Divulgaciones Matemáticas Vol. 20 No. 1 (2019), pp. 95–99

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

El problema propuesto a continuación se planteó en la 32^a Olimpiada Centroamericana y del Caribe celebrada en Santo Domingo, República Dominicana, en junio del 2019.

145. Un *triminó* es una ficha rectangular de 1×3. ¿Es posible cubrir un tablero cuadrado de 8×8 con 21 triminós, de modo que quede exactamente un cuadradito de 1×1 sin cubrir? En caso afirmativo, determine todas las posiciones posibles en el tablero del cuadradito que queda sin cubrir.

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–25, 27–28, 44, 51, 54, 59, 69, 79, 82–91, 94–100, 103–106, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–129 y 133–143. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

26. [**8**(1) (2000) p. 89.] *Propuesto por Ángel Oneto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela*

Probar que existe una y sólo una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se verifica:

(a) $f(mn) = f(m)f(n)$.

(b) $m \neq n$ y $m^n = n^m \Longrightarrow f(m) = n$ ó $f(n) = m$.

(c) $m, n \geq 3$ y $m^n < n^m \Longrightarrow f(n) < f(m)$.

Solución del editor: Sea f una función que cumple (a), (b) y (c). De (a) se sigue que $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$, de donde $f(1) = 1$. Como $2^4 = 16 = 4^2$, de (b) se sigue que $f(2) = 4$ o $f(4) = 2$. Pero $f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2)^2$ es un cuadrado, luego no puede ser igual a 2. Es decir que $f(2) = 4$, y por (a) $f(2^k) = f(2)^k = 4^k = (2^k)^2$.

Si $n \geq 3$ entonces $(1 + \frac{1}{n})^n < e < 3 \leq n$, de donde $(n+1)^n < 3n^n \leq n^{n+1}$, y por (c) resulta $f(n) < f(n+1)$. Es decir que f es creciente para $n \geq 3$.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ que no sea potencia de 2. Para cualquier natural $t > 1$ existe un $k(t) \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k(t)} < n^t < 2^{k(t)+1}$. Elevando a la $\frac{2}{t}$ resulta $4^{\frac{k(t)}{t}} < n^2 < 4^{\frac{k(t)+1}{t}}$. Pero por ser f creciente también se tiene $f(2^{k(t)}) < f(n^t) < f(2^{k(t)+1})$, es decir $4^{k(t)} < f(n)^t < 4^{k(t)+1}$, de donde $4^{\frac{k(t)}{t}} < f(n) < 4^{\frac{k(t)+1}{t}}$. Pero $\lim_{n\to+\infty} 4^{\frac{1}{t}} = 1$, luego existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 4^{\frac{1}{t}} - 1 < \frac{1}{n^2}$, con lo cual

$$4^{\frac{k(t)+1}{t}} - 4^{\frac{k(t)}{t}} = 4^{\frac{k(t)}{t}}(4^{\frac{1}{t}} - 1) < n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1,$$

es decir, que n^2 y $f(n)$ están ambos en el intervalo $(4^{\frac{k(t)}{t}}, 4^{\frac{k(t)+1}{t}})$, que tiene longitud menor que 1, por lo tanto $f(n) = n^2$.

Hemos probado que si f cumple (a), (b) y (c) entonces $f(n) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora probaremos que $f(n) = n^2$ efectivamente cumple (a), (b) y (c), y por lo tanto es la única función que cumple las condiciones.

(a) es inmediato pues $f(mn) = (mn)^2 = m^2n^2 = f(m)f(n)$.

Estudiando la función $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$ para $x > 0$ se ve que es creciente en $(0, e)$ y decreciente en $(e, +\infty)$. Como $1 < g(e) < 2$ resulta que los únicos naturales $m \neq n$ tales que $m^n = n^m$ son $m = 2$ y $n = 4$ (o $m = 4$ y $n = 2$), y como $f(2) = 4$ vemos que f cumple (b).

Finalmente si $m, n \geq 3$ y $m^n < n^m$ entonces $m^{\frac{1}{m}} < n^{\frac{1}{n}}$, es decir $g(m) < g(n)$, y como g es decreciente en $(e, +\infty)$ resulta que $m > n$.

101. [**13**(1) (2005) p. 79.] ¿De los nùmeros positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos, cuàl ocupa la posiciòn 2005?

Solución del editor: Dados 2005 enteros consecutivos, sea n el término central. Entonces la suma de todos ellos es $(n - 1002) + (n - 1001) + \cdots + (n + 1002) = 2005n$, que es positiva si y sólo si $n > 0$. Por lo tanto estos números son 2005, $2005 \cdot 2, \ldots$ y el que ocupa la posición 2005 es $2005^2 = 4020025$.

102. [**13**(1) (2005) p. 79.] Demuestre que la ecuaciòn $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 = 2005$ no tiene soluciones enteras.

Solución del editor: Como $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 - 3 = (a^2 + c^2 + 3)(b^2 - 1)$, la ecuación planteada es equivalente a

$$(a^2 + c^2 + 3)(b^2 - 1) = 2002.$$

Ahora bien, $2002 \equiv 2 \pmod 4$, y como los cuadrados son congruentes con 0 ó 1 módulo 4, el primer factor de la izquierda es congruente con -1, 0 ó 1, y el segundo factor con -1 ó 0, por lo cual su producto es congruente con -1, 0 ó 1, y nunca con 2.

130. [**15**(1) (2007) p. 79.] *(IX OMCC, Problema 6.)* Desde un punto P exterior a una circunferencia S se trazan tangentes que tocan en A y B. Sea M el punto medio de AB. La mediatriz de AM corta a S en C (interior al ΔABP), la recta AC corta a la recta PM en G, y la recta PM corta a S en el punto D exterior al triángulo ΔABP. Si BD es paralelo a AC, demuestre que G es el punto donde concurren las medianas del ΔABP.

Solución por Wilson Pacheco Redondo (wpachecoredondo@gmail.com), Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Para este problema se tiene lo siguiente:

(a) Como el triángulo APB es isósceles entonces PM es la mediatriz de AB y por tanto paralela a la mediatriz de AM, de este hecho se deduce que C es el punto medio de AG y tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{CG} \\ \overline{AG} &= \overline{BG} \\ \overline{AD} &= \overline{BD} \end{aligned}$$

(b) El paralelismo de las cuerdas AC y BD implica que en la simetría de centro M, se tenga $S_M\left(\overleftrightarrow{AC}\right) = \overleftrightarrow{BD}$, como $S_M\left(\overleftrightarrow{PM}\right) = \overleftrightarrow{PM}$, entonces

$$S_M(G) = S_M\left(\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{PM}\right) = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{PM} = D$$

con lo que $\overline{AG} = \overline{BD}$. Así, el cuadrilátero $AGBD$ es un rombo.

(c) El paralelismo de las cuerdas AC y BD implica también que las mediatriz de una es también la mediatriz de la otra y en la simetría con respecto a dicha recta se correspondan los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, es decir, $\overline{AD} = \overline{CB}$.

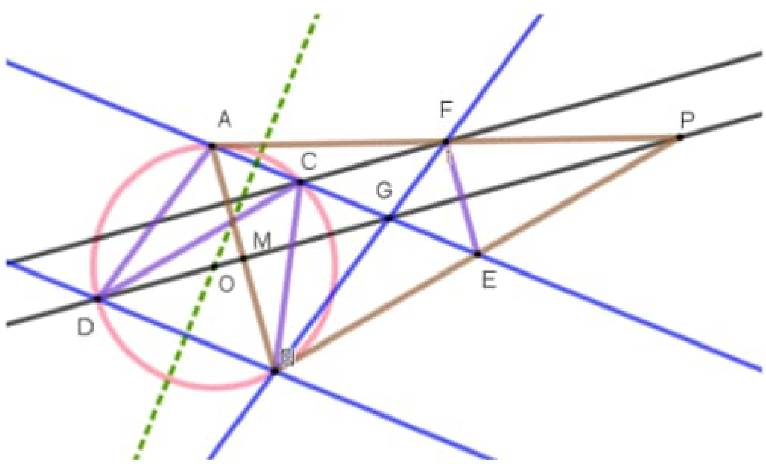

Figura 1: Construcción

Sean E y F son los puntos de intersección de AG con PB y BG con PA respectivamente. Notar que como $\overline{PM}$ es mediana del triángulo ABP, entonces para probar que G es la intersección de las medianas basta ver que $\overline{AF}$ es mediana del triángulo ABP.

Si consideramos los triángulos ECB y CBD tenemos; por 1. y 3. que $\overline{CB} = \overline{AD} = \overline{BD}$, los ángulos $\angle EBC$ y $\angle CDB$ son iguales, ya que ambos ángulos subtienden a la cuerda BC el primero es semi-inscrito y el segundo inscrito a la circunferencia dada y los ángulos $\angle ECB$ y $\angle CBD$ son iguales, ya que son alternos internos entre rectas paralelas.

Luego, por el criterio ángulo-lado-ángulo, los triángulos ECB y CBD son congruentes con lo que $\overline{CE} = \overline{CB} = \overline{AD} = \overline{AG}$. También tenemos que el cuadrilátero $CFBD$ tiene dos lados parelelos e iguales por lo que es un paralelogramo y en consecuencia $\overleftrightarrow{CD}$ es parelela a $\overleftrightarrow{BF} = \overleftrightarrow{BP}$ y $\overline{CD} = \overline{BF}$. Como C es punto medio de $\overline{AG}$ se deduce entonces que G es el punto medio de $\overline{CE}$.

Ahora en los triángulos GFP y GCD, tenemos $\overline{GF} = \overline{GC}$, los ángulos $\angle GFP$ y $\angle GCD$ son iguales por ser alternos internos entre rectas paralelas y los ángulos $\angle FGP$ y $\angle CGD$ son iguales por ser opuestos por el vértice. Luego, por el criterio ángulo-lado-ángulo, los triángulos ECB y CBD son congruentes con lo que $\overline{FP} = \overline{CD} = \overline{BF}$. Así, F es el punto medio de $\overline{BP}$ y $\overline{AF}$ es mediana del triángulo ABP, con lo que G, satisface lo requerido en el problema.

144. [**19**(2) (2018) p. 95.] Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que los tres números

$$x - y, \quad x^2 - y^2, \quad x^3 - y^3$$

son positivos y números primos. Demuestre que $x - y = 3$.

Solución por Tobías Rosas Soto (tjrosas@gmail.com), Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Para comenzar recuérdese que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \tag{1}$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \tag{2}$$

Ahora supóngase ahora que $x - y = p$, con p primo. Tomando en cuenta la ecuación (1) y el hecho de que $x^2 - y^2$ es un número primo, se tiene que

$$x + y = \frac{q}{p} \tag{3}$$

con q un número primo. De igual forma tomando en cuenta la ecuación (2), y el hecho de que $x^3 - y^3$ es un número positivo y primo, se tiene que

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{w}{p} \tag{4}$$

con w un número primo. Así,

$$\begin{cases} x - y = & p \\ x + y = & \dfrac{q}{p} \end{cases}$$

cuya solución es $x = \dfrac{q+p^2}{2p}$, $y = \dfrac{q-p^2}{2p}$. De manera que

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{q+p^2}{2p}\right)^2 + \left(\frac{q+p^2}{2p}\right)\left(\frac{q-p^2}{2p}\right) + \left(\frac{q-p^2}{2p}\right)^2 = \frac{3q^2+p^4}{4p^2}.$$

Luego, tomando en cuenta la ecuación (4) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{3q^2+p^4}{4p^2} &= \frac{w}{p} \\ 3q^2 + p^4 &= 4pw \\ 3q^2 &= p(4w - p^3) \qquad (5) \end{aligned}$$

Por el *Teorema de Factorizazción Única* se tiene que $p|3$ o $p|q^2$. Como 3, p y q son números primos, entonces $p = 3$ o $p = q$.

- Si $p = q$, usando la ecuación (5), entonces $3q = 4w - q^3$. De manera que $q|w$ o $q|4$, es decir, $q = w$ o $q = 2$.
  - Si $p = q = 2$, entonces $6 = 4w - 8$. Por tanto $w = \dfrac{7}{2}$, lo cual es absurdo pues w es un número primo.
  - Si $p = q = w$, entonces

    $$3p = 4p - p^3 \Longrightarrow p(p^2 - 1) = 0,$$

    de donde $p = 0$ o $p = \pm 1$, lo cual es absurdo pues p es un número primo.

Así, se tiene que $p = 3$.