Divulgaciones Matemáticas Vol. 23-24, No. 1-2 (2022-2023), pp. 107–112
https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/
DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.11540730

e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: Tobías Rosas Soto (tjrosas@gmail.com)
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8085-5011
Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias,
Universidad del Zulia, Maracaibo,
República Bolivariana de Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

Los dos problemas propuestos a continuación se plantearon en la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2023.

153. Sea $0 < C < 1$ y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Demuestre que si $f(x + f(x)) \leq Cf(x)$ para todo $x > 0$, entonces no existe $a > 0$ tal que f sea continua en el intervalo $[a, \infty)$.
154. Dado un número real $t > 1$, sea C_t el cuadrado de lado 2 con centro (t, t^2) y lados paralelos a los ejes. Sea A_t el área de la región $C_t \cap \Gamma$, donde $\Gamma = \{(x, y) : y \geq x^2\}$. Calcule el límite de A_t cuando $t \to +\infty$.

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–25, 28, 44, 54, 79, 84–91, 94–100, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–129, 133–143 y 145–152. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

27. [**8**(2) (2000) p. 179.]

a) Sea $ABCD$ un rectángulo tal que $AB = 1cm$ y $BC = 2cm$. Sean K el punto medio de AD, L el punto de intersección de AC con BK y M y N los puntos medios de BK y AC respectivamente. Encontrar el área del triángulo LMN.

b) Sea $ABCD$ un rectángulo tal que $AB = 1cm$ y $BC = n\ cm$. Sean C_0 y D_0 puntos sobre los segmentos BC y AD respectivamente, de modo que ABC_0D_0 es un cuadrado y E un punto del segmento BC tal que $EC = 1cm$. Sean L y M los puntos de intersección de BD_0 con AC y AE respectivamente y N el punto de intersección de C_0D_0 y AC. Encontrar el área del triángulo LMN.

Solución por Diego Andres Bellido González (`diegobellido54@gmail.com`), estudiantes de la Licenciatura Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia, Maracaibo, República Bolivariana de Venezuela.

Parte a)

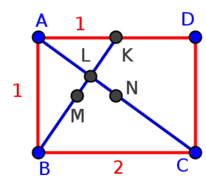

Figura 1: Primer rectángulo

En la Figura 1, tenemos que $ABCD$ es un rectángulo y los siguientes datos $AB = 1\ cm$, $BC = 2\ cm$, $AK = KD$, $BM = MK$, y $AN = NC$. Por Pitágoras en $\triangle ABC$ y $\triangle ABK$: $BK = \sqrt{2}$ y $AC = \sqrt{5}$.

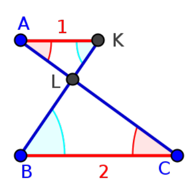

Figura 2: Triángulos opuestos por un vértice

De la Figura 2 se concluye que el triángulo $\triangle LAK$ es semejante al triángulo $\triangle LCB$. Luego:

$$\frac{AK}{CB} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \frac{LA}{LC} = \frac{LK}{LB} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ 2LA = LC \text{ y } 2LK = LB$$

Tomando en cuenta este resultado, obtenemos lo siguiente:

$$CL + LA = AC \ \Rightarrow\ LC + LA = AC \ \Rightarrow\ 2LA + LA = \sqrt{5} \ \Rightarrow\ LA = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Además,

$$LB + LK = BK \ \Rightarrow\ 2LK + LK = \sqrt{2} \ \Rightarrow\ LK = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Como M es punto medio de BK, por hipótesis, se tiene que:

$$MK = \frac{BK}{2} \ \Rightarrow\ ML+LK = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow\ ML = \frac{\sqrt{2}}{2} - LK \ \Rightarrow\ ML = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \ \Rightarrow\ ML = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Como N es punto medio de AC, por hipótesis, obtenemos que:

$$NA = \frac{AC}{2} \ \Rightarrow\ AL + LN = \frac{\sqrt{5}}{2} \ \Rightarrow\ LN = \frac{\sqrt{5}}{2} - LA \ \Rightarrow\ LN = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Ahora, calculamos el $\angle MLN$:

$$\angle MLN = 180° - \angle AKL - \angle KAL$$

Como $\angle AKL = \angle AKB$, y sabemos que $\triangle ABK$ es rectángulo e isósceles, se tiene que $\angle AKL = 45°$.

Para obtener el valor de $\angle MLN = \angle ACB$ usamos razones trigonométricas, teniendo que:

$$tg(\angle ACB) = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ACB = 26,6°$$

Luego,

$$\angle MLN = 180° - 45° - 26,6° = 108,4°$$

Por último, calculamos el área:

$$A = \frac{LM \cdot LN}{2} \cdot sen(\angle MLN) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{\sqrt{5}}{12} \dot{s}en(108,4°) = \frac{\sqrt{10}}{144} \cdot sen(108,4°)$$

$\boxed{\text{Parte b)}}$

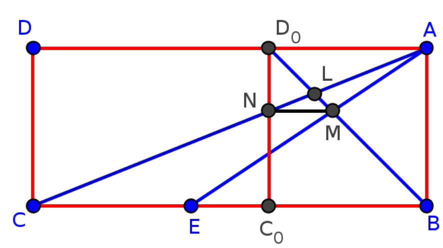

Figura 3: Triángulos opuestos por un vértice

Respecto a la Figura 3, tenemos que $\square ABCD$ es un rectángulo, $\square ABC_0D_0$ es un cuadrado, $AB = 1\ cm$, $BC = n\ cm$ y $EC = 1\ cm$.

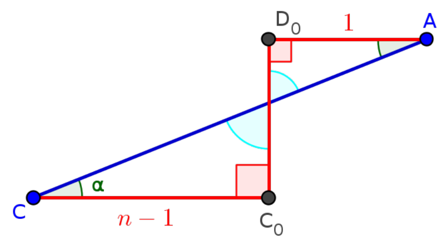

Figura 4: Triángulos opuestos por un vértice

Por el criterio ángulo-ángulo, el triángulo $\triangle CNC_0$ es semejante al triángulo $\triangle AND_0$. Luego, tenemos que:

$$\frac{CC_0}{AD_0} = \frac{CN}{AN} \;\Rightarrow\; \frac{BC - BC_0}{1} = \frac{AC - AN}{AN}$$

Por Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo $\triangle ABC$, se tiene que $AC = \sqrt{1+n^2}$, luego

$$AN(n-1) = \sqrt{1+n^2} - AN \;\Rightarrow\; AN \cdot n - AN + AN = \sqrt{1+n^2} \;\Rightarrow\; AN = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}$$

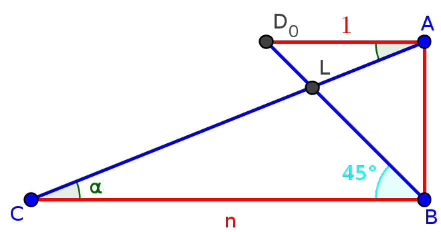

Figura 5: Triángulos opuestos por un vértice

Por criterio ángulo-ángulo, el triángulo $\triangle LD_0A$ es semejante al triángulo $\triangle LBC$. Luego, tenemos que:

$$\frac{AD_0}{BC} = \frac{AL}{CL} \;\Rightarrow\; \frac{1}{n} = \frac{AL}{AC - AL} \;\Rightarrow\; AC - AL = AL \cdot n \;\Rightarrow\; AL(n+1) = AC$$

$$AL = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n+1}$$

$$LN = AN - AL = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} - \frac{\sqrt{1+n^2}}{n+1} \;\Rightarrow\; LN = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n(n+1)}$$

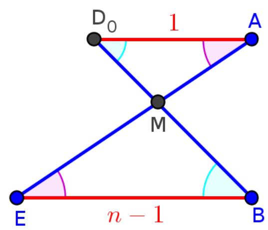

Figura 6: Triángulos opuestos por un vértice

Por criterio ángulo-ángulo, tenemos que el triángulo $\triangle MAD_0$ es semejante al triángulo $\triangle MEB$, luego

$$\frac{D_0M}{BM} = \frac{AD_0}{BE} \;\Rightarrow\; \frac{D_0M}{BD_0 - D_0M} = \frac{1}{n-1}$$

Además, por el teorema de Pitágoras, $BD_0 = \sqrt{2}$.

$$D_0M(n-1) = \sqrt{2} - D_0M \;\Rightarrow\; D_0M.n = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; D_0M = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

Tomando en cuenta la Figura 5, tenemos:

$$\frac{D_0L}{BL} = \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \frac{D_0L}{BD_0 - D_0L} = \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; D_0L.n = BD_0 - D_0L \;\Rightarrow\; D_0L(n+1) = BD_0$$

$$D_0L = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

Luego,

$$LM = D_0M - D_0L \;\Rightarrow\; LM = \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n+1} \;\Rightarrow\; LM = \frac{\sqrt{2}}{n(n+1)}$$

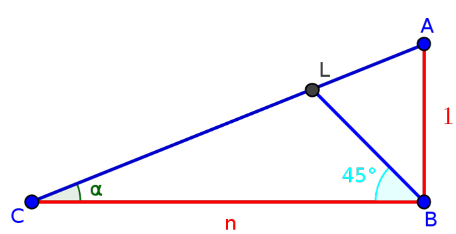

Figura 7: Triángulos opuestos por un vértice

ABC_0D_0 es un cuadrado, por lo que $\angle LBC = 45°$. Por razones trigonométricas:

$$tg(\alpha) = \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \alpha = tg^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \;\Rightarrow\; \angle NLM = \angle CLB = 180° - tg^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - 45°$$

$$\angle NLM = 135^\circ - tg^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

De esta manera, se puede calcular el área del $\triangle LMN$ sustituyendo los valores obtenidos en la siguiente fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \cdot LM \cdot LN \cdot sen(\alpha)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+n^2}}{n(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{n(n+1)} \cdot sen\left(135^\circ - tg^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2(n+1)^2} \cdot sen\left(135^\circ - tg^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$