

Divulgaciones Matemáticas Vol. 22, No. 2 (2021), pp. 66–75
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7487520>
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Divulgación de algunos teoremas de la geometría moderna entre los siglos XVII y XIX

Divulcation of some theorems of modern geometry between the XVII and XIX centuries

Eduardo Orellana (chileeduardo@gmail.com)
Departamento Matemática
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Santiago, Chile

Tobías Rosas Soto (tjrosas@gmail.com)
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8085-5011>
Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia
Maracaibo, República Bolivariana de Venezuela.

Resumen

Se establecen demostraciones alternativas y directas de algunos teoremas de la geometría moderna euclídea entre los siglos XVII y XIX como lo son el teorema de Vecten, el teorema de Dostor, teorema de Blanchet y el teorema de Viviani.

Palabras y frases clave: Geometría moderna, teorema de Vecten, teorema de Dostor, teorema de Balnchet, teorema de Viviani, demostraciones.

Abstract

Alternative and direct proofs of some theorems of euclidean modern geometry between the XVII and XIX centuries are established such as Vecten theorem, the Dostor theorem, of Blanchet and the theorem Viviani.

Key words and phrases: Modern geometry, Vecten's theorem, Dostor's theorem, Balnchet's theorem, Viviani's theorem, proofs.

1 Introducción

La demostración de los teoremas que se tratan bajo razonamiento clásico (deductivo), como lo son los teoremas de Vecten, Dostor, Blanchet y Viviani en el espacio euclídeo simple Ω , fue obtenida por Legendre en [7], Dostor en [4] y Viviani en [12]. En este trabajo, se muestran cuatro resultados: las pruebas de cuatro teoremas de los siglos XVII al XIX y es bajo razonamientos clásicos, en esencia, bajo los teoremas de Ceva (ver [2]) y Thales, de congruencia y semejanza de triángulos.

Recibido 20/09/2021. Revisado 18/10/2022. Aceptado 21/03/2022.
MSC (2010): Primary 51-XX; Secondary 51-03.
Autor de correspondencia: Eduardo Orellana

Se presenta la divulgación de dichas pruebas, dadas también por generaciones actuales como lo hace Orellana en [10], con figuras ilustrativas y de forma detallada para hacer más comprensible las ideas que se presenten.

2 Preliminares

A continuación se presenta una lista de la simbología que se usa en el trabajo:

Ω	plano euclídeo
A_i, B_i, C_i, \dots	puntos en Ω , para $i \in \mathbb{N}$
$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$	significa que $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ con i, j, k distintos entre sí.
\overleftrightarrow{AE}	recta que pasa por los puntos $A, E \in \Omega$.
\mathcal{L}	recta en Ω
\overline{AB}	segmento entre los puntos $A, B \in \Omega$.
\overrightarrow{AB}	rayo que inicia en A y pasa por B .
$\triangle ABC$	triángulo de vértices $A, B, C \in \Omega$
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza entre los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$
$X \cong Y$	congruencia entre las estructuras X e Y (segmentos, ángulos, triángulos)
$\square ABCD$	cuadrado de vértices $A, B, C, D \in \Omega$.
$\angle ABC$	ángulo de vértice en B , con lados \overline{BA} y \overline{BC} .
$m(X)$	medida de la estructura X (ángulo, segmento).
$a(\triangle ABC)$	área del triángulo $\triangle ABC$.

Ahora se presentan los teoremas que servirán de pilares fundamentales para el desarrollo de las demostraciones de los teoremas de Vecten, Dostor, Blanchet y Viviani.

Teorema 2.1 (Teorema de Tales). (ver [8]). *Si dos rectas cualesquiera son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que se determinan en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra recta.*

Teorema 2.2 (Primer Criterio de Semejanza). *Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.*

Teorema 2.3 (Teorema de Pitágora). (ver [1]). *El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.*

Teorema 2.4 (Teorema de Ceva). (ver [6]). *Dado un triángulo cualquiera $\triangle A_1A_2A_3$, si E_k es un punto interior del segmento $\overline{A_iA_j}$, para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces los segmentos $\overline{E_iA_i}$ (para $i = 1, 2, 3$) son concurrentes si, y solo si, se cumple que*

$$\frac{m(\overline{A_1E_3})}{m(\overline{E_3A_2})} \cdot \frac{m(\overline{A_2E_1})}{m(\overline{E_1A_3})} \cdot \frac{m(\overline{A_3E_2})}{m(\overline{E_2A_1})} = 1$$

Teorema 2.5 (Teorema de Euclides). (ver [1]). *Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en el vértice B y sea \overline{BD} la altura desde B al lado \overline{AC} , entonces*

$$[m(BD)]^2 = m(AD) \cdot m(DC)$$

Teorema 2.6 (ver [5]). *Dado el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$ y M_i el punto medio del segmento $\overline{A_jA_k}$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces se cumple que:*

1. *El triángulo $\triangle M_iM_jA_k$ es congruente con el triángulo $\triangle M_1M_2M_3$, para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.*
2. *El segmento $m(\overline{A_iA_j}) = 2m(\overline{M_iM_j})$, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$, es decir, $m(A_iM_k) = m(M_iM_j)$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$*

3 Algunos teoremas de la geometría euclídea entre los siglos XVII y XIX

En esta sección se establecen demostraciones de los teoremas de Vecten, Dostor, Blanchet y Viviani.

Teorema 3.1 (Teorema del punto de Vecten). *Sea el triángulo $\triangle A_1A_2A_3 \subset \Omega$ y $\square A_iA_jB_kC_k$ el cuadrado construido sobre los lados $\overline{A_iA_j}$, para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ respectivamente. Además, sea el punto P_k centro del cuadrado $\square A_iA_jB_kC_k$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Entonces, si A_i es opuesto a P_i , los segmentos $\overline{A_iP_i}$ son concurrentes en un único punto v llamado punto de Vecten, para $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Demostración. Considérese el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$ y el punto medio M_3 del lado $\overline{A_1A_2}$. Como P_3 es el centro del cuadrado $\square A_1A_2B_3C_3$, se tiene que $\overline{M_3P_3}$ cumple que $\overline{A_1A_2} \perp \overline{M_3P_3}$ de manera que $m(\overline{A_1M_3}) = m(\overline{A_2M_3}) = m(\overline{P_3M_3})$, y así $\triangle A_1M_3P_3 \cong \triangle A_2M_3P_3$ por el criterio de congruencia (L.A.L.) (ver Figura 1-(a)). En efecto: $\angle P_3M_3A_1 = \frac{\pi}{2} = \angle P_3M_3A_2$, pues $\overline{A_1A_2} \perp \overline{M_3P_3}$; el segmento $\overline{P_3M_3}$ es lado común de los triángulos $\triangle P_3M_3A_1$ y $\triangle P_3M_3A_2$; y $m(\overline{M_3A_1}) = m(\overline{M_3A_2})$ pues M_3 es el punto medio del lado $\overline{A_1A_2}$.

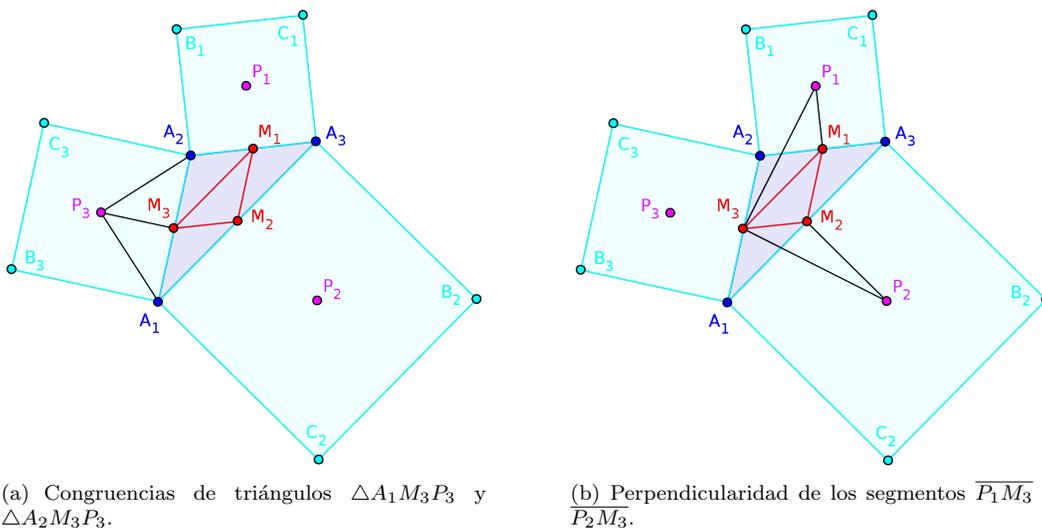


Figura 1: Teorema de Vecten

Notemos que el segmento $\overline{A_2M_1} \cong \overline{M_3M_2}$, por el Teorema 2.6 (ver Figura 1-(b)). Como $\overline{A_2M_1} \cong \overline{P_1M_1}$, entonces $\overline{M_3M_2} \cong \overline{P_1M_1}$. Por un razonamiento similar se obtiene que $\overline{M_3M_1} \cong \overline{A_1M_2} \cong \overline{M_2P_2}$. Como $\triangle A_2M_1M_3 \cong \triangle A_1M_3M_2$, se tiene que $\angle A_2M_1M_3 \cong \angle M_3M_2A_1$, por el Teorema 2.6, y como $\angle A_2M_1P_1 = 90^\circ = \angle A_1M_2P_2$, entonces $\angle M_3M_1P_1 \cong \angle M_3M_2P_2$. Así se tiene que $\triangle M_3P_1M_1 \cong \triangle M_3M_2P_2$, y por tanto los segmentos $\overline{M_3P_1}$ y $\overline{M_3P_2}$ son congruentes.

Luego, dado que $\angle M_3M_2A_2 + \angle M_2P_2M_3 + \angle P_2M_3M_2 = 90^\circ$, $\angle M_1M_3M_2 \cong \angle M_3M_2A_1$ y $\angle M_2P_2M_3 \cong \angle P_1M_3M_1$, entonces $\angle M_1M_3P_1 + \angle M_2M_3M_1 + \angle P_2M_3M_2 = 90^\circ$. De manera que el $\angle P_2M_3P_1$ es recto en M_3 ya que $\overline{P_1M_3} \perp \overline{P_2M_3}$. Pero como el $\angle P_1M_3P_2$ y el $\angle A_1M_3P_3$ son rectos, y el $\angle P_2M_3A_1$ es adyacente a ambos ángulos, entonces $\angle A_1M_3P_1 \cong \angle P_3M_3P_2$. Luego, tomando en cuenta que $m(\overline{A_1M_3}) = m(\overline{P_1M_3})$ se tiene que $\overline{A_1M_3} \cong \overline{P_1M_3}$, de manera que $\triangle A_1M_3P_1 \cong \triangle P_1M_3P_2$ por el criterio de congruencia (L.A.L.) (ver (a) en Figura 2). De esto último se obtiene que $\overline{P_2P_3} \cong \overline{A_1P_1}$.

Por otro lado, como la suma de los ángulos internos del triángulo $\triangle AP_1P_2$ suman 180° , y tomando en cuenta que: $\angle M_3P_1A \cong \angle M_3P_2A$; $\angle AP_1P_2 = \angle M_3P_1P_2 - \angle M_3P_1A$; y $\angle P_1P_2A = \angle M_3P_2A + \angle M_3P_2P_1$ se obtiene que $\overline{P_2P_3} \perp \overline{A_1P_1}$ (ver (a) en Figura 2).

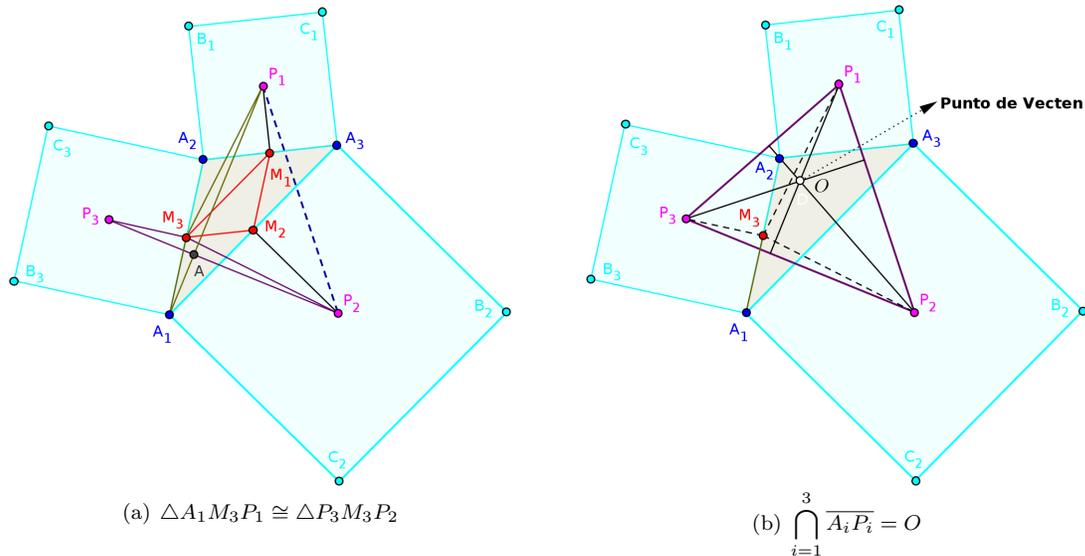


Figura 2: Representación del Teorema del punto de Vecten.

En forma análoga se obtiene que $\overline{P_1P_2} \cong \overline{A_3P_3}$ y $\overline{P_3P_1} \cong \overline{A_2P_2}$ de donde se deduce que $\overline{P_1P_2} \perp \overline{A_3P_3}$ y $\overline{P_3P_1} \perp \overline{A_2P_2}$, respectivamente. Por tanto, en el triángulo $\triangle P_1P_2P_3$ se tiene que $\overline{A_iP_i}$ contiene a la altura del lado $\overline{P_jP_k}$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Luego, como el ortocentro O del triángulo $\triangle P_1P_2P_3$ está dado por la intersección de sus alturas, se tiene que

$$\{O\} = \overline{A_1P_1} \cap \overline{A_2P_2} \cap \overline{A_3P_3}$$

y por tanto los segmentos $\overline{A_iP_i}$ son concurrentes en el punto $V = O$ (ver (b) en Figura 2), para $i \in \{1, 2, 3\}$. □

Teorema 3.2 (Teorema de Dostor). *En todo triángulo rectángulo al trazar una perpendicular desde el punto medio de uno de sus catetos sobre la hipotenusa, entonces la medida del otro cateto*

al cuadrado es la diferencia de las medidas de los segmentos al cuadrado determinados por el pie de la perpendicular trazada sobre la hipotenusa.

Demostración. Sea el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$ rectángulo en el vértice A_2 . Considérense el punto medio M del cateto $\overline{A_2A_3}$; la perpendicular $\overline{MD_1}$ trazada desde M sobre la hipotenusa $\overline{A_1A_3}$; y la perpendicular $\overline{A_2D_2}$ trazada desde el vértice A_2 sobre la hipotenusa $\overline{A_1A_3}$, entonces

$$\overline{MD_1} \cap \overline{A_1A_3} = \{D_1\} \quad \text{y} \quad \overline{A_2D_2} \cap \overline{A_1A_3} = \{D_2\}$$

$$m(\overline{A_2M}) = m(\overline{MA_3}) \quad (3.1)$$

de manera que los puntos A_1, D_2, D_1, A_3 colineales (ver Figura 3) y

$$m(\overline{D_2A_3}) = m(\overline{D_2D_1}) + m(\overline{D_1A_3}) \quad (3.2)$$

De igual forma, tomando el segmento $\overline{A_1A_3}$, se tiene

$$m(\overline{A_1D_1}) + m(\overline{D_1A_3}) = m(\overline{A_1A_3}) = m(\overline{A_1D_2}) + m(\overline{D_2A_3}). \quad (3.3)$$

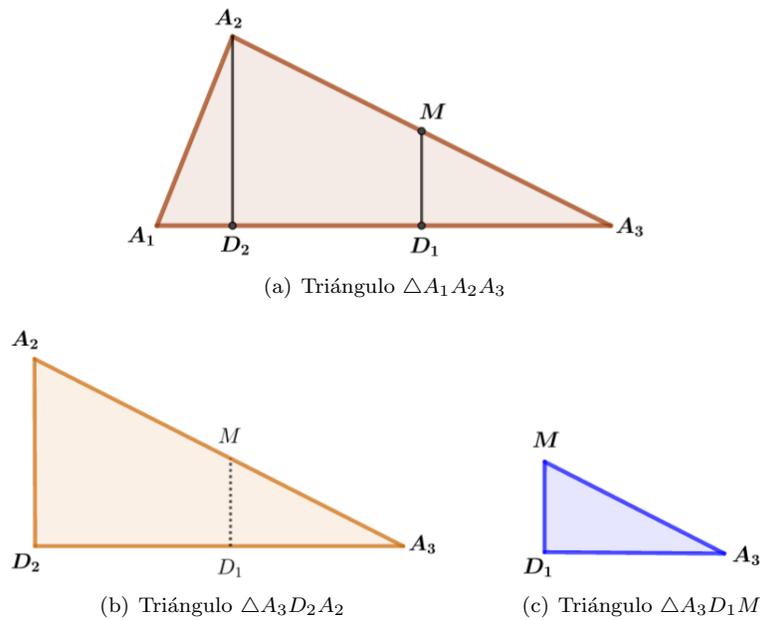


Figura 3: Representación para el Teorema de Dostor.

Las perpendiculares $\overline{A_2D_2}$ y $\overline{MD_1}$ determinan respectivamente los triángulos $\triangle D_2A_3A_2$ y $\triangle D_1A_3M$, y así se tiene que: $\angle A_2D_2A_3 \cong \angle MD_1A_3$ pues ambos son ángulos rectos en D_2 y D_1 , respectivamente; $\angle A_1A_3A_2 \cong \angle A_1A_3A_2$ por ser ángulo común; y $\angle D_2A_2A_3 \cong \angle D_1MA_3$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas. Así, por el Teorema 2.2 se tiene que $\triangle D_2A_3A_2 \sim \triangle D_1A_3M$, y por tanto

$$\frac{m(\overline{D_1A_3})}{m(\overline{A_3M})} = \frac{m(\overline{D_2A_3})}{m(\overline{A_2A_3})}. \quad (3.4)$$

Tomando en cuenta la ecuación (3.1) se tiene que

$$m(\overline{A_2A_3}) = 2m(\overline{A_2M}) = 2m(\overline{MA_3}),$$

y sustituyendo en la ecuación (3.4) se obtiene

$$m(\overline{D_2A_3}) = 2m(\overline{D_1A_3}) \quad (3.5)$$

De manera que, usando la ecuación (3.2), se tiene

$$m(\overline{D_1A_3}) = m(\overline{D_2D_1}) \quad (3.6)$$

y por tanto $\overline{D_1A_3} \cong \overline{D_2D_1}$.

También, tomando en cuenta las ecuaciones (3.2) y (3.3), se tiene que

$$m(\overline{A_1D_1}) = m(\overline{A_1D_2}) + m(\overline{D_1A_3})$$

y entonces

$$m(\overline{A_1D_2}) = m(\overline{A_1D_1}) - m(\overline{D_2D_1}) \quad (3.7)$$

Ahora, aplicando el Teorema 2.5 al triángulo $\triangle A_1A_2A_3$, se tiene que

$$[m(\overline{A_2D_2})]^2 = m(\overline{A_1D_2}) \cdot m(\overline{D_2A_3})$$

y usando las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) se obtiene que

$$[m(\overline{A_2D_2})]^2 = [m(\overline{A_1D_1}) - m(\overline{D_2D_1})] \cdot 2[m(\overline{D_2D_1})]$$

y así

$$[m(\overline{A_2D_2})]^2 = [2m(\overline{A_1D_1}) \cdot m(\overline{D_2D_1})] - 2[m(\overline{D_2D_1})]^2. \quad (3.8)$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 2.3 al triángulo $\triangle A_1D_2A_2$ y usando la ecuación (3.7), se tiene que

$$[m(\overline{A_1A_2})]^2 = [m(\overline{A_2D_2})]^2 + [m(\overline{A_1D_1}) - m(\overline{D_2D_1})]^2,$$

Desarrollando cuadrados y tomando en cuenta la ecuación (3.8) se tiene que

$$[m(\overline{A_1A_2})]^2 = [m(\overline{A_1D_1})]^2 - [m(\overline{D_2D_1})]^2$$

y por la ecuación (3.6) se finalmente que

$$[m(\overline{A_1A_2})]^2 = [m(\overline{A_1D_1})]^2 - [m(\overline{A_3D_1})]^2$$

□

Observación 3.1. Podemos probar directamente también para la última parte por congruencia de triángulos, osea que $\triangle A_1A_2D_2 \cong \triangle A_2A_2A_3$ y esto llevará a que

$$\frac{m(\overline{A_1A_2})}{[m(\overline{A_1D_1}) - m(\overline{D_2D_1})]} = \frac{[m(\overline{A_1D_1}) + m(\overline{D_1A_3})]}{m(\overline{A_1A_2})}.$$

Teorema 3.3 (Teorema de Blanchet). *Sean el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$ y $D_k \in \overline{A_iA_j}$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Si algún $\overline{A_iD_i}$ es altura del lado $\overline{A_jA_k}$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ y $P \in \overline{A_iD_i}$ para $i = 1, 2, 3$, entonces $\angle D_jD_iA_i \cong \angle D_kD_iA_i$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$*

Demostración. Sin pérdida de generalidad sea $\overline{A_3D_3}$ la altura del lado $\overline{A_1A_2}$ en el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$. Además, sean D_1 y D_2 puntos sobre los lados respectivos $\overline{A_2A_3}$ y $\overline{A_1A_3}$ tales que,

$$\overline{A_1A_2} \cap \overline{A_3D_3} = \{D_3\} \quad \overline{A_2A_3} \cap \overline{A_1D_1} = \{D_1\} \quad \overline{A_1A_3} \cap \overline{A_2D_2} = \{D_2\}$$

Como se tiene que $P \in \overline{A_iD_i}$ para $i = 1, 2, 3$ entonces

$$\overline{A_1D_2} \cap \overline{A_2D_3} \cap \overline{A_3D_1} = \{P\}$$

Trazando la recta \mathcal{L} paralela al lado $\overline{A_1A_2}$ del $\triangle A_1A_2A_3$, tal que

$$\mathcal{L} \cap \triangle A_1A_2A_3 = \{A_3\}.$$

y prolongando los segmentos $\overline{D_3D_2}$ y $\overline{D_3D_1}$ hasta los puntos E_1 y E_2 , respectivamente (ver Figura 4), se tiene que

$$\overrightarrow{D_3D_2} \cap \mathcal{L} = \{E_1\} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{D_3D_1} \cap \mathcal{L} = \{E_2\}.$$

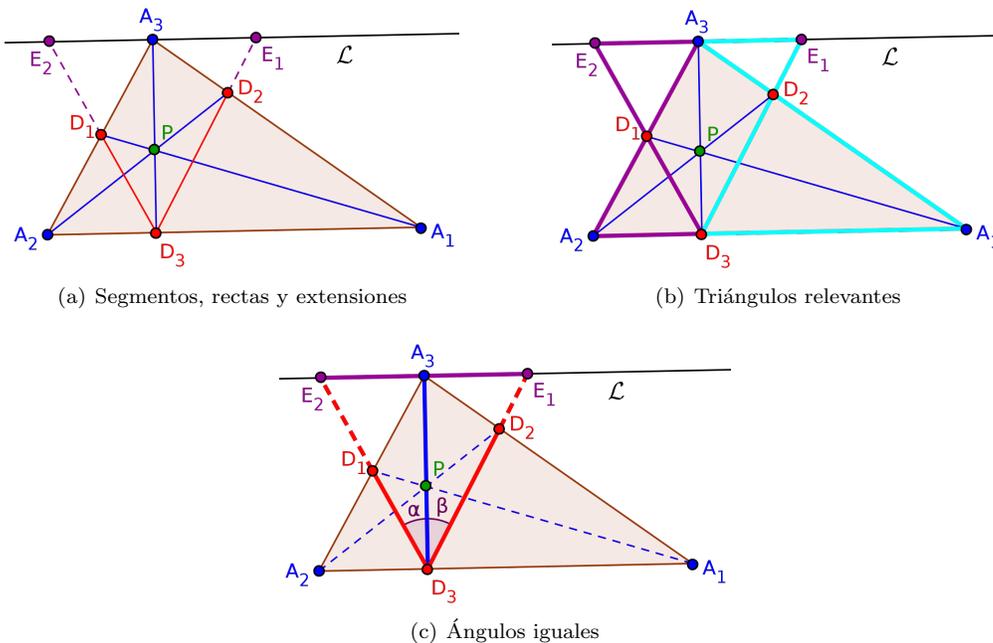


Figura 4: Representación para el Teorema de Blanchet.

Dado que $\overline{D_3A_3}$ es la altura de $\overline{A_1A_2}$ entonces $\angle PD_3A_2$ es recto, y como $\overline{A_1A_2} \parallel \overleftarrow{E_1E_2}$ entonces $\angle PA_3E_2$ es recto. Se busca probar que el triángulo $\triangle E_1D_3E_2$ con base $\overline{E_1E_2}$ es isósceles.

Nótese que se cumple lo siguiente: $\angle D_1 A_3 E_2 \cong \angle D_1 A_2 D_3$ y $\angle D_1 E_2 A_3 \cong \angle D_1 D_3 A_2$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas; y $\angle E_2 D_1 A_3 \cong \angle D_3 D_1 A_2$ por ser ángulos opuestos por el vértice. De manera que, por el Teorema 2.2, se tiene que $\triangle D_1 D_3 A_2 \sim \triangle D_1 E_2 A_3$ y por tanto

$$\frac{m(\overline{D_1 A_2})}{m(\overline{A_2 D_3})} = \frac{m(\overline{D_1 A_3})}{m(\overline{A_3 E_2})} \quad (3.9)$$

Por otra parte se tiene que: $\angle D_2 A_3 E_1 \cong \angle D_2 A_1 D_3$ y $\angle D_2 E_1 A_3 \cong \angle D_2 D_3 A_1$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas; y $\angle A_3 D_2 E_1 \cong \angle D_3 D_2 A_1$ por ser ángulos opuestos por el vértice. De manera que $\triangle D_2 A_3 E_1 \sim \triangle D_2 A_1 D_3$ y por tanto

$$\frac{m(\overline{D_3 A_1})}{m(\overline{A_1 D_2})} = \frac{m(\overline{E_1 A_3})}{m(\overline{A_3 D_2})} \quad (3.10)$$

Ahora, como las cevianas $\overline{A_1 D_1}$, $\overline{A_2 D_2}$, $\overline{A_3 D_3}$ en el triángulo $\triangle A_1 A_2 A_3$ son concurrentes en el punto P (ver [2]), y aplicando el Teorema 2.4, se tiene que

$$\frac{m(\overline{A_1 D_3})}{m(\overline{D_3 A_2})} \cdot \frac{m(\overline{A_2 D_1})}{m(\overline{D_1 A_3})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 D_2})}{m(\overline{D_2 A_1})} = 1. \quad (3.11)$$

Al multiplicar las ecuaciones (3.9) y (3.10) se tiene que,

$$\frac{m(\overline{D_1 A_2})}{m(\overline{A_2 D_3})} \cdot \frac{m(\overline{D_3 A_1})}{m(\overline{A_1 D_2})} = \frac{m(\overline{D_1 A_3})}{m(\overline{A_3 E_2})} \cdot \frac{m(\overline{E_1 A_3})}{m(\overline{A_3 D_2})}$$

y por tanto

$$\frac{m(\overline{D_1 A_2})}{m(\overline{A_2 D_3})} \cdot \frac{m(\overline{D_3 A_1})}{m(\overline{A_1 D_2})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 E_2})}{m(\overline{D_1 A_3})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 D_2})}{m(\overline{E_1 A_3})} = 1 \quad (3.12)$$

Ahora, aplicando transitividad en las ecuaciones (3.11) y (3.12), se obtiene que

$$\frac{m(\overline{A_1 D_3})}{m(\overline{D_3 A_2})} \cdot \frac{m(\overline{A_2 D_1})}{m(\overline{D_1 A_3})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 D_2})}{m(\overline{D_2 A_1})} = \frac{m(\overline{D_1 A_2})}{m(\overline{A_2 D_3})} \cdot \frac{m(\overline{D_3 A_1})}{m(\overline{A_1 D_2})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 E_2})}{m(\overline{D_1 A_3})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 D_2})}{m(\overline{E_1 A_3})}$$

de manera que cancelando términos se obtiene que

$$\frac{m(\overline{A_3 E_2})}{m(\overline{E_1 A_3})} = 1$$

Así, aplicando el Teorema 2.3 a los triángulos $\triangle E_2 A_3 D_3$ y $\triangle E_1 A_3 D_3$ se obtiene que $\overline{E_2 D_3} \cong \overline{E_1 D_3}$ lo que implica que $\alpha = \angle D_1 D_3 A_3 \cong \angle D_2 D_3 A_3 = \beta$. \square

Teorema 3.4 (Teorema de Viviani). *Sean un triángulo equilátero $\triangle A_1 A_2 A_3$ y P es un punto interior cualquiera al triángulo. Si $D_k \in \overline{A_i A_j}$ tal que $\overline{P D_k} \perp \overline{A_i A_j}$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces la medida de la altura del triángulo es igual a*

$$m(\overline{P D_1}) + m(\overline{P D_2}) + m(\overline{P D_3}).$$

Demostración. Sea el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$ equilátero de lados con medidas

$$m(\overline{A_1A_2}) = m(\overline{A_2A_3}) = m(\overline{A_1A_3}) = k \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

Como P es un punto interior al triángulo y $\overline{PD_k} \perp \overline{A_iA_j}$ ($D_k \in \overline{A_iA_j}$ tal que) para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces se obtiene que: $\overline{PD_2}$ es altura del $\triangle A_1PA_3$; $\overline{PD_3}$ es altura del $\triangle A_1PA_2$; y $\overline{PD_1}$ es altura del $\triangle A_2PA_3$.

Calculando el área de los triángulos determinados se tiene que

$$\begin{aligned} a(\triangle A_1A_3) &= \frac{k \cdot m(\overline{PD_2})}{2} & a(\triangle A_1PA_2) &= \frac{k \cdot m(\overline{PD_3})}{2} \\ a(\triangle A_2PA_3) &= \frac{k \cdot m(\overline{PD_1})}{2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sin pérdida de generalidad, tómesese la altura $\overline{A_3D}$ sobre el lado $\overline{A_1A_2}$ del $\triangle A_1A_2A_3$, así se obtiene que

$$a(\triangle A_1A_2A_3) = \frac{m(\overline{A_1A_2}) \cdot m(\overline{A_3D})}{2} = \frac{k \cdot m(\overline{A_3D})}{2}.$$

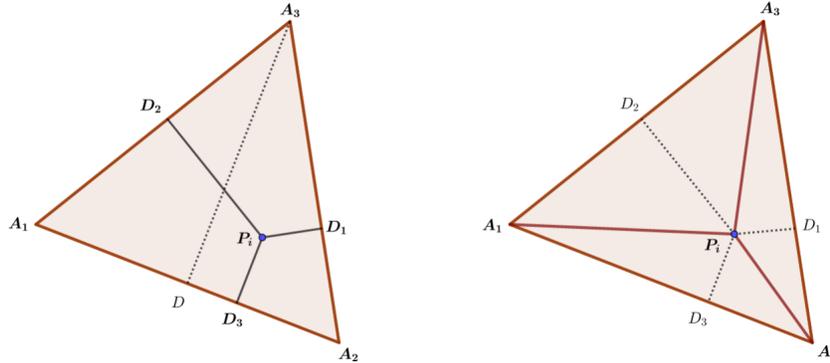


Figura 5: Representación para el Teorema de Viviani.

Luego, en términos de áreas equivalentes ocurre que (ver Figura 5),

$$a(\triangle A_1A_2A_3) = a(\triangle A_1PA_3) + a(\triangle A_1PA_2) + a(\triangle A_2PA_3).$$

y por tanto

$$\frac{k \cdot m(\overline{PD_2})}{2} + \frac{k \cdot m(\overline{PD_3})}{2} + \frac{k \cdot m(\overline{PD_1})}{2} = \frac{k \cdot m(\overline{A_3D})}{2}.$$

lo que implica que

$$\frac{k}{2} [m(\overline{P_iD_2}) + m(\overline{P_iD_3}) + m(\overline{P_iD_1})] = \frac{k}{2} \cdot m(\overline{A_3D}),$$

teniendo así que

$$m(\overline{PD_2}) + m(\overline{PD_3}) + m(\overline{PD_1}) = m(\overline{A_3D})$$

□

Observación 3.2. En concreto, podemos decir que la suma de las distancias desde un punto cualquiera del interior del triángulo equilátero hasta los lados de este, no depende del punto P . Esto es válido generalizando para polígonos regulares de $n \in \mathbb{N}$, ($n > 2$) lados. Considerando la altura del $\triangle A_1A_2A_3$ con medida $m(\overline{A_3D})$ igual a $\frac{m(\overline{A_1A_2})}{2}\sqrt{3}$, se tendrá un resultado análogo.

Referencias

- [1] Bárcenas, Diómedes; Vivenes, José; *Introducción a la Geometría plana*, Colección: Ciencias Básicas, Serie: Matemática, Consejo de Publicaciones de la Universidad de los Andes 1^a Edición, Mérida-Repubblica Bolivariana de Venezuela, 1998. ISBN 980-11-0165-2.
- [2] Ceva, G.; *De lineis rectis se invicem secantibus*, statica constructio, Mantua, 1678.
- [3] Dostor, G.; *Propriétés nouvelles de la tangente et de la normale aux courbes du second degré*. (160-171), París, 1878.
- [4] Dostor, G.; *Recherche des systèmes de deux polygones réguliers étoilés, inscrits dans le même cercle, qui sont tels que la surface de l'un soit double de la surface de l'autre*. (407-409), París, 1877.
- [5] Durán, Darío; *La Geometría Euclidiana*, Ediciones Astro Data S.A., Maracaibo-Venezuela, 2003, ISBN 980-12-0331-5.
- [6] Ivorra, Carlos; *Geometría*, Libro digital, Disponible en: <https://www.uv.es/ivorra/Libros/G.pdf>
- [7] Legendre, A. M.; *Éléments de Géométrie*, avec additions et modifications par M. A. Blanchet, deuxième édition, París, 1849.
- [8] López, Nayit; *Fundamentos de Geometría métrica plana*, 2^a Edición, EDILUZ, Maracaibo-Venezuela, 2000. ISBN 980-232-307-1.
- [9] Levy, S.; *Introducción a la geometría moderna*, México, 1983.
- [10] Orellana, E.; *Teoremas de la geometría moderna: Inclusión a través de la geometría dinámica*, Libro de Actas. ISBN 978-84-945722-3-4, (T-399), CIBEM VIII, Universidad Complutense, Madrid, 2017.
- [11] Ramírez, A.; *Trigonometría*, Notas, CIMAT, Ciudad de México, 2011.
- [12] Viviani, V.; *De maximis et minimis geometrica*. Praeceptorum Galilaem Lynceum, Florenti, 1659.