

Representación de grafos divisores de cero para anillos

Representation of graphs zero divisores for rings

Juan Otero (jmotero746@gmail.com)

Departamento de Informática
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, Venezuela.

José Salazar (jsalaza2009@hotmail.com)

Felicia Villarroel (feliciavillarroel@gmail.com)

Departamento de Matemática
Universidad de Oriente
Cumaná, Venezuela.

Resumen

El grafo divisor de cero para un anillo conmutativo R , denotado por $\Gamma(R)$, es un grafo cuyos vértices son los elementos del conjunto de divisores de cero, no nulos, en R . Dos vértices distintos x e y son adyacentes en $\Gamma(R)$ si y sólo si $x \cdot y = 0$. En este trabajo, se recopilan algunos resultados relevantes de los $\Gamma(R)$ y además, se presenta un algoritmo para la representación de $\Gamma(R)$ para los anillos \mathbb{Z}_n .

Palabras y frases clave: Conjunto divisor de cero, grafo divisor de cero, algoritmo.

Abstract

The zero-divisor graph for a commutative ring R , denoted by $\Gamma(R)$, is a graph whose vertices are the elements of the set of divisor of zero, different of zero, on R . Two distinct vertices x and y are adjacent in $\Gamma(R)$ if and only if $x \cdot y = 0$. In this work, they give some relevant results of the $\Gamma(R)$ and also, an algorithm is presented for the representation of $\Gamma(R)$ for rings of \mathbb{Z}_n .

Key words and phrases: Set zero divisor, zero dividers, algorithm.

1 Introducción

El estudio de los grafos divisores de cero fue presentado por primera vez en 1988 por Istan Beck [3], en su artículo denominado “*Coloring of commutative ring*”. Allí asocian un grafo simple a un anillo conmutativo R , donde los vértices son los elementos del anillo y la adyacencia entre

Recibido 29/09/2018. Revisado 10/10/2018. Aceptado 15/12/2018.

MSC (2010): Primary 05C85; Secondary 13M05.

Autor de correspondencia: Juan Otero

los vértices se obtiene a través de los divisores de cero, es decir, dos vértices distintos x e y son adyacentes si y sólo si $x \cdot y = 0$.

En aquel momento el objetivo básico era estudiar las coloraciones de anillos conmutativos, con la idea de establecer una relación entre la teoría de grafo y la teoría de anillos conmutativos. Un resultado importante de Beck fue la siguiente conjetura: $\chi(R) = \text{clique } R$, donde $\chi(R)$ denota el número cromático de un grafo, ese estudio fue continuado en [2], donde cabe señalar que se da un contraejemplo a la conjetura dada por Beck donde R es un anillo local finito. Pero después en el año 1999, Andersen y Livistong [1], publican el artículo “*The zero divisor graph of a commutative ring*” y es en este artículo donde se estudian las propiedades y estructuras de los grafos divisores de cero, los cuales también se estudian en este trabajo, estos se denotan por $\Gamma(R)$, donde R es un anillo conmutativo. Una diferencia que se encuentra en la definición del grafo divisor de cero en ese artículo es la inclusión del cero en los conjuntos divisores de ceros, pero a la hora de las adyacencia en el grafo divisor de cero no es tomado en cuenta, y es así, como muchos autores hasta los actuales momentos, incluyen el cero en este tipo de grafos para tener más propiedades y estructuras a la mano.

En [9], se dan algunas representaciones y caracterizaciones de los grafos divisores de cero, para los anillos conmutativos de la forma $\mathbb{Z}_{p^n q}$. En [4], se introduce la definición de conjuntos r -partitos, definición clave para la representación de los grafos divisores de cero. Así como también caracterizaciones, el diámetro y el número de clique para estos grafos. Como primer aporte en este trabajo de investigación, se trabaja con estructuras algebraicas tales como los anillos conmutativos de la forma $\mathbb{Z}_{p^n q}$, para p y q primos distintos y n entero positivo, donde se estudian las representaciones de los grafos divisores de cero que se obtendrán para cada caso, así como su caracterizaciones, el diámetro, número de clique y como segundo aporte se da un método para la elaboración de un algoritmo donde se pueda representar estos grafos para las estructuras algebraicas antes mencionadas y dejar como tarea abierta la implementación este método en un lenguaje computacional. Cabe de destacar, que estos métodos algorítmicos que se han venido presentando en estas investigaciones han sido pilares, para articular teorías ya existentes como lo son la Teoría de Ramsey, Teoría Combinatoria, Teoría de Problemas Baricéntricos y la Teoría del Álgebra por mencionar algunas, con las denominadas constantes baricéntricas.

2 Conjunto divisor de cero

A continuación se presentan definiciones y resultados relacionados con los conjuntos divisores de cero.

Definición 1. Sea R un anillo, un elemento $x \in R$, se llama divisor de cero, si existe $y \in R$, distinto de cero, tal que $x \cdot y = 0$.

Nota 2.1. En este trabajo de investigación, se trabajará muy a menudo con el anillo conmutativo $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$, el cual no es más que el conjunto de las clases módulo m . En lo que continúa de escritura, se suprimirá las barras para denotar al mismo anillo \mathbb{Z}_m , en caso contrario se informará.

Definición 2. Aquel conjunto para el cual, cada vez que se elijan dos elementos no nulos x e y en un anillo R , se cumple $x \cdot y = 0$. Se denomina conjunto divisor de cero. Este trabajo se denota al conjunto divisor de cero de un anillo R , por $\Omega(R)$.

Ejemplo 1. Sea el anillo conmutativo siguiente $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Su conjunto divisor de cero es:

$$\Omega(\mathbb{Z}_{10}) = \{2, 4, 5, 6, 8\}.$$

Nota 2.2. Otra manera de ver $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$, son los elementos no primos relativos con 10.

Otros anillos R a los cuales también se les calcula $\Omega(R)$ son los siguientes:

Ejemplo 2. Sea el anillo conmutativo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Su conjunto divisor de cero es: $\Omega(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Puesto que:

$$\begin{aligned}(1, 0) \times (0, 1) &= (0, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (1, 0) \times (1, 1) &= (1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ (0, 1) \times (1, 1) &= (0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

Ejemplo 3. Sea el anillo $R = \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{x^2} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, x, x + \bar{1}, x + \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2}x + \bar{1}, \bar{2}x + \bar{2}\}$. Su conjunto divisor de cero es: $\Omega\left(\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{x^2}\right) = \{x, \bar{2}x\}$. Puesto que:

$$x \cdot \bar{2}x = \bar{2}x^2 = \bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

Los siguientes son resultados relacionados con los conjuntos divisores de cero. En [8], aparecen los siguientes corolarios

Corolario 2.1. Sea el anillo $R = \mathbb{Z}_p$ no tiene divisores de cero si y sólo si p es primo.

Corolario 2.2. Un anillo no tiene divisores de cero si y sólo si se cumple la ley cancelativa del producto para todo elemento no nulo del anillo.

En [9] aparece el siguiente resultado, aquí se presenta una demostración.

Lema 2.1. El número de todos los divisores de cero para $k/p^n q$ son $\frac{p^n q}{k} - 1$

Demostración. Sean p, q , primos distintos y $n \in \mathbb{Z}$. Además, $R = \mathbb{Z}_{p^n q}$ un anillo y $\Omega(R)$ su conjunto divisor de cero, de la forma $\Omega(R) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$. Supóngase que $k \in \Omega(R)$ tal que $k/p^n q$, esto significa que existe $0 \neq b \in \Omega(R)$ de manera que $k \cdot b = p^n q$. Supongamos ahora que, $|\Omega(R)| \neq \frac{p^n q}{k} - 1$, para algún k , esto implica que existen $a, b \in \Omega(R)$ tal que $a \cdot b = 0$, esto quiere decir, que $a = 0$ ó $b = 0$, pero esto es una contradicción, puesto $b \neq 0$ y $b = 0$, proviene de suponer que $|\Omega(R)| \neq \frac{p^n q}{k} - 1$. \square

Seguidamente en el artículo [6], tiene el siguiente resultado

Proposición 2.1. Sea R un anillo finito, entonces cada elemento de R es invertible o divisor de cero.

Demostración. Sea $a \in R$. Si $a \in \Omega(R)$, significa que a es un divisor de cero. Por otro lado, si a no pertenece a $\Omega(R)$, entonces $a \neq 0$ y para todo $b \in R - \{0\}$, se tiene que $a \cdot b \neq 0$. Escribiendo R , de la forma $R = \{0, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ multiplicando cada elemento de R por a se obtiene $a \cdot 0 = 0$ y $a \cdot a_i \neq 0$, $\forall i$ con $2 \leq i \leq n$. Si $i \neq j$, $a \cdot a_i \neq a \cdot a_j$, caso contrario, $a(a_i - a_j) = 0$, más aún si a no pertenece a $\Omega(R)$, así existe $a_k \in R$, con $2 \leq k \leq n$. Tal que $a \cdot a_k = 1$ y por lo tanto a es invertible. \square

El siguiente teorema dado en [6], es fundamental para futuras investigaciones conectadas por los grafos divisores de cero y anillos de polinomios.

Teorema 2.1 (Teorema de McCoy). Sea R un anillo. Un polinomio $f \in R[x]$ es un divisor de cero si y sólo si, existe $r \in R[x]$ distinto de cero tal que $r \cdot f = 0$.

3 Grafo divisor de cero

En esta sección, se presenta una definición de grafo divisor de cero entre las muchas que existen, y algunos resultados relacionados con los mismos. En este apartado los anillos de trabajo se consideran conmutativos y con identidad. A continuación la siguiente definición de conjunto r -partitos es bueno conocerla puesto que es crucial en la construcción de los grafos divisores de cero, aquí propuestos.

Definición 3. Los conjuntos V_1, V_2, \dots, V_r , son llamados r -partitos del conjunto V , si cumplen lo siguiente:

1. $V_i \neq \emptyset, \forall i = 1, 2, \dots, r$.
2. $V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i, j = 1, 2, \dots, r$.
3. $\bigcup_{i=1}^r V_i = V$

Otra definición importante es la siguiente:

Definición 4. Un grafo es un par de conjuntos (V, E) , donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices, nodos o puntos y E es un conjunto formado por pares no ordenados de elementos de V llamados lados, aristas o líneas,

Definición 5. Sea R un anillo conmutativo, el grafo divisor de cero de R , el cual se denotará por $\Gamma(R)$, se define por:

$$\Gamma(R) = (V(\Gamma(R)), E(\Gamma(R)))$$

donde $V(\Gamma(R))$ es el conjunto formado por los elementos del conjunto divisor de cero de R , es decir, $\Omega(R) = V(\Gamma(R))$ y $E(\Gamma(R)) = \{(x, y) / x, y \in V(\Gamma(R)); x \cdot y = 0; x \neq y\}$

En [9], se da el siguiente el resultado fundamental para los $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})$

Teorema 3.1. Si p and q son primos distintos y n es un entero positivo mayor que 1, entonces $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})$ es:

- $p^{\frac{n}{2}}$ -partito, si n es par.
- $(p^{\frac{n-1}{2}} + 1)$ -partito, si n es impar.

Ejemplo 4. Tomando como referencia el anillo $\mathbb{Z}_{24} = \mathbb{Z}_{2^3 3}$, se tiene que $p = 2$, $q = 3$ y $n = 3$. De donde $p^{\frac{n-1}{2}} + 1 = 2^{\frac{3-1}{2}} + 1 = 3$. Así, $\Gamma(\mathbb{Z}_{24})$ es un grafo simple 3-partito.

De igual manera $\mathbb{Z}_{50} = \mathbb{Z}_{5^2 2}$, de donde $p = 5$, $q = 2$ y $n = 2$. Así, $(p^{\frac{n}{2}}) = 5^{\frac{2}{2}} = 5$. Es decir, $\Gamma(\mathbb{Z}_{50})$ es un grafo simple 5-partito.

4 Clique, diámetro y girth de $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$

A los grafos divisores de cero también se le asocian el clique, diámetro y girth, como se verá a continuación.

Definición 6. Un grafo simple $G = (V, E)$ es completo, si cada uno de los vértices es adyacente a los restantes vértices del grafo G , el grafo completo de orden n es denotado por K_n .

Definición 7. Todo subgrafo K_n , de cualquier $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$ es llamado un **Clique**.

Definición 8. El número de clique de $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$, denotado por $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_m))$, es el mayor entero $r \geq 1$, tal que $K_r \subset \Gamma(\mathbb{Z}_m)$. Es decir, es el tamaño del clique maximal.

Definición 9. La distancia entre un par de vértices de un grafo G , es la longitud del camino más corto entre ellos. Si no existe tal camino se dice que la distancia es infinita.

Definición 10. El diámetro del $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$, es la mayor distancia entre cualquiera dos vértices distintos. Tal distancia se denotará por $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_m))$

Un resultado importante que aparece en [1], en el cálculo del diámetro de $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})$ es el siguiente:

Teorema 4.1. Si p y q son primos distintos y n es un entero, $n \geq 1$. Entonces $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})) = 3$

Definición 11. El girth de un $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$, es la longitud del ciclo más corto. El girth de $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$, se denotará por $\Phi(\Gamma(\mathbb{Z}_m))$

Ejemplo 5. Sea el grafo divisor de cero del anillo \mathbb{Z}_{50} , esto es $\Gamma(\mathbb{Z}_{50})$, entonces:

- $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_{50})) = 5$.
- $\Delta(\Gamma(\mathbb{Z}_{50})) = 3$.
- $\Phi(\Gamma(\mathbb{Z}_{50})) = 3$.

Ejemplo 6. Para el grafo $\Gamma(\mathbb{Z}_{18}) = \Gamma(\mathbb{Z}_{3^2 2})$ todos los subgrafos completos no-isomorfos para $\Gamma(\mathbb{Z}_{3^2 2})$ son K_2 y K_3 . Por lo tanto, $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_{18})) = 3$

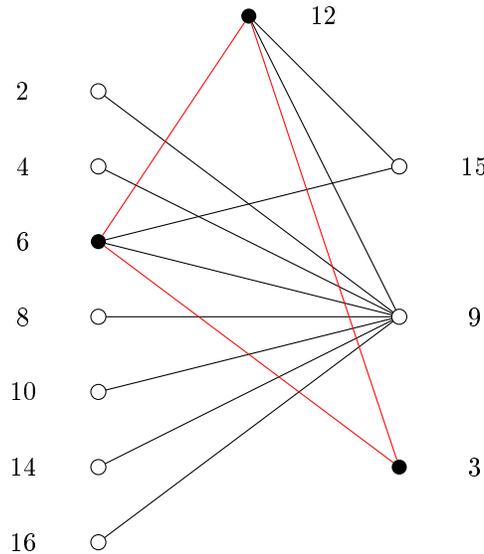


Figura 1. Grafo cero divisor del anillo \mathbb{Z}_{18} , con su clique maximal señalado en rojo

5 Método de representación

En esta sección se muestra un método para representar los $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})$, basado en la teoría de anillos, conjunto divisor de cero y conjuntos r -partitos. Es oportuno señalar, que ya existen una gran cantidad de métodos en este estilo, por ejemplo en [10], se presenta un método que articula la teoría de órbitas con las constantes baricéntricas y en [7], se da un método matricial que relaciona a las constantes baricéntricas y la teoría de matrices, en este último método se implementó con el lenguaje de computación conocido como MatLab.

5.1 Método

Supóngase que se quiere representar el grafo divisor de cero del anillo \mathbb{Z}_m , estos anillos trabajan con las clases de módulo m . En primer lugar, se chequea si m es primo. Si m es primo, entonces m no tiene divisores de cero y por lo tanto no existe su grafo divisor de cero, fundamentado en el corolario: “si p es primo entonces, \mathbb{Z}_p no tiene divisores”. En caso contrario, se procede a descomponer m en la forma $p^n q$, donde p, q son primos, a través de sus factores primos. Luego, se busca el conjunto divisor de cero del anillo $\mathbb{Z}_{p^n q}$. Seguidamente se busca una partición del conjunto divisor de cero, obtenido previamente, a través de la definición de conjuntos r -partitos, luego por teorema dado en [1], se chequea:

- $p^{\frac{n}{2}}$ -partito, si n es par.
- $(p^{\frac{n-1}{2}} + 1)$ -partito, si n es impar.

se tiene el tipo de grafo que se generará y por último se realiza la representación de dicho grafo.

6 Ejemplo de aplicación del método

Ejemplo 7. Representar del grafo divisor de cero del anillo $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{20}$.

Paso 0: Se chequea si $m = 20$ es primo, si es cierto $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$ no existe. Sino continuar con el siguiente paso.

Paso 1: Se descompone $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{20}$ en la forma $\mathbb{Z}_{p^n q}$, esto es, $\mathbb{Z}_{20} = \mathbb{Z}_{2^2 5}$

Paso 2: En este paso se procede a calcular el conjunto divisor de cero del anillo, esto es

$$\Omega(\mathbb{Z}_{20}) = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

Paso 3: Aquí se usa la definición de conjuntos r -partitos, para buscar una partición de $\Omega(\mathbb{Z}_{20})$, una partición es:

$$\begin{aligned} v_1 &= \{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\} \\ v_2 &= \{5, 10, 15\} \end{aligned}$$

Paso 4: Construcción o representación de $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$

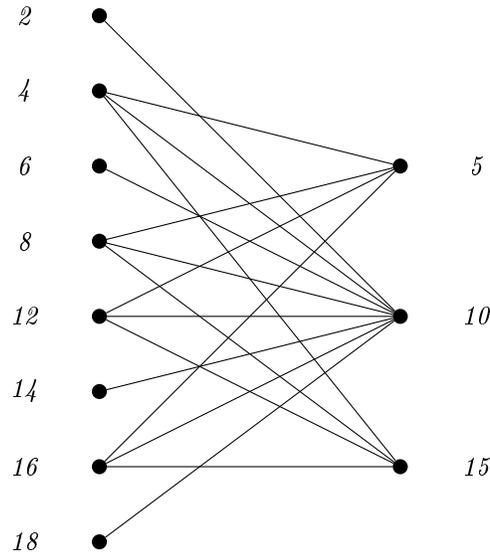


Figura 2. Grafo divisor de cero del anillo \mathbb{Z}_{20}

7 Algoritmo principal del método para $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n q})$

Entrada: m entero positivo mayor o igual a 10.

Salida: Representación de $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$.

Paso 0: Se chequea la condición siguiente dada por corolario: Si m es primo, entonces \mathbb{Z}_m no tiene divisores de cero. Por lo tanto, no se tiene representación de $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$. En caso contrario.

Paso 1: Descomponer m en sus factores primos, esto se traduce en escribir, $m = p^n q$, donde p, q son números primos y n un entero positivo mayor o igual a 2.

Paso 2: Obtener el conjunto divisor de cero \mathbb{Z}_m .

Paso 3: Con los elementos del conjunto divisor de cero, se busca una partición de este conjunto a través de la definición de conjuntos r -partitos.

Paso 4: En este paso se busca, a través del valor de n el tipo de grafo que se generará. Esto se garantiza por Teorema.

Paso 5: Aquí, se realiza la representación o construcción del grafo $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$.

Paso 6: Salida $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$.

Paso 7: Fin.

Cuadro 1: Tabla con algunas clases de $\Gamma(\mathbb{Z}_m)$

m	Descomposición $p^n q$	$\Gamma(\mathbb{Z}_m)$
12	$2^2 3$	2-partito
18	$3^2 2$	3-partito
20	$2^2 5$	2-partito
24	$2^3 3$	3-partito
28	$2^2 7$	2-partito
40	$2^3 5$	3-partito
48	$2^4 3$	4-partito
50	$5^2 2$	5-partito
56	$3^2 7$	3-partito
96	$7^2 2$	7-partito

Referencias

- [1] Andersen, D. and Livinston, P. *The zero divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra, **217** (1999), 434–447.
- [2] Andersen, D. and Nasser, M. *Becks Coloring of Commutative ring*, J. Algebra, **159** (1993), 500–514.
- [3] Beck, I. *Coloring of Commutative rings*, J. Algebra, **116** (1988), 288–226.
- [4] Chartrand, G. and Lesniak, L. *Graphs and Digraphs*, Wadsworth and Brooks. 3era ed, California 1986.
- [5] Cordova, N.; Gholston, C. and Hauser, H. *The Structure of Zero-Divisor Graphs*, J. Algebra, 2005, prep print.
- [6] Fanelli, C. *Grafo Divisor de Zero de un Anillo Conmutativo*, Tesis de Mestr Universidad de Maringa, Brazil, 2011.
- [7] Otero, J. *Un Método matricial para el cálculo de las constantes de Davenport y Olson k -baricéntricas*. Tesis de Maestría. Universidad de Oriente. Venezuela, 2011.
- [8] Rojo, A. *Algebra I.*, Buenos Aires, Argentina, 1983.
- [9] Shuker, N.; Mohammad, H. and Ali, A. *The Zero Divisor Graph of $\mathbb{Z}_{p^n q}$* , International Journal of Algebra, **6** (2012), 1049–1055.
- [10] Villarroel, F. *La constante de olson k -baricéntrica y un teorema inverso de Erds-Ginzburg-Ziv*. Tesis Doctoral. Universidad Central de Venezuela, 2008.