Divulgaciones Matemáticas Vol. 22 No. 1 (2021), pp. 96–98

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

Los tres problemas propuestos a continuación se plantearon en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe 2020, organizada por Panamá y realizada de manera virtual.

148. Se tienen monedas idénticas distribuidas en varias pilas con una o más monedas en cada pila. Una *operación* consiste en tomar dos pilas, con una cantidad total de monedas par entre ellas, y repartir sus monedas entre las dos pilas de modo que ambas terminen con la misma cantidad. Una distribución es *nivelable* si es posible, mediante 0 o más operaciones, lograr que todos los pilas queden con el mismo número de monedas. Determine todos los enteros positivos n tales que, para todo entero positivo k, cualquier distribución de nk monedas en n pilas es nivelable.

149. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales no negativos. Sea k un entero positivo y sean x_1, x_2,$\ldots x_k$ números reales positivos tales que $x_1x_2\cdots x_k = 1$. Demuestre que
$$P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_k) \geq kP(1).$$

150. Se dice que un entero positivo N es *interoceánico* si su factorización prima
$$N = p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_k^{x_k}$$
satisface que
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$
Encuentre todos los números interoceánicos menores que 2020.

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–25, 27–28, 44, 54, 79, 84–91, 94–100, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–129, 133–143 y 145–147. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

59. [**10**(1) (2002) p. 86.] Hallar el máximo valor del número real m, tal que sea cierta la siguiente afirmación:

    Si a, b, c y d son números enteros positivos tales que,

$$\begin{gathered} c > d \\ a + b = c + d \\ ab = 2cd \end{gathered}$$

    entonces $c/d > m$.

    Solución del editor: El máximo es $3+\sqrt{8}$. Supongamos que a, b, c y d cumplen las condiciones y pongamos $x = c-a = b-d$. Entonces $(c-x)(d+x) = ab = 2cd$, de donde $x^2-(c-d)x+cd = 0$ y $(c-d)^2 - 4cd \geq 0$, o sea $c^2 - 6cd + d^2 \geq 0$, $(c-3d)^2 - 8d^2 \geq 0$, $(c/d-3)^2 \geq 8$, $|c/d-3| \geq \sqrt{8}$, y como $c > d$ debe ser $c/d > 3+\sqrt{8}$. Para ver que $3+\sqrt{8}$ es el valor mínimo consideremos su desarrollo en fracción continua simple, a saber $[5, 1, 4, 1, 4, \ldots]$, y sean c_n/d_n los convergentes. Entonces $c_1 = 5$, $d_1 = 1$, $c_2 = 6$, $d_2 = 1$ y se tienen las recurrencias $c_{2k} = c_{2k-1} + c_{2k-2}$, $d_{2k} = d_{2k-1} + d_{2k-2}$, $c_{2k+1} = 4c_{2k} + c_{2k-1}$, $d_{2k+1} = 4d_{2k} + d_{2k-1}$. De aquí se deduce fácilmente que $d_{2k} = c_{2k-2}$ y que $c_{2k} = 6c_{2k-2} + c_{2k-4}$. Como $c_2 = 6$, $c_3 = 4 \cdot 6 + 5 = 29$ y $c_4 = 6 + 29 = 35$, vemos que c_2 es par, c_4 es impar y de la recurrencia $c_{2k} = 6c_{2k-2} + c_{2k-4}$ se sigue que los c_{2k} son alternadamente pares e impares. Luego $a_{2k} = (c_{2k} + c_{2k-2} + 1)/2$ y $b_{2k} = (c_{2k} + c_{2k-2} - 1)/2$ son enteros positivos y $a_{2k} + b_{2k} = c_{2k} + c_{2k-2} = c_{2k} + d_{2k}$. La condición $a_{2k}b_{2k} = 2c_{2k}d_{2k}$ equivale a

$$(c_{2k} + c_{2k-2} + 1)(c_{2k} + c_{2k-2} - 1) = 8c_{2k}c_{2k-2},$$

    o sea

$$(c_{2k} + c_{2k-2})^2 - 1 - 8c_{2k}c_{2k-2} = 0,$$

    que para $k = 2$ se verifica. Asumiendo que se cumple para k, para $k+1$ se tiene

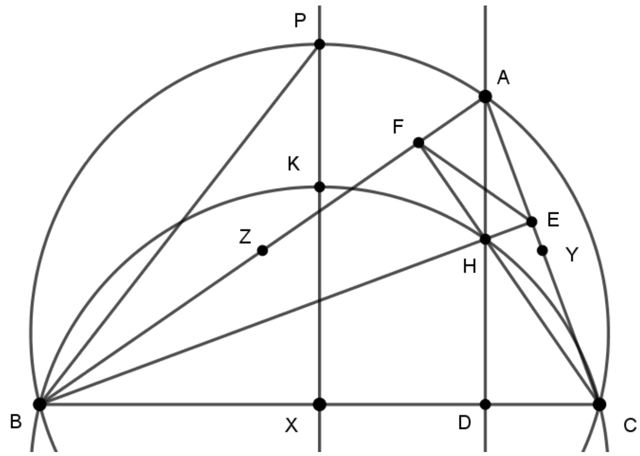
$$\begin{aligned} (c_{2k+2} + c_{2k})^2 - 1 - 8c_{2k+2}c_{2k} &= (7c_{2k} - c_{2k-2})^2 - 1 - 8(6c_{2k} - c_{2k-2})c_{2k} \\ &= 49c_{2k}^2 - 14c_{2k}c_{2k-2} + c_{2k-2}^2 - 1 - 48c_{2k}^2 + 8c_{2k-2}c_{2k} \\ &= c_{2k}^2 - 6c_{2k}c_{2k-2} + c_{2k-2}^2 - 1 \\ &= (c_{2k}^2 + c_{2k-2})^2 - 8c_{2k}c_{2k-2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

    Esto muestra que hay una sucesión infinita de números c_{2k}, d_{2k}, a_{2k}, b_{2k} que cumplen las condiciones y tales que $c_{2k}/d_{2k} \to 3 + \sqrt{8}$ cuando $k \to \infty$.

69. [**11**(1) (2003) p. 84.] Sea ABC un triángulo acutángulo. Sean D, E y F los pies de las alturas y X, Y, y Z los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea H el punto de intersección de las alturas. Supóngase que H no se encuentra en el interior del

triángulo XYZ. Demostrar que por lo menos el área de uno de los triángulos AEF, BDF, CDE es menor o igual que 1/9 del área del triángulo ABC.

Solución del editor: H debe encontrarse en el semiplano limitado por YZ que contiene a A, o en el limitado por XZ que contiene a B, o en el limitado por XY que contiene a C. Supongamos que se da el primer caso (los otros son similares). Consideremos el triángulo isósceles $BAPC$ con $\angle BPC = \angle BAC = \alpha$ y sea K el ortocentro de BPC. Es fácil ver que $PK = AH \leq HD \leq KX$.



Como $\angle BPX = \alpha/2$ y $\angle BKX = 90° - \alpha/2$ se tiene

$$\cot \alpha/2 = \frac{XP}{XB} \leq 2\frac{XQ}{XB} = 2\cot(90° - \alpha/2) = 2\tan \alpha/2,$$

de donde $\tan^2 \alpha/2 \geq 1/2$. Luego

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = -1 + \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \leq -1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Finalmente

$$[AEF] = \frac{1}{2}AE \cdot AF \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}AC \cos \alpha \cdot AB \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = [ABC] \cos^2 \alpha \leq \frac{1}{9}[ABC].$$