Divulgaciones Matemáticas Vol. 23-24, No. 1-2 (2022-2023), pp. 54–63
https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/
DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.11540082

e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Grafo divisor de cero de $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$

Zero divisor graph of $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$

Juan M. Otero Acosta (jmotero746@gmail.com)
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-8245-9803
Departamento de Informática
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, República Bolivariana de Venezuela.

Daniel Brito (danieljosb@gmail.com)
Departamento de Matemática
Universidad de Oriente
Cumaná, República Bolivariana de Venezuela.

Tobías Rosas Soto (tjrosas@gmail.com)
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8085-5011
Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia
Maracaibo, Estado Zulia
República Bolivariana de Venezuela.

Resumen

Este artículo se continua el estudio de los grafos divisores de cero, presentado en 1988 por Istan Beck [2]. Allí se define un grafo divisor de cero como un grafo cuyos vértices son los elementos del conjunto de divisores de cero de un anillo, donde dos vértices distintos x e y son adayacentes si y solo si $x \cdot y = 0$. En este trabajo, se presenta una nueva forma de calcular el grafo divisor de cero del anillo $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$ para q primo impar, con r y s enteros positivos mayores que 2, además se da el ejemplo del grafo divisor de cero del anillo $\mathbb{Z}_{36}$.

Palabras y frases clave: Anillos, conjunto divisor de cero, grafo divisor de cero.

Abstract

This article continues the study of zero divisor graphs, presented in 1988 by Istan Beck [2]. There, a zero divisor graph is defined as a graph whose vertices are the elements of the set of zero divisors of a ring, where two distinct vertices x and y are adjacent if and only if $x \cdot y = 0$. In this work, we present a new way to calculate the zero divisor graph of the ring $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$ for q an odd prime, with r and s positive integers greater than 2, and the example of the zero divisor graph of the ring $\mathbb{Z}_{36}$ is also given.

Key words and phrases: Rings, zero divisor set, zero dividers graph.

Recibido 15/02/2023. Revisado 21/04/2023. Aceptado 15/04/2024.
MSC (2010): Primary 05C85; Secondary 13M05.
Autor de correspondencia: Juan Otero Acosta

1 Introducción

Harary en 1972, define a un grafo G como un par ordenado $G = (V, E)$ donde: V es un conjunto vértices o nodos; y E es un conjunto de aristas o arcos, que relacionan a estos nodos. Los grafos permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto. Además, si R es un anillo conmutativo con identidad, entonces $\Omega(R)$ representa el conjunto de los divisores de cero de R. El estudio de los llamados grafos divisores de cero, originados por Beck [2], en su artículo "Coloring of conmutative ring", es cada día más necesario por su articulación con otras ramas de la investigación matemática. En 1988, Beck define los grafos divisores de cero de la siguiente manera: asociando un grafo simple a un anillo conmutativo R, donde los vértices son los elementos del anillo y la adyacencia (aristas) entre los vértices se obtiene a través de los divisores de cero, es decir, dos vértices distintos x e y son adyacencia si y solo si $x \cdot y = 0$.

El objetivo en el artículo de Beck, era estudiar la coloración de los anillos conmutativos, con la idea de establecer una relación entre la teoría de grafo y la teoría de anillos conmutativo. En 1999, Andersen y Livistong [1], publican el artículo "The zero divisor graph of a conmutative ring" y es en éste donde se estudian las propiedades y estructuras de los grafos divisores de cero, los cuales también se estudian en el presente trabajo, y se denotan por $\Gamma(R)$, donde R es un anillo conmutativo.

En [7] se dan algunas representaciones y caracterizaciones de los grafos divisores de cero, para los anillos conmutativos de la forma $\mathbb{Z}_{p^n q}$. En [3], se introduce la definición de conjuntos r-partitos, definición clave para la representación de los grafos divisores de cero. Así como también algunas caracterizaciones, el diámetro y el número de clique para estos grafos.

Los aportes de este trabajo son:

i.- Trabajar con las estructuras algebraicas de los anillos conmutativos de la forma $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$, para q primos distintos, r y s entero positivos mayores que 2.

ii.- Estudiar las representaciones de los grafos divisores de cero sobre $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$, que se obtendrán para cada caso, así como su caracterizaciones, el diámetro, número de clique.

iii.- Dar un método para la elaboración de un algoritmo donde se puedan representar estos grafos para las estructuras algebraicas antes mencionadas.

2 Conjuntos divisores de cero

En esta sección se presentan un resumen de definiciones y resultados relacionados con los conjuntos divisores de cero.

Definición 2.1 (Divisor de cero)**.** Sea R un anillo, un elemento $x \in R$, se llama divisor de cero, si existe $y \in R$, distinto de cero, tal que $x \cdot y = 0$.

Nota 2.1. Se trabajará muy a menudo con el anillo conmutativo $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{n-1}\}$, el cual no es más que el conjunto de las clases módulo n. En lo que continúa de escritura, se suprimirá las barras para denotar al mismo anillo $\mathbb{Z}_n$, en caso contrario se informará.

Definición 2.2 (Conjunto divisor de cero)**.** Dado un anillo R, el conjunto divisor de cero de R, denotado por $\Omega(R)$, es el conjunto para el cual, cada vez que se elija un elemento $x \in \Omega(R)$, no nulo, existe otro elemento no nulo $y \in \Omega(R)$, tal que $x \cdot y = 0$.

Ejemplo 2.1. *Sea el anillo conmutativo siguiente* $\mathbb{Z}_{36} = Z_{2^2 3^2} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 35\}$. *Su conjunto divisor de cero es:*

$$\Omega(\mathbb{Z}_{36}) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34\}.$$

Nota 2.2. Otra manera de ver $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$, son los elementos no primos relativos con 36.

Otros anillos a los cuales también se les calcula su conjunto divisor de cero son los siguientes:

Ejemplo 2.2. *Sea el anillo conmutativo* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$. *Su conjunto divisor de cero es::* $\Omega(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{(1,0), (0,1)\}$. *Puesto que:*

$$\begin{array}{c} (1,0) \times (0,1) = (0,0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (1,0) \times (1,1) = (1,0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (0,1) \times (1,1) = (0,1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Ejemplo 2.3. *Sea el anillo*

$$R = \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{x^2} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, x, x + \overline{1}, x + \overline{2}, \overline{2}x, \overline{2}x + \overline{1}, \overline{2}x + \overline{2}\}.$$

Su conjunto divisor de cero es: $\Omega(\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{x^2}) = \{x, \overline{2}x\}$. *Puesto que:*

$$x \cdot \overline{2}x = \overline{2}x^2 = \overline{2} \cdot \overline{0} = \overline{0}$$

n	Descomposición $p^r q^s$	$\lvert\Omega(\mathbb{Z}_n)\rvert$
36	$2^2 3^2$	23
72	$2^3 3^2$	47
100	$2^2 5^2$	59
108	$2^2 3^3$	71
144	$2^4 3^2$	95
196	$2^2 7^2$	111
200	$2^3 5^2$	119
300	$2^2 5^3$	219
392	$2^3 7^2$	223

Cuadro 1: Tabla con la cardinalidad algunos $\Omega(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$

Los siguientes son resultados relacionados con los conjuntos divisores de cero. En [6], aparecen los siguientes corolarios

Corolario 2.1. *El anillo* $\mathbb{Z}_p$ *no tiene divisores de cero si y solo si* p *es primo.*

Corolario 2.2. *Un anillo no tiene divisores de cero si y solo si se cumple la ley cancelativa del producto para todo elemento no nulo del anillo.*

Seguidamente en [4], se presenta el siguiente resultado:

Proposición 2.1. *Sea* R *un anillo conmutativo finito, entonces cada elemento de* R *es invertible o divisor de cero.*

Demostración. Sea $a \in R$. Si $a \in \Omega(R)$, esto significa que a es un divisor de cero. Por otro lado, si a no pertenece a $\Omega(R)$, entonces $a \neq 0$ y para todo $b \in R - \{0\}$, se tiene que $a \cdot b \neq 0$. Como R es finito, supóngase que R tiene n elementos y hágase $R = \{0, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$. Luego, multilplicando cada elemento de R por a se obtiene $a \cdot 0 = 0$ y $a \cdot a_i \neq 0$, para $2 \leq i \leq n$. Si $i \neq j$, $a \cdot a_i \neq a \cdot a_j$, pues en caso contrario $a(a_i - a_j) = 0$, lo que diría que $a \in \Omega(R)$ lo que es una contradicción. Como R es un anillo conmutativo, entonces $1 \in R$ y por ser R finito debe existir $a_k \in R$, con $2 \leq k \leq n$, tal que $a \cdot a_k = 1$ de manera que a es invertible. □

El siguiente teorema dado en [4], es fundamental para futuras investigaciones conectadas por los grafos divisores de cero y anillos de polinomios.

Teorema 2.1 (Teorema de McCoy)**.** *Sea R un anillo. Un polinomio $f \in R[x]$ es un divisor de cero si y solo si, existe $r \in R$ tal que $r \cdot f = 0$.*

3 Grafo divisor de cero

En esta sección, se presenta una definición de grafo divisor de cero entre las muchas que existen, y algunos resultados relacionados con los mismos. En este apartado los anillos de trabajo se consideran conmutativos y con identidad. A continuación se presentan las definiciones más elementales que sustentan el trabajo.

Definición 3.1. Un grafo es un par de conjuntos $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados *vértices, nodos o puntos* y E es un conjunto formado por pares, no ordenados, de elementos de V llamados *lados, aristas o líneas.*A los conjuntos V y E también se les suele denotar por $V(G)$ y $E(G)$, respectivamente.

La siguiente definición de conjunto r-partitos es bueno conocerla puesto que es crucial en la construcción de los grafos divisores de cero, aquí propuestos.

Definición 3.2. Un grafo $G = (V, E)$ se dice k-partito si sus vértices están o pueden ser particionados en k diferentes *conjuntos independientes*. Lo que se traduce diciendo que: existen conjuntos $W_1, W_2, \cdots, W_r$, tales que cumplen las siguientes condiciones:

1. $W_i \neq \emptyset, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, r.$
2. $W_i \cap W_j = \emptyset \quad \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, r$, con $i \neq j$.
3. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} W_i = V$
4. Si $v, w \in W_i$ entonces $(v, w) \notin E$, para todo $i = 1, \ldots, r$.

Definición 3.3. Sea R un anillo conmutativo, el grafo divisor de cero de R, el cual se denotará por $\Gamma(R)$, se define por:

$$\Gamma(R) = (V(\Gamma(R)), E(\Gamma(R)))$$

donde $V(\Gamma(R))$: es el conjunto formado por los elementos del conjunto divisor de cero de R, es decir,

$$\Omega(R) = V(\Gamma(R))$$

y

$$E(\Gamma(R)) = \{(x, y) : \; x, y \in V(\Gamma(R)), \; x \cdot y = 0, \quad x \neq y\}$$

4 Clique, diámetro y girth de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$

A los grafos divisores de cero también se le asocian el clique, diámetro y girth, como se verá a continuación.

Definición 4.1. Un grafo simple $G = (V, E)$ es *completo*, si cada uno de los vértices es adyacente a los restantes vértices del grafo G, el grafo completo de orden n es denotado por K_n.

Definición 4.2. Todo subgrafo K_r de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ es llamado un *clique* de orden r.

Definición 4.3. El *número de clique* de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, denotado por $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$, es el mayor entero $r \geq 1$, tal que $K_r \subset \Gamma(\mathbb{Z}_n)$

Definición 4.4. La *distancia* entre un par de vértices de un grafo G, es la longitud del camino más corto entre ellos. Si no existe tal camino se dice que la distancia es infinita.

Definición 4.5. El *diámetro* del $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, es la mayor distancia entre cualquiera dos vértices distintos. Tal distancia se denotará por $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$

Un resultado importante que aparece en [2], en el cálculo del diámetro en $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^r q^s})$ es el siguiente:

Teorema 4.1. *Si p y q son primos distintos, r y s enteros positivos mayores que 2 . Entonces* $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^r q^s})) = 3$

Definición 4.6. Un *ciclo* de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, es un camino cerrado en el cual no se repite ningún vértice, salvo el vértice inicial. Un cíclo de orden n de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ se denotará por C_n, donde n es el número de vértices.

Definición 4.7. El *girth* de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, es la longitud del ciclo más corto. El girth de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, se denotará por $\Phi(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$

Ejemplo 4.1. *Sea el grafo divisor de cero del anillo $\mathbb{Z}_{36}$, esto es $\Gamma(\mathbb{Z}_{36})$, entonces $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_{36})) = 5$ como se puede ver en el subgrafo de $\Gamma(\mathbb{Z}_{36})$, coloreado de azul en la Figura 1. De igual forma $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_{36})) = 3$ como se puede ver, como ejemplo, el subgrafo coloreado de rojo de $\Gamma(\mathbb{Z}_{36})$, en la Figura 1. Por último, $\Phi(\Gamma(\mathbb{Z}_{36})) = 3$ como se puede observar en el subgrafo K_3 de $\Gamma(\mathbb{Z}_{36})$ con dos aristas coloreadas de verde y una de azul en la Figura 1.*

Ejemplo 4.2. *Para el grafo $\Gamma(\mathbb{Z}_{72}) = \Gamma(\mathbb{Z}_{2^3 3^2})$. Este caso todos los subgrafos completos no-isomorfos para $\Gamma(= \mathbb{Z}_{2^3 3^2})$ son K_2 y K_3. Por lo tanto $\omega(\Gamma(= \mathbb{Z}_{72})) = 3$*

5 Método de Representación

En esta sección se da un nuevo método para representar los $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$, basado en la eoría de anillos, conjunto divisor de cero y conjuntos r-partitos. Es oportuno resaltar, que ya existen una gran cantidad de métodos en este estilo, por ejemplo en [8], se presenta un método que articula la teoría de órbitas con las constantes baricéntricas y en [5], se da un método matricial que relaciona a las constantes baricéntricas y la teoría de matrices, este último método se implementó en el lenguaje de computación conocido como MatLab.

Método:

Supóngase que se quiere representar el grafo divisor de cero del anillo $\mathbb{Z}_n$ o equivalentemente $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$. Si n es primo entonces n no tiene divisores de cero y por lo tanto no existe su grafo divisor de cero, esto fundamentado en el Corolario 2.1. Supóngase que n se puede descomponer en factores primos en la forma $2^r q^s$, donde q es un primo impar, r y s son enteros positivos mayores que 2. Luego, se busca el conjunto divisor de cero del anillo, esto es, $\Omega(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$. Seguidamente se busca los siguientes conjuntos a partir de $\Omega(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$:

1. $A = \{2k : 2k < n, \text{ con } 1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}\}$.
2. $B = \{kq : kq < n, \text{ con } k \text{ impar}\}$.
3. $C = \{x \in A : n \,|\, x2q\}$. Aquí $n \,|\, x2q$ significa que n divide al producto $x2q$.
4. $D = \{x \in C : n \,|\, xz, \text{ para todo } z \in A\}$.

Nótese que el conjunto D tiene un solo elemento dado que si $x \in D$ este elemento debe cumplir que $n \,|\, xz$, para todo $z \in A$ en particular para los elementos 2 y $2q$ que están en A, de manera que x debe ser de la forma $2^{r-1}q^s$. Luego, con los conjuntos dados se realizan las siguientes particiones:

$$V_1 = A - C, \qquad V_2 = B \cup D, \qquad V_3 = C - D.$$

Nótese que si $v, w \in V_1$, es decir, $v, w \in A$ y $v, w \notin C$. Por tanto, se tiene que n no divide al producto vw pues de ser así entonces $v \in C$ o $w \in C$ lo cual es una contradicción. Así el conjunto V_1 es un conjunto indepediente. Por otro lado, si $v, w \in V_2$ entonces se pueden tener las siguientes posibilidades:

1. $v, w \in B$.
2. $v \in B$ y $w \in D$, o viceversa, ya que D contiene un solo elemento.

En el supuesto que $v, w \in B$ se tiene que n no divide al producto vw pues ni v ni w no tiene ningún factor de la forma 2^k para ningún valor de $k = 1, \ldots, r$. De manera que en este caso no hay una arista entre esos vertices de V. Supóngase ahora, sin pérdida de generalidad, que $v \in B$ y $w \in D$. De manera que v no tiene ningún factor de la forma 2^k para ningún valor de $k = 1, \ldots, r$ y como w sería $2^{r-1}q^s$, entonces n no divide al producto vw. Teniendo con esto que no existen aristas entre puntos de V_2 y por tanto el conjunto es independiente.

Nótese que si $x \in V_3$ entonces x contiene los factores 2^{r-1} y q^{s-1} para poder obtener que n divida al producto $x2q$. Así, entre todos y cada uno, de los elementos del conjunto V_3 se tienen aristas entre ellos. De manera que por cada elemento presente en V_3 se debe formar un conjunto con un solo elemento, cada uno de los cuales sserá independiente.

Por último obsérvese que el conjunto de conjuntos independientes, o el número de partición, es $|V_3|$ más los dos conjuntos V_1 y V_2, es decir, nuestro grafo $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$ es $(|V_3| + 2)$-partito.

6 Ejemplo de aplicación del método

Ejemplo 6.1. *Representar del grafo divisor de cero del anillo $\mathbb{Z}_{36}$.*

Paso 1: *Se chequea si $n = 36$ es primo, si es cierto $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ no existe. Sino continuar con el siguiente paso.*

Paso 2: *Se descompone* $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{36}$ *en la forma* $\mathbb{Z}_{2^r q^s}$*, esto es,* $\mathbb{Z}_{36} = \mathbb{Z}_{2^2 3^2}$

Paso 3: *En este paso se procede a calcular el conjunto divisor de cero del anillo esto es,*

$$\Omega(\mathbb{Z}_{36}) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34\}$$

Paso 4: *Aquí se calculan los conjuntos* A, B, C *y* D*, tal cual se definieron en el método, para buscar una partición de* $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$*, esto es:*

1. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34\}$.

2. $B = \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$.

3. $C = \{12, 18, 24, 30\}$

4. $D = \{18\}$.

Paso 5: *Construcción de la partción de representación de* $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$.

1. $V_1 = A - C = \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32, 34\}$.

2. $V_2 = B \cup D = \{3, 9, 18, 15, 21, 27, 33\}$.

3. $V_3 = C - D = \{12, 24, 30\}$

Paso 6: *Resultado de* $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2 3^2})$*. Finalmente, como* $|V_3| + 2 = 3 + 2 = 5$*. Entonces* $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2 3^2})$ *es 5-partito.*

Paso 7: *Represent ción de* $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2 3^2})$

Nótese que $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$ *es* 5*-partito cuyos conjuntos estarían dados por:*

$$W_1 = \{24\} \quad W_2 = \{30\} \quad W_3 = \{3, 9, 15, 18, 21, 27, 33\} \quad W_4 = \{12\}$$

$$W_5 = \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 30, 34\}$$

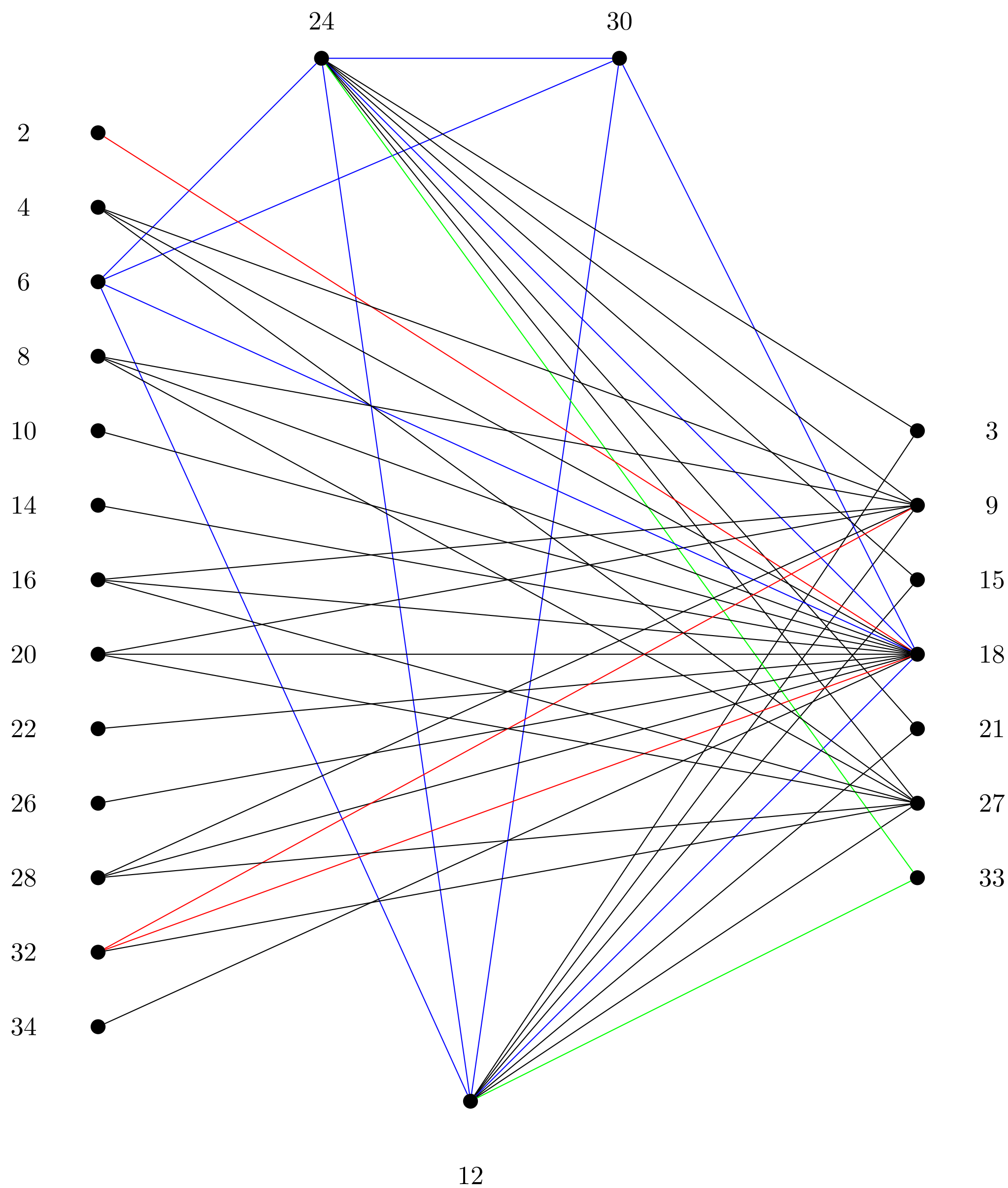

Figura 1: $\Omega(\mathbb{Z}_{36})$, grafo divisor de cero del anillo $\mathbb{Z}_{36}$.

7 Algoritmo principal del método para $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^r q^s})$

.

Entrada: n entero positivo mayor que 2.

Salida: Representación de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$.

Paso 1 Se chequea si n es primo, en cuyo caso $\mathbb{Z}_n$ no tiene divisores de cero. Por lo tanto, no se tiene representación de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$. En caso contrario.

Paso 2 Determinar la descomposición en factores primos de n, esto se traduce en escribir $n = 2^r q^r$, donde p, q son números primos distintos y r, s enteros positivos mayor o igual a 2.

Paso 3 Obtener el conjunto divisor de cero $\mathbb{Z}_n$.

Paso 4 Calcular los Conjuntos A, B, C y D, definidos como sigue:

1. $A = \{2k : 2k < n, \text{ con } 1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}\}$.
2. $B = \{kq : kq < n, \text{ con } k \text{ impar}\}$.
3. $C = \{x \in A : n \,|\, x2q\}$. Aquí $n \,|\, x2q$ significa que n divide al producto $x2q$.
4. $D = \{x \in C : n \,|\, xz, \text{ para todo } z \in A\}$.

Paso 5 Con los conjuntos obtenidos en el paso 4, se contruye la partición:

1. $V_1 = A - C$.
2. $V_2 = B \cup D$.
3. $V_3 = C - D$.

Paso 6 Con la expresión $|V_3| + 2$, se conoce el número de conjuntos r partitos que tendrá el grafo buscado.

Paso 7 Salida $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$.

Paso 8 Fin.

A continuación tabla con algunos valores de grafos r partitos.

n	Descomposición $p^r q^s$	$\Gamma(\mathbb{Z}_n)$
36	$2^2 3^2$	5-partito
72	$2^3 3^2$	7-partito
100	$2^2 5^2$	9-partito
108	$2^2 3^3$	6-partito
144	$2^4 3^2$	11-partito

Cuadro 2: Tabla con algunas clases de $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$

Referencias

[1] Andersen, D. and Livinston, P. *The zero divisor graph of a conmutative ring*, J. Algebra, **217** (1999), 434-447.

[2] Beck, I. *Coloring of Conmutative rings*, J. Algebra, **116** (1988), 288-226.

[3] Chartrand, G. and Lesniak, L. *Graphs and Digraphs*, Wadsworth and Brooks. 3era ed, California (1986).

[4] Fanelli, C. *Grafo Divisor de Zero de un Anillo Conmutativo*, Tesis de Maestría, Universidad de Maringa, Brazil, (2011).

[5] Otero, J.*Un método matricial para el cálculo de las constantes de Davenport y Olson k-baricéntricas.* Tesis de Maestría. Universidad de Oriente. Venezuela. 2011.

[6] Rojo, A. *Álgebra I.*, Buenos Aires, Argentina, 1983.

[7] Shuker, N.; Mohammad, H. and Ali, A. *The Zero Divisor Graph of* $\mathbb{Z}_{p^n q}$, International Journal of Algebra, **6** (2012), 1049-1055.

[8] Villarroel, F. *La constante de Olson k-baricéntrica y un teorema inverso de Erds-Ginzburg-Ziv.* Tesis Doctoral. Universidad Central de Venezuela. 2008.