Divulgaciones Matemáticas Vol. 19 No. 1 (2018), pp. 74–76

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

El problema propuesto a continuación se planteó en la 32^a Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM) celebrada en Puerto Iguazú, Argentina, en septiembre del 2017. La delegación venezolana estuvo integrada por dos estudiantes: Amanda Vanegas Ledesma, colegio San Francisco de Asís, Maracaibo, quien obtuvo medalla de plata, y Laura Queipo Morales, colegio San Vicente de Paul, Maracaibo, quien obtuvo medalla de bronce. El líder de la delegación fue el editor de esta sección.

143. (32^a OIM, problema 5) Dado un entero positivo n, se escriben todos sus divisores enteros positivos en un pizarrón. Ana y Beto juegan el siguiente juego: Por turnos, cada uno va a pintar uno de esos divisores de rojo o azul. Pueden elegir el color que deseen en cada turno, pero solo pueden pintar números que no hayan sido pintados con anterioridad. El juego termina cuando todos los números han sido pintados. Si el producto de los números pintados de rojo es un cuadrado perfecto, o si no hay ningún número pintado de rojo, gana Ana; de lo contrario, gana Beto. Si Ana tiene el primer turno, determinar para cada n quién tiene estrategia ganadora.

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–28, 44, 51, 54, 59, 69, 79–91, 94–106, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–130 y 132–142. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

72. [**11**(1) (2003) p. 84.] Encontrar el número de sucesiones de n enteros positivos, no necesariamente distintos, que satisfacen la siguiente condición: Para cada $k \geq 1$, si el número $k+1$ aparece en la sucesión, entonces el número k también aparece. Más aún, k aparece en la sucesión por primera vez antes que la última aparición de $k+1$.

Solución del editor: Llamemos n-lista a una sucesión de n enteros que cumple las condiciones del enunciado. Hay una sola 1-lista, a saber, 1. Hay dos 2-listas: 1, 1 y 1, 2. Hay seis 6-listas: 1, 1, 1; 1, 1, 2; 1, 2, 1; 1, 2, 2; 2, 1, 2 y 1, 2, 3. Conjeturamos que para cualquier $n \geq 1$ hay $n!$ n-listas. Para probarlo trataremos de encontrar una biyección entre las n-listas y las permutaciones de los enteros del 1 al n.

Consideremos una n-lista a que contenga m_1 1's, m_2 2's,..., mk k's, en algún orden (los m_i son enteros positivos y su suma es n). Sea $\pi(a)$ la permutación siguiente; reemplacemos los 1's en a, de derecha a izquierda, por los números 1, 2,..., m_1. A continuación reemplacemos los 2's en a, de derecha a izquierda, por los números m_1+1, m_1+2,..., m_1+m_2, y se sigue de este modo con los 3's, 4's,..., k's. Por ejemplo $\pi(1,3,2,3,2,1,3) = (2,7,4,6,3,1,5)$.

Veamos ahora que a partir de $\pi(a)$ se puede recuperar a. Sea $1 \leq r \leq k-1$. La posición que ocupa el valor $S_r = m_1+m_2+\cdots+m_r$ en $\pi(a)$ es la posición que ocupa que ocupa el r que se encuentre más a la izquierda en a. La posición que ocupa S_r+1 en $\pi(a)$ es la posición que ocupa el término $r+1$ que se encuentre más a la derecha en a. Como a cumple las condiciones del enunciado, el número S_r aparece antes que S_r+1 en $\pi(a)$. Si $S_{r-1} < t < S_r$, las posiciones que t y $t+1$ ocupan en $\pi(a)$ se encuentran, en la lista a, ambas ocupadas por el mismo número r. Como esas dos apariciones en a fueron reemplazadas de derecha a izquierda por t y $t+1$, respectivamente, se sigue que el número t aparece antes de $t+1$ en $\pi(a)$ para los valores de t que coinciden con S_r, $1 \leq r \leq k-1$.

Ahora, dada $\pi(a)$ consideremos todos los t que aparecen antes que $t+1$ en $\pi(a)$. Éstos deben ser, en orden creciente, los números S_1, S_2,..., S_{k-1}. Además $S_k = n$. Esto significa que, para $1 \leq r \leq k$, el número r aparece $m_r = S_r - S_{r-1}$ veces en a. Las m_r posiciones que r ocupa en la lista a deben ser precisamente las posiciones que los números $S_{k-1}+1$, $S_{k-1}+2$,..., S_r ocupan en $\pi(a)$. Esto define, de manera única, la lista a.

Por lo tanto se tiene una biyección entre las n-listas y las permutaciones de los enteros del 1 al n, lo que demuestra que el número de n-listas es $n!$.

125. [**14**(2) (2006) p. 78.] La OMCC es una competencia anual de matemáticas. En el 2007 se lleva a cabo la novena olimpiada. ¿Para cuáles enteros positivos n se cumple que n divide al año en que se realiza la n-ésima olimpiada?

Solución del editor: Sea $a(n)$ el año en que se realiza la n-ésima olimpiada. Entonces se tiene que $a(n) = 1998+n$, por lo que n divide a $a(n)$ si y sólo si n divide a 1998. Por lo tanto los n que cumplen con la condición son los divisores de 1998, y como $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ se tienen $(1+1)(3+1)(1+1) = 16$ valores posibles de n: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74, 111, 222, 333, 666, 999 y 1998.

127. [**14**(2) (2006) p. 78.] Sea S un conjunto finito de números enteros. Suponga que para cualquier par de elementos p, q de S, con $p \neq q$, hay elementos a, b, c de S, no necesariamente diferentes entre sí, con $a \neq 0$, de manera que el polinomio $F(x) = ax^2+bx+c$ cumple que $F(p) = F(q) = 0$. Determine el máximo número de elementos que puede tener el conjunto S.

Solución del editor: El máximo número de elementos que puede tener S es tres. En primer lugar, el conjunto de tres elementos $S = \{-1, 0, 1\}$ tiene la propiedad pedida. En efecto, el polinomio $1x^2 + 0x + (-1)$ tiene coeficientes en S y raíces -1, 1; el polinomio $1x^2 + (-1)x + 0$ tiene coeficientes en S raíces 0, 1; el polinomio $1x^2 + 1x + 0$ tiene coeficientes en S y raíces -1, 0.

En segundo lugar, mostraremos que el conjunto S no puede tener más de tres elementos.

Supóngase que S tenga al menos dos elementos con valor absoluto mayor que 1, y sean p, q los dos elementos con mayor valor absoluto en S (con $|p| \geq |q|$). Según las condiciones del problema, existen $A, B, C \in S$, con $A \neq 0$, tales que el polinomio $Ax^2 + Bx + C$ tiene raíces p y q. Pero por las fórmulas de Vieta debe cumplirse que $Apq = C$, de donde $|C| = |A||p||q| \geq 2|p| > |p|$, absurdo. O sea que a lo sumo podría haber un elemento en S con valor absoluto mayor que 1, de donde la mayor cantidad de elementos que podría tener el conjunto sería cuatro, siendo éstos -1, 0, 1 y n para algún n entero con $|n| > 1$. Si $n > 0$, el coeficiente del término lineal en el polinomio que tenga raíces 1 y n debe tener valor absoluto mayor o igual que $n + 1$, absurdo. Lo mismo ocurre si $n < 0$, considerando el coeficiente del término lineal en el polinomio con raíces -1 y n. De esta forma, no es posible que S tenga cuatro elementos. Se concluye que el máximo posible es tres elementos.