Divulgaciones Matemáticas Vol. 19, No. 1 (2018), pp. 34–45

Algunas relaciones espectrales de los operadores normaloides

Some spectral relations of normaloid operators

Luis Berbesí (`lberbesi@ula.ve`)
Pedro Peña (`pedrop@ula.ve`)
Grupo de Investigación Regina Scientiarum.
Departamento de Física y Matemáticas.
Núcleo Universitario Rafael Rangel. Universidad de Los Andes.
Trujillo, Venezuela.

Resumen

En este artículo se presentan algunas relaciones espectrales que involucran el espectro aproximado puntual, el espectro puntual, el espectro de compresión y el espectro periférico de endomosfismos continuos sobre espacios de Banach. Se establecen algunas propiedades y ejemplos de relaciones espectrales de operadores en espacios de Hilbert. Adicionalmente se establece la relación entre el espectro periférico, el espectro inyectivo y el espectro aproximado puntual de los operadores normaloides.

Palabras y frases clave: Espectro aproximado puntual, espectro periférico, operadores normaloides.

Abstract

This paper presents some spectral relationships involving the approximate point spectrum, the point spectrum, the compression spectrum and the peripheral spectrum of continuous endomorphisms on Banach spaces. Some properties and examples of spectral relationships of operators in Hilbert spaces are established. Additionally, the relationship between the peripheral spectrum, the injective spectrum and the approximate point spectrum of the normaloid operators is established.

Key words and phrases: Approximate point spectrum, peripheral spectrum, normaloid operators.

1 Introducción

El teorema espectral del álgebra lineal establece que las matrices diagonalizables son justamente las matrices A que satisfacen la relación $A^*A = AA^*$, donde A^* denota la traspuesta conjugada de la matriz A. Considerando ahora transformaciones lineales $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, donde $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita, se puede asociar al operador T un operador T^*, llamado

Recibido 06/03/2018. Revisado 14/04/2018. Aceptado 17/07/2018.
MSC (2010): Primary 47A10; Secondary 47A25.
Autor de correspondencia: Luis Berbesí

adjunto de T, que generaliza la matriz adjunta. Un operador lineal acotado $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, que satisface la igualdad $T^*T = TT^*$, se le denomina operador normal.

Los operadores normales son de gran utilidad práctica en análisis funcional y en teoría espectral. Además, son importantes en el estudio de álgebra de operadores en espacios de Hilbert, que constituyen la base matemática de la mecánica cuántica. En la formulación matemática de la mecánica cuántica, los denominados sistemas cuánticos son descritos por operadores y vectores en un espacio de Hilbert separable denominado sistema de estado; las propiedades de los estados del sistema que pueden ser determinados (observados), se representan por operadores lineales y autoadjuntos ($T^* = T$) sobre espacios de Hilbert, siendo éstos una subclase de la clase de los operadores normales. Los operadores normaloides son una generalización de los operadores normales; se presentan algunos resultados de algunos subconjuntos espectrales para dichos operadores.

2 Resultados preliminares

En esta sección se exponen algunos resultados cuyo objetivo principal es facilitar el entendimiento de la teoría a desarrollar en este artículo. Muchos de estos resultados se tratan, de modo más amplio y detallado, en algunos textos de análisis funcional. (ver [2, 5, 6, 7, 8, 9, 11]).

2.1 Operadores lineales acotados

Definición 2.1. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal, con $(X, ||\cdot||_X)$ y $(Y, ||\cdot||_Y)$ espacios normados. El operador T se denomina *acotado* o *continuo* si $T(D(0,1))$ es un conjunto acotado en Y, donde $D(0,1)$ representa el disco unitario en X.

Se define la *norma* del operador T mediante

$$||T||_{\circ} = \sup\{||Tx||_Y : ||x||_X \leq 1\}.$$

Se denotará mediante $L(X,Y)$ el espacio de los operadores lineales y acotados de X en Y. Cuando $X = Y$, se empleará la notación $L(X)$ en lugar de $L(X,X)$. En el caso de que $Y = \mathbb{K}$, se acostumbra a usar la notación X' en lugar de $L(X,\mathbb{K})$: el espacio X' se denomina *espacio dual* de X. Cada elemento de X' recibe el nombre de *funcional lineal acotado o continuo.*

2.2 Operador adjunto

Un resultado importante dentro del análisis funcional es el teorema de representación de Riesz (consultar [5] para su demostración), que se presenta a continuación.

Teorema 2.1 (representación de Riesz)**.** *Sea* $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert complejo. Si* $y \in \mathbb{H}$*, la aplicación* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ *dada por*

$$f(x) = \langle x, y\rangle, \tag{1}$$

es un funcional acotado, con $||f|| = ||y||$*. Recíprocamente, para cada* $f \in \mathbb{H}'$*, existe un único* $y \in \mathbb{H}$ *tal que se verifica* (1)*.*

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Para cada $y \in \mathbb{H}$, sea $f : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ la aplicación dada por

$$f(x) = \langle Tx, y\rangle.$$

Por el teorema de representación de Riesz, existe un único $u_y \in \mathbb{H}$ tal que

$$f(x) = \langle Tx, y \rangle = \langle x, u_y \rangle, \forall\, x \in \mathbb{H}. \tag{2}$$

Definición 2.2. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. La aplicación $T^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dada por

$$T^*(y) = u_y,$$

donde u_y es el único punto tal que

$$f(x) = \langle Tx, y \rangle = \langle x, u_y \rangle, \forall\, x \in \mathbb{H},$$

se denomina *operador adjunto* de T.

La aplicación T^* está bien definida. Además se verifica, por (2), que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \forall\, x, y \in \mathbb{H}.$$

Proposición 2.1. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Entonces T^* es un operador lineal que cumple las siguientes propiedades:*

1. $(T^*)^* = T$.
2. *T^* es un operador acotado, con $||T^*|| = ||T||$.*
3. *Para cada $\alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.*
4. *Si T es invertible, entonces T^* también lo es, verificándose que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*
5. *Si $S \in L(\mathbb{H})$, entonces*
   (a) $(T + S)^* = T^* + S^*$.
   (b) $(TS)^* = S^* T^*$.
6. $\ker(T) = \ker(T^*T)$, *y* $\ker(T^*) = \ker(TT^*)$.

Demostración. Consultar [5] y [6]. □

Teorema 2.2. *Sea $T \in L(\mathbb{H})$, con $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Entonces*

1. $\ker(T^*) = T(\mathbb{H})^{\perp}$.
2. $\ker(T) = T^*(\mathbb{H})^{\perp}$.

Demostración. Consultar [6]. □

Corolario 2.1. *Sea $T \in L(\mathbb{H})$, con $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Entonces*

1. $\mathbb{H} = \overline{T(\mathbb{H})} \oplus \ker(T^*)$.
2. $\mathbb{H} = \overline{T^*(\mathbb{H})} \oplus \ker(T)$.

Demostración. Consultar [6]. □

2.3 Operador dual

Definición 2.3. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Para cada $f \in X'$, sea $T' \in L(X')$ el operador dado por $T'(f) := fT$. El operador T' se denomina *operador dual* de T.

Note que $T'(f) : X \to \mathbb{C}$, dado por $[T'(f)](x) = f(Tx)$, es un operador lineal y continuo.

Proposición 2.2. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces T tiene rango cerrado si, y sólo si, T' tiene rango cerrado.*

Demostración. Consultar Proposición 36.4 y Teorema 97.1 de [8]. □

Teorema 2.3. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Existe un isomorfismo isométrico U entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}'$ tal que $UU^{-1} = I_{\mathbb{H}'}$ y $U^{-1}U = I_{\mathbb{H}}$.*

Demostración. Consultar [4]. □

Teorema 2.4 (Representación de Fréchet-Riesz)**.** *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y considere $T \in L(\mathbb{H})$. Si U es el isomorfismo isométrico entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}'$ del Teorema 2.3, entonces*

$$T^* = U^{-1}T'U. \tag{3}$$

Demostración. Consultar [4]. □

Teorema 2.5. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(X)$. Entonces T tiene rango cerrado si, y solamente si, T^* tiene rango cerrado.*

Demostración. Consultar [4]. □

2.4 Operador normal

Definición 2.4. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. El operador T se denomina *normal* si $TT^* = T^*T$, es decir, si T conmuta con su operador adjunto.

En [5] se demuestra, sin mayor dificultad, que T es un operador normal si, y sólo si, para cada $x \in \mathbb{H}$, $||Tx|| = ||T^*x||$.

Ejemplo 2.1. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ el operador dado por $Tx = ix$. Se verifica que $T^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ viene dado por $T^*x = -ix$. Mún, para cada $x \in \mathbb{H}$,*

$$||Tx|| = ||x|| = ||T^*x||,$$

por lo que T es un operador normal.

Nota 1. Observe que si T es un operador normal, $\ker(T) = \ker(T^*T) = \ker(TT^*) = \ker(T^*)$.

2.5 Teoría espectral

Definición 2.5. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El conjunto *resolvente* del operador T se define como

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ existe y } (T - \lambda I)^{-1} \in L(X)\},$$

o de manera equivalente,

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es un operador biyectivo}\}.$$

Definición 2.6. Sea $T \in L(X)$. El *espectro* del operador T se define como

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Los valores λ de $\sigma(T)$ se denominan *puntos espectrales* de T.

Nota 2. Si $\lambda \in \sigma(T)$, es decir, si $T - \lambda I$ no es invertible, se puede considerar la siguiente descomposición clásica del espectro.

Definición 2.7. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El conjunto $\sigma(T)$ puede ser descompuesto en los siguientes conjuntos mutuamente disjuntos:

1. *El espectro puntual* de T, que se define por
$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es inyectivo}\}.$$
2. *El espectro continuo* de T, que se define por
$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es inyectivo, } \overline{(T - \lambda I)(X)} = X, \text{ pero } (T - \lambda I)^{-1} \text{ no es continuo}\}.$$
3. *El espectro residual* de T, que se define por
$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es inyectivo, con } \overline{(T - \lambda I)(X)} \subsetneqq X\}.$$

Nota 3. De las definiciones anteriores se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \rho(T) \cup \sigma(T) \\ &= \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T), \end{aligned}$$

siendo la unión disjunta dos a dos, obteniéndose así una partición de $\mathbb{C}$.

Nota 4. Si $T \in L(X)$, donde X es un espacio de Banach complejo, es conocido que $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$ (ver [9]).

Ejemplo 2.2. *Sean $R : \ell^2 \to \ell^2$ y $L : \ell^2 \to \ell^2$ los operadores dados por*

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (0, x_1, x_2, \ldots), \\ L(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (x_2, x_3, x_4, \ldots). \end{aligned}$$

Los operadores R y L se denominan traslación a la derecha *y* traslación a la izquierda*, respectivamente. Se verifica que $R^* = L$, y por tanto, $L^* = R$. Igualmente se verifica que*

$$\begin{aligned} \sigma(L) &= \sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}, \\ \sigma_p(L) &= \sigma_r(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \\ \sigma_c(L) &= \sigma_c(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}, \\ \sigma_r(L) &= \sigma_p(R) = \emptyset. \end{aligned}$$

Proposición 2.3. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces $\sigma(T) = \sigma(T')$.*

Demostración. Ver [8], Proposición 44.2. □

A continuación se definen algunos conjuntos espectrales importantes para la investigación.

Definición 2.8. Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. La aplicacion T se denomina *inferiormente acotada* si existe un $c > 0$, tal que para cada $x \in X$, $c||x|| \leq ||Tx||$.

En [3] se demuestra que T es un operador inferiormente acotado si, y sólo si, T es inyectivo y su rango es un conjunto cerrado. Igualmente se demuestra que T es un operador invertible si, y solo si, T es un operador inferiormente acotado y sobreyectivo.

Definición 2.9. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *espectro aproximado puntual* del operador T es el conjunto

$$\sigma_a(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es inferiormente acotada}\}.$$

Proposición 2.4. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_a(T)$.*

Demostración. Para cada $\lambda \notin \sigma_a(T)$, existe $c > 0$ tal que

$$c||x|| \leq ||(T - \lambda I)x||.$$

Si $(T - \lambda I)x = 0$, entonces, por hipótesis, $c||x|| = 0$, es decir, $x = 0$, lo que indica que el operador $T - \lambda I$ es inyectivo, por lo que $\lambda \notin \sigma_p(T)$. □

Definición 2.10. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *espectro de compresión* del operador T es el conjunto

$$\sigma_{com}(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(T - \lambda I)(X)} \subsetneq X\right\}.$$

Se verifica que $\sigma_r(T) \subseteq \sigma_{com}(T)$.

Proposición 2.5. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces*

$$\sigma(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_{com}(T)\,.$$

Demostración. Consultar [3]. □

Definición 2.11. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *espectro sobreyectivo* del operador T es el conjunto

$$\sigma_s(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es un operador sobreyectivo}\}.$$

Nota 5. Observe que si $T \in L(X)$, entonces $\sigma_{com}(T) \subseteq \sigma_s(T)$.

Ejemplo 2.3. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo e $I : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ el operador identidad. Entonces $\sigma_p(I) = \{1\}$, $\sigma_r(I) = \emptyset$ y $\sigma_c(I) = \emptyset$. También se verifica que $\sigma_a(I) = \sigma_{com}(I) = \sigma_s(I) = \{1\}$.*

Nota 6. En [10] se demuestra que si X es un espacio de Banach complejo, $T, S \in L(X)$ y T y S conmutan, entonces $\sigma_a(T + S) \subseteq \sigma_a(T) + \sigma_a(S)$. Adicionalmente se demuestra que T es inferiormente acotada si, y solo si, T^* es sobreyectiva. Así, por dualidad, $\sigma_s(T + S) \subseteq \sigma_s(T) + \sigma_s(S)$. Además, si $Q \in L(X)$ es cuasinilpotente y conmuta con T, entonces

- $\sigma_a(T+Q) = \sigma_a(T)$,
- $\sigma_s(T+Q) = \sigma_s(T)$, y
- $\sigma(T+Q) = \sigma_a(T+Q) \cup \sigma_s(T+Q) = \sigma(T)$.

Nota 7. Si A es un subconjunto de $\mathbb{C}$, la notación $conj(A)$ representa al conjunto de escalares $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ para los que se verifica que $\lambda \in A$, esto es,

$$conj(A) := \{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in A\}.$$

El siguiente teorema proporciona una fórmula para determinar el espectro de compresión de un operador T, en términos del espectro puntual del operador T^*.

Teorema 2.6. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Entonces $\sigma_{com}(T) = conj(\sigma_p(T^*))$.*

Demostración. Consultar [4]. □

Definición 2.12. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *radio espectral* del operador T se define como

$$r_\sigma(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

De la Nota 6 se sigue que si X es un espacio de Banach complejo y $T, Q \in L(X)$, con Q cuasinilpotente conmutando con T, entonces $r_\sigma(T+Q) = r_\sigma(T)$.

Definición 2.13. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. El operador T se denomina *normaloide* si $r_\sigma(T) = ||T||$.

Observe que $r_\sigma(T) = r_\sigma(T^*)$, y en consecuencia, T es un operador normaloide si, y solo si, T^* es normaloide.

Finalmente, se procede a definir otro subconjunto espectral notable de un operador, estableciendo para ello una proposicievia.

Proposición 2.6. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces*

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_\sigma(T)\} \neq \emptyset.$$

Demostración. Consultar [8]. □

Definición 2.14. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *espectro periférico* del operador T es el conjunto

$$\sigma_\pi(T) := \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_\sigma(T)\}.$$

Observe que $\sigma_\pi(T^*) = conj(\sigma_\pi(T))$.

Definición 2.15. Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. El *ascendente* del operador T se define como

$$a(T) := \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : \ker(T^n) = \ker(T^{n+1})\}.$$

Si no existe tal n, se escribe $a(T) = \infty$.

Nota 8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\ker(T^n) \subseteq \ker(T^{n+1})$.

Proposición 2.7. *Sea X un espacio de Banach complejo, $T \in L(X)$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces $a(T) \leq m$ si, y sólo si,*

$$\ker(T^n) \cap T^m(X) = \{0\}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Consultar [4]. □

Proposición 2.8. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Entonces*

1. *T es un operador normaloide si, y sólo si, T' es un operador normaloide.*
2. *$\sigma_\pi(T) = \sigma_\pi(T')$.*

Demostración. Ambas partes son consecuencias de la Proposición 2.3. □

Proposición 2.9. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$, con T distinto del operador nulo. Si T es normaloide, entonces*

$$\sigma_\pi(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : a(\lambda I - T) \leq 1\}.$$

Demostración. Consultar [4]. □

3 Resultados principales

El siguiente teorema es conocido para endomorfismos continuos sobre espacios de Banach. Se presenta ahora una versión equivalente para operadores adjuntos sobre espacios de Hilbert.

Teorema 3.1. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Entonces T es un operador inyectivo y con rango cerrado (resp. es sobreyectivo) si, y solamente si, T^* es un operador sobreyectivo (resp. T^* es un operador inyectivo y con rango cerrado).*

Demostración. Suponga que T es un operador inyectivo, con rango cerrado. Como $\ker(T)$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{H}$, entonces

$$\mathbb{H} = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp.$$

Por otro lado, por el Corolario 2.1,

$$\mathbb{H} = \ker(T) \oplus \overline{T^*(\mathbb{H})}.$$

Ya que el complemento ortogonal de un subespacio es único, entonces

$$\ker(T)^\perp = \overline{T^*(\mathbb{H})}. \tag{4}$$

Al ser T un operador inyectivo, entonces se sigue, por (4), que

$$\overline{T^*(\mathbb{H})} = \mathbb{H}.$$

Por tener T rango cerrado, en virtud del Teorema 2.5, T^* también tiene rango cerrado. Por tanto,

$$T^*(\mathbb{H}) = \mathbb{H},$$

y así, T^* es un operador sobreyectivo.

Recíprocamente, supongamos que T^* es un operador sobreyectivo. Como

$$\ker(T)^{\perp} = \overline{T^*(\mathbb{H})},$$

entonces

$$(\ker(T)^{\perp})^{\perp} = (\overline{T^*(\mathbb{H})})^{\perp},$$

pero por ser $\ker(T)$ un subespacio cerrado de $\mathbb{H}$,

$$(\ker(T)^{\perp})^{\perp} = \ker(T),$$

y así,

$$\ker(T) = \overline{T^*(\mathbb{H})}^{\perp}. \tag{5}$$

Debido a que T^* es un operador sobreyectivo, se sigue, de (5), que

$$\ker(T) = \mathbb{H}^{\perp} = \{0\}.$$

Por tanto, T es un operador inyectivo. Para culminar, note que T^* tiene rango cerrado, por lo que T también tiene rango cerrado, en virtud del Teorema 2.5. □

Nota 9. Del teorema anterior se sigue que $\sigma_a(T^*) = conj(\sigma_s(T))$ y $\sigma_s(T^*) = conj(\sigma_a(T))$.

El teorema siguiente establece que los autovalores de los operadores normales son precisamente los valores de su espectro de compresión.

Teorema 3.2. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$ un operador normal. Entonces*

1. $\sigma_p(T) = conj(\sigma_p(T^*))$.
2. $\sigma_{com}(T) = \sigma_p(T)$.

Demostración. El primer apartado se deduce de las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{rcl} \lambda \in \sigma_p(T) & \Leftrightarrow & T - \lambda I \text{ no es inyectivo} \\ & \Leftrightarrow & \ker(T - \lambda I) \neq \{0\} \\ & \Leftrightarrow & \ker((T - \lambda I)^*) \neq \{0\} (\text{pues } T - \lambda I \text{ es normal}) \\ & \Leftrightarrow & \ker(T^* - \overline{\lambda} I) \neq \{0\} \\ & \Leftrightarrow & \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \\ & \Leftrightarrow & \lambda \in conj(\sigma_p(T^*)). \end{array}$$

Para el segundo apartado, basta aplicar el Teorema 2.6 y la primera parte de este teorema, para obtener que $\sigma_{com}(T) = conj(\sigma_p(T^*)) = \sigma_p(T)$. □

La demostración de la siguiente proposición ofrece una prueba diferente a las tradicionales conseguidas en textos de teoría espectral.

Proposición 3.1. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$. Si T es normal, entonces $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.*

Demostración. Por la Proposición 2.4, Proposición 2.5 y el Teorema 3.2, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \sigma(T) & = & \sigma_a(T) \cup \sigma_{com}(T) \\ & = & \sigma_a(T) \cup \sigma_p(T) \\ & = & \sigma_a(T). \end{array}$$

□

La siguiente proposición establece la relación entre el espectro periférico y el espectro sobreyectivo de un operador normaloide.

Proposición 3.2. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Si T es normaloide, con T no nulo, entonces $\sigma_\pi(T) \subseteq \sigma_s(T)$. Además, $\sigma_\pi(T) \subseteq \sigma_a(T)$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma_\pi(T)$. Suponga, por el absurdo, que $\lambda \notin \sigma_s(T)$. Entonces se verifica que $(T - \lambda I)(X) = X$. Ahora, de la Proposición 2.9, se sigue que $a(T - \lambda I) \leq 1$, o equivalentemente, por la Proposición 2.7,

$$\ker(T - \lambda I) \cap (T - \lambda I)(X) = \{0\}.$$

Así,

$$\begin{array}{rcl} \ker(T - \lambda I) & = & \ker(T - \lambda I) \cap X \\ & = & \ker(T - \lambda I) \cap (T - \lambda I)(X) \\ & = & \{0\}. \end{array}$$

Por tanto, $T - \lambda I$ es un operador inyectivo y sobreyectivo, por lo que $\lambda \notin \sigma(T)$, lo cual es un absurdo. En consecuencia, $\sigma_\pi(T) \subseteq \sigma_s(T)$.

Por otro lado, por la Nota 9 y la primera parte de este teorema,

$$\begin{array}{rcl} \sigma_\pi(T) & = & conj(\sigma_\pi(T^*)) \\ & \subseteq & conj(\sigma_s(T^*)) \\ & = & \sigma_a(T). \end{array}$$

□

En la Proposición 3.2, no se puede reemplazar $\sigma_s(T)$ por $\sigma_{com}(T)$. En efecto, si R y L son los operadores traslación a la derecha e izquierda, respectivamente del Ejemplo 2.2, entonces ambos son normaloides, con $\sigma_{com}(L) = conj(\sigma_p(R)) = \emptyset$, y $\sigma_\pi(L) \neq \emptyset$. Por tanto, no se cumple que $\sigma_\pi(L) \subseteq \sigma_{com}(T)$.

Nota 10. En [8] se demuestra que los operadores paranormales ($||Tx||^2 \leq ||T^2x||\,||x||, \forall x \in X$), son normaloides, y en consecuencia, satisfacen que $\sigma_\pi(T) \subseteq \sigma_s(T)$. También son normaloides los operadores autoadjuntos, normales, quasinormales e hyponormales.

Teorema 3.3. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T, Q \in L(X)$, con T y Q conmutando entre sí. Si T es normaloide y Q cuasinilpotente, entonces $\sigma_\pi(T + Q) \subseteq \sigma_s(T + Q)$.*

Demostración. De la Nota 6 y la Proposición 10,

$$\begin{array}{rcl} \sigma_\pi(T + Q) & = & \sigma(T + Q) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_\sigma(T + Q)\} \\ & = & \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_\sigma(T)\} \\ & = & \sigma_\pi(T) \\ & \subseteq & \sigma_s(T) \\ & = & \sigma_s(T + Q). \end{array}$$

□

En la proposición siguiente, se establece una serie de inclusiones espectrales importantes para determinar algunos subconjuntos espectrales del espectro clásico de un operador normaloide.

Proposición 3.3. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathbb{H})$, con T normaloide. Entonces*

1. $\sigma_\pi(T) \subseteq conj(\sigma_a(T^*))$.

2. $\sigma_\pi(T^*) \subseteq conj(\sigma_a(T))$.

3. $\sigma_\pi(T^*) \subseteq conj(\sigma_a(T^*))$.

Demostración.

1. La Proposición 3.2 garantiza que $\sigma_\pi(T) \subseteq \sigma_s(T)$. Como $\sigma_s(T) = conj(\sigma_a(T^*))$, entonces $\sigma_\pi(T) \subseteq conj(\sigma_a(T^*))$.

2. Basta aplicar la primera parte al operador T^*.

3. Se sigue del hecho de que $\sigma_\pi(T) = \sigma_\pi(T^*)$.

$\square$

Ejemplo 3.1. *Sean $R : \ell^2 \to \ell^2$ y $L : \ell^2 \to \ell^2$ dados por*

$$\begin{array}{rcl} R(x_1, x_2, x_3, \ldots) & = & (0, x_1, x_2, \ldots), \\ L(x_1, x_2, x_3, \ldots) & = & (x_2, x_3, x_4, \ldots), \end{array}$$

los operadores traslación a la derecha e izquierda, respectivamente, del Ejemplo 2.2. Entonces

$$\sigma_a(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\},$$

y además,

$$\sigma_s(R) = conj(\sigma_a(L)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

La inclusión de la Proposición 3.2 puede ser estricta, como se demuestra a continuación.

Ejemplo 3.2. *Sean nuevamente R y L los operadores traslación a la derecha y traslación a la izquierda, respectivamente, definidos sobre ℓ^2. Sea $T : \ell^2 \to \ell^2 \times \ell^2$ dado por*

$$T(x) = (R(x), U(x)),$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ y $U : \ell^2 \to \ell^2$ es el operador definido por

$$U(x) = (0, x_2, x_3, \ldots).$$

Entonces T es un operador normaloide. Más aún, $T^* : \ell^2 \to \ell^2 \times \ell^2$ está dado por

$$T^*(x) = (L(x), U(x)).$$

Por otro lado, se cumple que $\sigma(T) = D(0,1)$ y $\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \cup \{0\}$. Igualmente se cumple

$$\begin{array}{rcl} \sigma_\pi(T^*) & = & D(0,1) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \\ & = & \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \end{array}$$

También se verifica que

$$\sigma_s(T^*) = conj(\sigma_a(T)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \cup \{0\}.$$

En consecuencia, $\sigma_\pi(T^*) \subsetneqq \sigma_s(T^*)$.

Referencias

[1] Aiena, P. and Guillén. J. *Weyl's Theorem for Perturbations of Paranormal Operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **35**(2008), 2433–2442.

[2] Bachman, G. and Narici, L. *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1966.

[3] Berbesí, L. *Algunas Relaciones Espectrales de los Operadores Convexoides y Transaloides*, tesis de maestría, Universidad de Los Andes, Mérida, 2015.

[4] Berbesí, L. *Operadores Normales y su Espectro*, trabajo de ascenso, Universidad de los Andes, Trujillo, 2014.

[5] Debnath, L. and Mikusinski, P. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications* (tercera edición), Elsevier Academic Press, San Diego, 2005.

[6] Furuta, T. *Invitation to Linear Operators*, Taylor and Francis, London, 2002.

[7] Halmos, P. *Hilbert Space Problem Book*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[8] Heuser, H. *Functional Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1982.

[9] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classic Library Edition, Ontario, 1989.

[10] Laursen, K. and Neumann, M. *An Introduction to Local Spectral Theory*, Clarendon Press, Oxtord, 2000.

[11] Vera, A. y Alegría, P. *Un Curso de Análisis Funcional*, AVL, Bilbao, 1997.