (4.20) y (4.21) son contradictorias. Por lo tanto, $c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2$. Así, $\mathcal{C} \cong \mathcal{E}$. □

Vale la pena resaltar que $\mathcal{D}$ tiene una versión topológica (ver [2, 15, 19, 20, 21, 25, 30]). En efecto, en dicha topología para P, los abiertos básicos son los subconjuntos W_p de P, para cada $p \in P$. Un conjunto abierto X de un espacio topológico se dice que es *abierto regular* si $X = (\overline{X})^\circ$, es decir si X es igual al interior de su clausura. Sea Z el conjunto de los abiertos regulares de la topología para P cuya base es $\{W_p : p \in P\}$. Se definen la operaciones booleanas de la siguiente manera:

$$X \bullet Y = X \cap Y \qquad\qquad X + Y = (\overline{X \cup Y})^\circ$$

$$X' = P \setminus \overline{X} \qquad 0 = \emptyset \qquad 1 = P$$

Se cumple que $\mathcal{Z} = \langle Z, +, \bullet, ', 0, 1\rangle$ es un álgebra booleana completa, el álgebra de los abiertos regulares de P, por eso algunos libros la denotan así: $\mathcal{Z} = a.r(P)$. Tal álgebra aparece referida (entre otros) en [15, 19, 20, 21, 25, 30], y una demostración de que es álgebra booleana completa puede encontrarse en [15, 19, 25], entre otros. Por la unicidad de la completación de P, que se mencionó anteriomente, se puede concluir que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{Z}$ son isomorfas.

En el Teorema 4.1 se supuso que el orden parcial $(P, \leq)$ era separativo, si P no fuera separativo se puede construir un orden parcial $(Q, \preceq)$ que es separativo, tal que existe una función $h : P \to Q$ que cumple:

(i) Si $x \leq y$, entonces $h(x) \preceq h(y)$.

(ii) x y z son compatibles en P si y solo si $h(x)$ y $h(z)$ son comptibles en Q.

Se define una relación de equivalencia en P así: $x \sim y$ si y solo si se cumple que y es compatible con z si y solo si x es compatible con z, $\forall\, z \in P$. Sea

$$Q = \frac{P}{\sim} = \{[p] : p \in P\},$$

donde $[p] = \{q \in P : p \sim q\}$. Luego, $[x] \preceq [y]$ si y solo si $\forall\, z \leq x$ se cumple que z y y son compatibles. Así, $(Q, \preceq)$ es separativo. La función h se define por $h(p) = [p]$, para todo $p \in P$. Se puede probar que $(Q, \preceq)$ es único salvo isomorfismo (ver [20, 21]).

Ahora, tomando en cuenta: este resultado sobre $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$; el Teorema 4.1; y el isomorfismo π, se puede inferir el siguiente resultado general como corolario (ver [2, 20, 21, 25]).

Corolario 4.1. *Para cualquier orden parcial $(P, \leq)$ existe un álgebra booleana completa única, salvo isomorfismo, $\mathcal{D} = c.r(P)$ (o $\mathcal{D} = a.r(P)$) y una función $e : P \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que:*

1. *Si $p \leq q$ entonces $e(p) \leq e(q)$.*
2. *p y q son compatibles si y solo si $e(p) \bullet e(q) \neq \emptyset$.*
3. *$\{e(p) : p \in P\} \subseteq \mathcal{D} \setminus \{0\}$ es denso en $\mathcal{D}$.*

La función e se llama "inmersión densa" de P en $\mathcal{D}$.

Observación 4.1. *Antes de pasar a la siguiente sección vale la pena destacar que una interesante lista de 25 problemas abiertos sobre Álgebras booleanas, que relaciona álgebra, topología, lógica, teoría de conjuntos y teoría de órdenes, puede encontrarse en el artículo [1] de Bekkali.*

5 Versiones débiles del Axioma de elección, relacionadas con álgebras booleanas

Definición 5.1. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana.*

- *Un ideal sobre $\mathcal{B}$ es un subconjunto $I \subseteq \mathcal{B}$ tal que:*

  (a) $0 \in I$, $1 \notin I$

  (b) Si $x \in I$ y $z \in I$, entonces $x + z \in I$

  (c) Si $x, z \in \mathcal{B}$, $x \in I$ y $z \leq x$, entonces $z \in I$.

- *Un ideal I sobre $\mathcal{B}$ es primo si $\forall b \in \mathcal{B}$ se cumple que $b \in I \vee b' \in I$.*

Ejemplos de ideales son (ver [20, 30]):

1. Sea $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, ^c, \emptyset, S\rangle$ un álgebra de conjuntos sobre S. Y sea $K \in \mathcal{F}$ tal que $K \neq S$. Se define $I_K = \{D \in \mathcal{F} : D \subseteq K\}$. I_K es un ideal sobre $\mathcal{F}$, el ideal generado por K .

2. Sea $\mathcal{B} = \langle B, +, \bullet, ', 0, 1\rangle$ un álgebra booleana:

   - $\{0\}$ es un ideal sobre $\mathcal{B}$.
   - Sea $b \in \mathcal{B}$, $b \neq 1$, se define $I_b = \{x \in \mathcal{B} : x \leq b\}$. I_b es un ideal sobre $\mathcal{B}$, el ideal generado por b.

3. Los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue cero son un ideal sobre la σ-algebra de los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

4. Sea $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un conjunto $X \subseteq Y$ es *nunca denso* si $(\overline{X})^\circ = \emptyset$. Un conjunto D se dice que es *magro* si D es una unión numerable de conjuntos nunca densos. El conjunto de los conjuntos borelianos magro forman un ideal sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

A continuación se presenta la definición de *función selectora* que nos permitirá comprender el enunciado del axioma de elección, a saber: *Todo conjunto tiene una función selectora.*

Definición 5.2. *Dado un conjunto B se dice que una función g es una* función selectora (o una función de elección) *para B si $g : B \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \bigcup B$ tal que para todo $b \in B \setminus \{\emptyset\}$ se cumple que $g(b) \in b$.*

Es importante notar que el axioma de lección y el lema de Zorn son equivalentes. Una demostración de este hecho puede encontrarse en [9, 11], entre otros. A continuación se formula el lema de Zorn, el cual permite demostrar todos los resultados principales de esta sección:

Lema 5.1 (Lema de Zorn, 1935)**.** *Sea (K, S) un conjunto parcialmente ordenado tal que cada $X \subseteq K$ totalmente ordenado tiene una cota superior en K, entonces K tiene un elemento maximal.*

Teorema 5.1 (Teorema del ideal primo (TIP), Stone, 1936)**.** *Toda álgebra boleana tiene un ideal primo.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana. Sean $b \in \mathcal{B}$, con $b \neq 1$ e I_b el ideal sobre $\mathcal{B}$, generado por b. Sea F el siguiente conjunto parcialmente ordenado por la relación de inclusión:

$$F = \{I \subseteq \mathcal{B} : I_b \subseteq I \wedge I \text{ es un ideal sobre } \mathcal{B}\}.$$

F cumple con todas las hipótesis del lema de Zorn, entonces por dicho lema existe un ideal H maximal en F. H también es maximal en $\mathcal{B}$ y como un ideal es maximal si y sólo si es primo, se tiene que H es el ideal buscado, es decir, $\mathcal{B}$ tiene un ideal primo. □

Definición 5.3. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana.*

(1) Un filtro sobre $\mathcal{B}$ es un subconjunto $F \subseteq \mathcal{B}$ tal que:

- *(a) $1 \in F$, $0 \notin F$.*
- *(b) Si $x \in F$ y $z \in F$, entonces $x.z \in F$.*
- *(c) Si $x, z \in \mathcal{B}$, $x \in F$ y $x \leq z$, entonces $z \in F$.*

(2) Sea F un filtro sobre $\mathcal{B}$. F es un ultrafiltro si $\forall x \in \mathcal{B} : x \in F \vee -x \in F$.

Ejemplos de filtros son (ver [9, 27, 30]):

1. Sea el álgebra de conjuntos sobre $\mathbb{N}$, $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, ^c, \emptyset, \mathbb{N}\rangle$. $F = \{X \in P(\mathbb{N}) : \mathbb{N} \setminus X \text{ es finito}\}$ es un filtro sobre $\mathcal{F}$, el *Filtro de Frechet*.

2. Sea $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, ^c, \emptyset, S\rangle$ un álgebra de conjuntos sobre S. Sea $K \in \mathcal{F}$ tal que $K \neq \emptyset$. Se define $I_K = \{D \in \mathcal{F} : K \subseteq D\}$. I_K es un filtro sobre $\mathcal{F}$, el filtro generado por K.

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana. Sea I un ideal sobre $\mathcal{B}$. El *filtro dual* de I es $F^{DI} = \{b' \in \mathcal{B} : b \in I\}$. Sea F un filtro sobre $\mathcal{B}$. El *ideal dual* de F es $I^{DF} = \{b' \in \mathcal{B} : b \in F\}$. Existe una función inyectiva entre el conjunto de los ideales de $\mathcal{B}$ y el conjunto de los filtros de $\mathcal{B}$. Recíprocamente: Existe una función inyectiva entre el conjunto de los filros de $\mathcal{B}$ y el conjunto de los ideales de $\mathcal{B}$ (ver [30]).

Teorema 5.2 (Teorema del ultrafiltro (TUF), Tarski, 1930)**.** *Todo filtro en un álgebra booleana se puede extender a un ultrafiltro.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana y F un filtro sobre $\mathcal{B}$. Se aplica el lema de Zorn como en el caso del TIP usando el siguiente conjunto parcialmente ordenado por la inclusión:

$$\{G \subseteq \mathcal{B} : F \subseteq G \wedge G \text{ es filtro sobre } \mathcal{B}\}.$$

□

Vale la pena resaltar que los ultrafiltros son fundamentales para el método de construcción de modelos llamado “ultraproductos", los cuales tienen mucha utilidad en investigaciones matemáticas contemporáneas, por ejemplo en la teoría de conjuntos, teoría de modelos, análisis no estándar, etc. (ver [6, 7, 26, 27]). Una interesante lista de problemas abiertos de teoría de modelos relacionados con ultrafiltros, ultraproductos, teorías matemáticas, cardinales, cardinales medibles, ZFC, etc, puede encontrarse en el texto de Chang y Keisler [7, p. 597-602].

Teorema 5.3 (Teorema de representación de Stone (TRS), 1936)**.** *Toda álgebra booleana es isomorfa a un ágebra de conjuntos.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana. Sea:

$$T = \{F : F \text{ es un ultrafiltro sobre } \mathcal{B}\}.$$

Para cualquier $b \in \mathcal{B}$ sea Z_b el conjunto de todos los ultrafiltros F de T tal que $b \in F$, es decir, $Z_b = \{F \in T : b \in F\}$. Sea $\mathcal{F} = \{Z_b : b \in \mathcal{B}\}$, así $\mathcal{F} \subseteq P(T)$. Por las propiedades de ultrafiltro se cumple que $\mathcal{F}$ es un álgebra de conjuntos sobre T. En efecto: $T = Z_1 \in \mathcal{F}$. Si $Z_a \in \mathcal{F}$ y $Z_b \in \mathcal{F}$, entonces $Z_a \cup Z_b = Z_{(a+b)} \in \mathcal{F}$, $Z_a \cap Z_b = Z_{(a \bullet b)} \in \mathcal{F}$, y $T - (Z_b) = Z_{b'} \in \mathcal{F}$. Ahora se define una función $j : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F}$ por $j(b) = Z_b$, para toda $b \in \mathcal{B}$. Por la definición de filtro, se cumple que $j(1) = T$ y que $j(0) = \emptyset$. También, por las propiedades de ultrafiltro, se tiene que j es una función sobreyectiva que satisface: $j(a \bullet b) = j(a) \cap j(b)$, $j(a + b) = j(a) \cup j(b)$ y $j(a') = T \setminus j(a)$. Para probar la inyectividad de j supóngase que $a \neq b$, entonces se considera el filtro generado por $a \bullet b'$, es decir, $F_{(a \bullet b')} = \{x \in \mathcal{B} : (a \bullet b') \leq x\}$. Luego, por el TUF existe un ultrafiltro $F' \supseteq F_{(a \bullet b')}$. Así, por la propiedad de ultrafiltro, $a \bullet b' \in F'$ si y sólo si $a \in F'$ y $b' \in F'$. De manera que $b \notin F'$. En consecuencia $F' \in j(a)$ y $F' \notin j(b)$. De modo que $j(a) \neq j(b)$. Por tanto, j es inyectiva. Teniendo que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{F}$ son isomorfas. $\square$

Ahora se enuncia el *teorema de completitud para el cálculo de predicados en primer orden* (con lenguajes de cualquier cardinalidad):

Teorema 5.4 (Teorema de completitud de Gödel (1930), Malcev (1936), Henkin (1949))**.** *Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje de primer orden con cualquier cardinalidad. Σ es consistente si y solo si Σ un modelo.*

Una prueba de este resultado puede encontrarse en [7, p. 61-66] y [27, p. 114], entre otros. El teorema de compacidad para el cálculo de predicados en primer orden (con lenguajes de cualquier cardinalidad) es la siguiente proposición:

Teorema 5.5 (Teorema de compacidad (1930), extendido)**.** *Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje de primer orden con cualquier cardinalidad. Σ tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo.*

Este resultado se puede probar como un corolario del teorema de completitud o directamente (usando el método de construcción de modelos llamado “ultraproductos", por ejemplo). Una prueba como corolario del teorema de completitud y otra prueba usando “ultraproductos"puede encontrarse en [7, p. 67; 219-220], entre otros.

Como se dijo en la introducción de este artículo el TIP, el TUF, el TRS, el teorema de completitud para el cálculo de predicados de primer orden (con lenguajes de cualquier cardinalidad) y el teorema de compacidad para el cálculo de predicados de primer orden (con lenguajes de cualquier cardinalidad) son equivalentes y son consecuencia estricta del axioma de elección. La consecuencia estricta fue probada por Halpern y Lévy en 1967, tales autores probaron que el TIP vale en el modelo básico de Cohen en el cual no vale el axioma de elección (ver [17]). Es importante resaltar que en dicha prueba Halpern y Lévy usaron un resultado de combinatoria infinita llamado el teorema de Halpern-Läuchli, una versión para árboles del teorema de Ramsey (y al teorema de Halpern-Läuchli lo utilizaron combinado con el médodo de forcing y automorfismos).

Referencias

[1] M. Bekkali. *Open problems in boolean algebras over partially ordered sets.* University Side Mohamed Ben Abdullah (USMBA). Fez, Marocco. 2010. (bekka@menara.ma).

[2] J. Bell. *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.* Clarendon Press. Oxford.1979.

[3] C. Betz. *Introducción a la Teoría de la Medida e Integración.* Universidad Central de Venezuela-Facultad de Ciencias. 1992.

[4] P. Cohen. *The Independence of continuum Hypothesis II.* Procedings of the National Academy of Science U.S.A. 51 (1964), 105-110.

[5] P. Cohen. *Set Theory and The Continuum Hypothesis.* W. A. Benjamin, Inc. 1966.

[6] M. Corbillón. *Análisis real no estándar.* Tesis de licenciatura en Matemáticas. Tutor: Dr. Josep Maria Font Llovet. Facultat de Matemátiques. Universitat de Barcelona. 2015.

[7] C. Chang - H. Keisler. *Model Theory.* Dover Publications. 2012.

[8] C. Di Prisco. *Introdución a la Lógica Matemática.* Emalca Amazonia. 2009.

[9] C. Di Prisco. *Teoría de Conjuntos.* Universidad Central de Venezuela: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico. 2009.

[10] H. Enderton. *Una Introducción Matemática a la Lógica.* Universidad Nacional Autónoma de México. 2004.

[11] H. Enderton. *Elements of Set Theory.* Academic Press. New York. 1977.

[12] C. Di Prisco and F. Galindo. *Perfect set properties in models of ZF.* Fundamenta Mathematicae 208(2010), 249-262.

[13] C. Di Prisco y C.Uzcátegui. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos.* Asociación Matemática Venezolana, 1991.

[14] K. Gödel. *Obras completas.* Alianza. Madrid. 1981.

[15] P. Halmos. *Lectures on Boolean Algebras.* Van Nostrand, 1963.

[16] H. Herrlich. *Axiom of Choice.* Springer. Berlin. 2006.

[17] J. Halpern and A. Lévy. *The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice.* En "Axiomatic Set Theory"(D. S. Scoott, ed), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, 1967.

[18] P. Howard and J. Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice.* American Mathematical Society. 1998.

[19] I. Jané. *Álgebras de Boole y Lógica.* Publicacions Universitat de Barcelona. 1989.

[20] T. Jech. *Set Theory.* Springer. 2002.

[21] T. Jech. *Set Theory.* Academic Press. New York. 1978.

[22] T. Jech. *The Axiom of Choice.* North-Holland Publishing Company. Amsterdam. 1973.

[23] T. Jech. *Multiple Forcing.* Cambridge University Press. 1986.

[24] J. Kelley. *General Topology*. Springer. 1991.

[25] K. Kunen. *Set Theory*. Elsevier. Amsterdam. 2006.

[26] M. Manzano. *Teoría de Modelos*. Alianza. Madrid. 1989.

[27] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman and Hall/CRL. 2009.

[28] A. Petrovich. *Álgebras de Boole*. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. 2007. www.matematica.uns.edu.ar/IXCongresoMonteiro/Comunicaciones/Boolean.pdf.

[29] H. Royden. *Real Analysis*. Pearson. 2010.

[30] R. Sikorski. *Boolean Algebras*. Springer-Verlag. 1960.

[31] R. Solovay. *On the cardinalidad de* Σ_1^2 *sets of reals*. "Foundations of Mathematics. Symposium Papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel". Jack J. Bullof, Thomas, C. Holyoke and S. W. Hahn, Editors. Springer-Verlag. 1969.

[32] M. Stone. *The theory of representations for Boolean algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 37-111. Zbl. 014.34002

Divulgaciones Matemáticas Vol. 18 No. 1 (2017), pp. 55–57

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–28, 44, 51, 54, 59, 69, 72, 74–76, 79–91, 94–106, 108–113, 116, 118–123, 125–130 y 132–139. Trataremos de ir llenando ese vacío, publicando en los números siguientes más soluciones que problemas nuevos. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones a los problemas mencionados en la lista anterior.

140. *(XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, El Salvador, junio 2017.)*

Sea $k > 1$ un entero. Inicialmente la rana Tita se encuentra situada sobre el punto k de la recta numérica. En un movimiento, si Tita se encuentra sobre el punto n, entonces salta al punto $f(n) + g(n)$, donde $f(n)$ y $g(n)$ son el mayor y el menor número primo (ambos positivos) que dividen a n, respectivamente. Determine todos los valores de k para los cuales Tita puede visitar una cantidad infinita de puntos diferentes de la recta numérica.

141. *(Propuesto por Dones Colmenarez, UPEL, Barquisimeto.)* Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo. Sean h_i, w_i y m_i la altura, la bisectriz y la mediana, respectivamente, que parten del vértice A_i. Pruebe que si h_1, w_2 y m_3 son concurrentes, y también h_2, w_3 y m_1 son concurrentes, entonces $A_1A_2A_3$ es equilátero.

2 Soluciones

Se recibieron soluciones de Wilson Pacheco a los problemas 61, 62 y 63. Lamentablemente las mismas llegaron después de la fecha de cierre del número anterior, en el cual ya se habían incluido soluciones de esos problemas.

68. [**11**(1) (2003) p. 84.] Con un grupo de 100 personas, se forman algunos comités de dos personas. Se sabe que, sin importar cómo se acomoden las 100 personas en una mesa redonda, siempre hay exactamente dos comités para los que cada miembro se encuentra vecino a su compañero.

    (a) Determinar el número de comités que hay.

    (b) £Es cierto que existe una persona que pertenece a todos los comités?

    Solución del editor: a) Las 100 personas se pueden ordenar circularmente de 99! maneras. Para cada una de estas ordenaciones hay dos comités cuyos miembros son vecinos, lo cual da $2 \cdot 99!$ comités. Pero en esta cuenta cada comité aparece repetido $2 \cdot 98!$ veces, pues sus dos miembros se pueden ordenar de 2 maneras y las 98 restantes personas de 98! maneras. Luego hay $(2 \cdot 99!)/(2 \cdot 98!) = 99$ comités.

    b) La respuesta es que sí. En primer lugar observemos que cualquier par de comités tiene un elemento común. En efecto, si hubiese dos comités disjuntos $\{A, B\}$ y $\{C, D\}$, como hay 99 comités y con A, B, C y D sólo se pueden formar $\binom{4}{2} = 6$, debe haber un comité $\{E, F\}$ con E diferente de A, B, C y D. Si F también es diferente de A, B, C y D, entonces colocando $ABCDEF$ en ese orden y completando de cualquier manera tendríamos al menos tres comités con sus miembros vecinos, absurdo. Si por ejemplo $F = A$ entonces colocando $EABCD$ se llega igual a un absurdo, y lo mismo si F coincide con B, C o D.

    Veamos ahora que la persona común es siempre la misma. Tomemos dos comités $\{A, B\}$ y $\{A, C\}$, y supongamos que exista otro comité que no contenga a A. Ese comité sólo puede ser $\{B, C\}$. Sea ahora X otro comité diferente de esos tres. X debe tener un elemento común con $\{A, B\}$, digamos que sea A. Entonces $B \notin X$, pero como $X \cap \{B, C\} \neq \varnothing$, debe ser $C \in X$ y $X = \{B, C\}$, absurdo.

73. [**11**(2) (2003) p. 161.] Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

    Solución del editor: Mostraremos que el jugador B tiene estrategia ganadora. Nótese que en cada jugada se retira al menos 1 piedra, por lo que siempre debe existir un perdedor.

    Al inicio, A en su turno recibe un montón impar de piedras (2003). Como todos los divisores de un impar son impares, A dejará a B un número par de piedras (pues la diferencia de dos impares es par).

    - Si le deja 0 piedras, que es par, B gana.

    - Si le deja un número par de piedras mayor a 0, B retira cualquier divisor impar del número de piedras restantes (por ejemplo 1) y de este modo le deja de nuevo a A un montón impar de piedras. Si B repite sucesivamente este método nunca perderá ya que siempre deja al menos 1 piedra. Entonces A será el perdedor y B se asegura la victoria.

77. [**11**(2) (2003) p. 162.] Un tablero cuadrado de 8cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2cm de

lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

Solución del editor: Coloreemos la primera fila de casillas de cualquier manera y tratemos de extender la coloración a todo el tablero. Si dos casillas consecutivas de la primera fila tienen el mismo color, las dos que están debajo de ellas en la segunda fila deben recibir el color opuesto, y es fácil ver que hay una única manera admisible de colorear las casillas restantes de la segunda fila, a saber, con el color opuesto al de la casilla correspondiente en la primera fila. Este razonamiento se repite para la tercera, la cuarta... hasta la última fila. En cambio si en la primera fila no hay casillas consecutivas del mismo color, es decir si se colorea BNBNBNBN o NBNBNBNB, entonces la segunda fila admite cualquiera de esas dos coloraciones alternadas, y lo mismo la tercera y las filas restantes. En resumen, cada una de las dos coloraciones alternadas de la primera fila se puede extender de 2^7 maneras, mientras que cada una de las 2^8-2 coloraciones no alternadas se extiende de manera única. En total se obtienen entonces $2 \cdot 2^7 + 2^8 - 2 = 2^9 - 2 = 510$ coloraciones.

78. [**11**(2) (2003) p. 162.] Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003.

    i. Demostrar que existe un entero positivo N tal que sus primeros 2003 múltiplos, $N, 2N, 3N, \cdots, 2003N$, son todos *ticos*.
    ii. ¿Existe algún entero positivo N tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

Solución del editor: (i) Se construye N con 2003 unos separados por grupos de tres ceros, así:

$$N = 1000100010001\dots100010001.$$

Si $s(n)$ denota la suma de los dígitos de n, entonces $s(N) = 2003$. Si k es un entero entre 1 y 2003, $N \cdot k$ es igual a 2003 k's separados por grupos de 3, 2, 1 ó 0 ceros, de acuerdo a si k tiene 1, 2, 3 ó 4 cifras. En cualquier caso, $s(N \cdot k) = 2003k$ y $N \cdot k$ es *tico*.

(ii) Supongamos por absurdo que exista un tal número N. Es bien conocido que existe un múltiplo suyo M cuyos dígitos son una sucesión de unos seguida posiblemente de una sucesión de ceros, es decir $M = \underbrace{11\dots1}_{k}0\dots0$ (esto es consecuencia de que en la sucesión 1, 11, 111, 1111,... debe haber dos términos diferentes que dejan el mismo resto al dividirlos entre N). M y todos sus múltiplos son ticos, por ser múltiplos de N, y lo mismo ocurre con el número M' que se obtiene suprimiendo los ceros finales de M. Ahora

$$19 \cdot M' = \underbrace{11\dots1}_{k}0 + \underbrace{99\dots9}_{k} = 2\underbrace{11\dots1}_{k-2}09$$

y por tanto $s(19M') = 2+(k-2)+9 = k+9$. Pero k y $k+9$ no pueden ser simultáneamente múltiplos de 2003, contradicción.

Guía para los Autores

Divulgaciones Matemáticas es una revista arbitrada que considera para su publicación trabajos inéditos de investigación, en todas las áreas de la Matemática y sus aplicaciones, historia o enseñanza. Contribuciones adecuadas trabajos de investigación, de divulgación e históricos y de enseñanza matemática. Se presta especial atención a los temas tratados en la reunión anual e itinerante de las **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** celebradas en Venezuela. Además, contempla una sección de problemas y soluciones, la cual presenta problemas que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado, sin conocimientos especializados.

El primer requisito para que un artículo sea publicable es su corrección matemática. En segundo lugar, el estilo expositivo debe ser atrayente y lo más fluido y organizado que sea posible. En los trabajos de investigación se tomarán en cuenta la relevancia y originalidad de los resultados obtenidos. El tercer requisito para que el cuerpo editorial de la revista acepte un artículo, para someterlo a evaluación y posible publicación, es que el mismo debe estar elaborado en LaTeX, utilizando una plantilla predefinida por la revista, se le pide a los autores respetar las instrucciones internas indicadas en la plantilla mencionada. El archivo fuente (.tex) y una versión en formato .dvi, .pdf o .ps (imprimible) debe enviarse por correo electrónico a `divulgaciones@demat-fecluz.org`. Si el artículo contiene figuras, éstas deben adjuntarse como archivos separados en formatos .png o .jpg.

Los lenguajes aceptados por la revista son español e inglés. Al someter un artículo, el autor debe remitir una carta en la que se haga constar que el artículo que se está sometiendo no ha sido publicado o sometido a otra revista de forma total o parcial. Dicha carta debe contener los siguientes datos: Nombre completo del autor o autores, título del artículo, firma del autor que somete el artículo (autor de correspondencia), y declaración expresa de conformidad de los demás autores (cuando exista más de un autor).

El autor, o autores, en el mensaje de sometimiento del manuscrito deben indicar la sección de la revista en la que sugiera debe ser incluido su trabajo, a saber: artículo de investigación, artículo de divulgación e histórico, artículo de enseñanza matemática. Los artículos deben organizarse en las siguientes secciones: Identificación, Resumen, Abstract, Introducción, Desarrollo, Agradecimiento (opcional), y Referencias bibliográficas (usar el estilo ejemplificado en la plantilla).

> **Identificación.** Esta debe incluir: Título completo del trabajo en castellano e inglés; Título corto para el trabajo; Nombre completo y dirección completa del autor o autores; Afiliación institucional; Dirección electrónica; Dos clasificaciones, una primaria y otra secundaria, de cinco caracteres de la AMS (MSC 2010).
>
> **Resumen:** Texto de no más de doscientas palabras que simplifique en esencia lo que se presenta a lo largo del trabajo. Debe tomar en cuenta aspectos como: Objetivos del trabajo; Metodología utilizada; Resultado. A continuación del resumen se deben incluir de tres a seis palabras o frases claves.
>
> **Abstract:** Una traducción al idioma inglés de todo lo expuesto en el resumen.

Cabe resaltar que **LA REVISTA SOLO PROCESARÁ LOS ARTÍCULOS QUE CUMPLAN CON TODOS LOS REQUISITOS ANTES EXPUESTOS**.

Guide for Authors

Divulgaciones Matemáticas is a refereed journal, which considers for publication, unpublished research papers in all branches of mathematics and its applications, history or teaching. Suitable contributions can be research papers, historical and/or teaching papers and bibliographical reviews. Special attention is paid to those topics covered by the annual itinerant meeting **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** held in Venezuela. In addition, the journal contemplates a section of problems and solutions, which contains problems that can be addressed by undergraduate students of mathematics without expertise.

Mathematical correctness is the first requirement for an article to be published. In second place, the exposition style should be attractive and most fluid and organized as possible. For research works the relevance and originality of the results will be taken into account. The third requirement to agree on the evaluation and possible publication of an article is its preparation in LaTeX using a predefined template by the journal. We ask the authors to respect the internal instructions given in the provided template. The source file (.tex) and a version .dvi, .pdf or .ps (printable) should be sent by email to `divulgaciones@demat-fecluz.org`. If the article contains figures, these should be attached as separate files in .jpg or .png formats.

The languages accepted by the journal are Spanish and English. When submitting an article, the author must include a separate letter stating that the article has not been published or submitted to another journal in total or partial way. The letter should contain the following information: Full name of author or authors, article title, signature of the author who submitts the article (corresponding author), and a declaration of conformity of the other authors.

When submitting a manuscript, the author or authors, should suggest the section of the journal in which the work should be included, namely research papers, expository and historical papers, mathematics teaching papers. Articles should be organized into the following sections: Identification, Abstract, Resumen, Introduction, Development, Acknowledgment (optional), and References (use the style exemplified in the template).

> **Identification**. This should include: Full title in Spanish and English; short title for the article; Full name and full address of author or authors; Institutional affiliation; Electronic address; Two classifications, one primary and one secondary, of five characters of the AMS (MSC 2010).
>
> **Abstract:** Text of not more than two hundred words simplify essentially what is presented throughout the work. You should take into account aspects such as work objectives; Methodology used; Result. Following the abstract should include three to six key words or phrases.
>
> **Resumen:** A Spanish language translation of the above in the abstract.

Should be noted that **THE JOURNAL WILL QNLY PROCESS ARTICLES THAT MEET ALL THE REQUIREMENTS MENTIONED ABOVE**.

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS, Vol. 18, No. 1
Se terminó de editar en Noviembre del 2017
en el Departamento de Matemática (DEMAT)
Maracaibo - Venezuela.

La Universidad del Zulia

AUTORIDADES

Jorge Palencia
Rector

Judith Aular de Durán
Vicerrectora Académica

Jesús Salom Crespo
Vicerrector Administrativo (E)

Marlene Primera Galué
Secretaria de LUZ

Facultad Experimental de Ciencias

Merlin Rosales
Decano

Vinicio Ríos
Director del Departamento de Matemáticas

Divulgaciones Matemáticas

Vol. 18, No. 1, 2017

Contenido (Contents):

Artículos de Investigación
(Research papers)

Artículos de Divulgación e Históricos
(Expository and historical papers)

Problemas y Soluciones
(Problems and Solutions)