Divulgaciones Matemáticas Vol. 17 No. 2 (2016), pp. 57–59

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

Varios de los problemas propuestos a lo largo de los últimos años han quedado sin resolver hasta el día de hoy, a saber: 24–28, 44, 51, 54, 59, 68–69, 72–91, 94–106, 108–113, 116, 118–123, 125–130 y 132–137. Trataremos de ir llenando ese vacío, publicando en los números siguientes más soluciones que problemas nuevos. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para los problemas mencionados en la lista anterior.

139. *Propuesto en la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemática, Antofagasta, Chile, 2016.*

Sea k un entero positivo y a_1, a_2,…, a_k dígitos dados. Pruebe que existe un entero positivo n tal que los últimos $2k$ dígitos de 2^n son, en este orden, a_1, a_2,…, a_k, b_1, b_2, …, b_k, para ciertos dígitos b_1, b_2,…, b_k.

2 Soluciones

61. [**10**(2) (2002) p. 182.] ¿Para qué enteros $n \geq 3$ es posible acomodar, en algún orden, los números $1, 2, \dots, n$ en forma circular de manera que cualquier número divida a la suma de los dos números siguientes en el sentido de las manecillas del reloj?

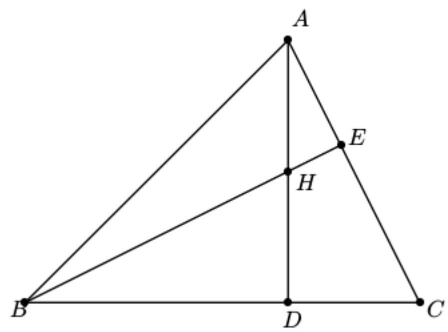
Solución del editor: Obviamente se puede para $n = 3$, y veremos que sólo en este caso. Si se pueden acomodar $1, 2, \dots, n$ cumpliendo la condición pedida entonces no puede haber dos números pares consecutivos, ya que el siguiente también sería par y siguiendo así resultarían todos pares. Tampoco puede haber dos pares separados por un sólo impar. Por lo tanto después de cada número par debe haber al menos dos impares antes del próximo par. Esto implica que la cantidad de impares es por lo menos el doble de la cantidad de pares, lo cual sólo sucede si $n = 3$.

62. [**10**(2) (2002) p. 182.] Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D y E los pies de las alturas desde los vértices A y B, respectivamente. Muestre que si

área$(BDE) \leq$ área$(DEA) \leq$ área$(EAB) \leq$ área(ABD),

entonces el triángulo es isósceles.

Solución del editor: Denotemos por $[XYZ]$ el área del triángulo XYZ. Sea H la intersección de AD y BE.



Como $[BDE] \leq [DEA]$, restando el área de la parte común DEH resulta $[BDH] \leq [EAH]$. Del mismo modo de $[EAB] \leq [ABD]$, restando el área de la parte común ABH resulta $[EAH] \leq [BDH]$. Por consiguiente $[EAH] = [BDH]$ y de allí se sigue $[BDE] = [DEA]$. Como estos triángulos tienen la base DE común, sus alturas desde B y A deben ser iguales y AB debe ser paralela a DE. Como A, B, C y D son concíclicos se tiene que $\angle EAD = \angle EBD$ y $\angle DAB = \angle DEB = \angle EBA$. Sumando resulta $\angle CAB = \angle CBA$.

63. [**10**(2) (2002) p. 182.] Para cada entero $a > 1$ se construye una lista infinita de enteros $\mathcal{L}(a)$ como sigue:

   (i) a es el primer número de la lista $\mathcal{L}(a)$.

   (ii) Dado un número b en $\mathcal{L}(a)$, el siguiente número en la lista es $b+c$, donde c es el mayor entero que divide a b y es menor que b.

Encuentre todos los enteros $a > 1$ tales que 2002 está en la lista $\mathcal{L}(a)$.

Solución del editor: Desde luego que 2002 está en la lista $\mathcal{L}(2002)$. Supongamos que $\mathcal{L}(a) = \{a, \ldots, d, 2002, \ldots\}$ es una lista donde se encuentra 2002 y $a \neq 2002$; los números de !a lista son mayores que 1 y van creciendo, ya que $b < b + c$. Si p es el primo más pequeño que divide a d y $m = d/p$ entonces el número de la lista que sigue a d es $d + m = mp + m = m(p+1) = 2002$. Como $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = m(p+1)$, p no puede ser 2. Luego $p+1$ es par y mayor que 2. Alguno de los números 7, 11, 13 divide a $p+1$, por lo que $p \geq 2 \cdot 7 - 1 = 13$. Si un primo menor que 13 divide a m, este primo divide a d, lo cual es imposible porque elegimos p como el menor primo que divide a d. Luego 7 y 11 no dividen a m, por lo que tienen que dividir a $p+1$. Luego $p > 2 \cdot 7 \cdot 11 - 1 > 13$, de donde 13 tampoco divide a m La única posibilidad que resta es que m sea 1 y que p sea $2002 - 1 = 2001$, pero $2001 = 3 \cdot 667$ no es primo. Todo lo anterior muestra que la única lista que contiene a 2002 es $\mathcal{L}(2002)$.

64. [**10**(2) (2002) p. 182.] Encuentre un conjunto infinito de enteros positivos S tal que para cada $n \geq 1$ y cualesquiera n elementos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de S, el número $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ no es un cuadrado perfecto.

    Solución del editor: Sea $S = \{10^{2k+1} : k \geq 1\}$. Cualquier suma de elementos distintos de S acaba en un número impar de ceros y por lo tanto no es un cuadrado perfecto. Hay muchas otras soluciones.

65. [**10**(2) (2002) p. 182.] En el plano coordenado se tiene la cuadrícula de $n \times n$, con n entero mayor o igual que 2, cuyos vértices son los puntos de coordenadas enteras (x, y), con $0 \leq x \leq n$ y $0 \leq y \leq n$. Considere los caminos que van de $(0, 0)$ a (n, n) sobre las líneas de esta cuadrícula y que sólo avanzan hacia la derecha o hacia arriba. Uno de tales caminos se llama *equilibrado* si la suma de los valores de x de todos los puntos por los que pasa es igual a la suma de todos los valores de y de esos mismos puntos. Muestre que todo camino equilibrado divide al cuadrado de lado n en dos figuras de la misma área.

    Solución del editor: Sea P_0, P_1,..., P_{2n} un camino. Pongamos $P_i = (x_i, y_i)$ y llamemos L al área que queda por debajo del camino y U al área que queda por encima. Sean P_{k-1}, P_k, P_{k+1} tres puntos consecutivos tales que el segmento $P_{k-1}P_k$ sea vertical y el segmento P_kP_{k+1} sea horizontal. Construyamos otro camino sustituyendo P_k por $P'_k = (x_k+1, y_k-1)$. Es claro que en el nuevo camino la suma de las x's aumenta en 1 respecto al camino original, mientras que el área debajo del camino disminuye en 1, por lo cual $L + \sum x_i$ no cambia (es un invariante). Mediante modificaciones sucesivas de este tipo podemos llegar al camino que tiene n segmentos horizontales seguidos de n segmentos verticales, para el cual $L + \sum x_i = 0 + (0 + 1 + 2 + \cdots + n) + (n + \cdots + n) = n(n + 1)/2 + n^2$. Por lo tanto para cualquier camino se tiene $L + \sum x_i = n(n + 1)/2 + n^2$. Intercambiando los ejes se prueba del mismo modo que $U + \sum y_i = n(n + 1)/2 + n^2$. Por tanto $L + \sum x_i = U + \sum y_i$. Esta igualdad muestra que $L = U$ si y sólo si $\sum x_i = \sum y_i$.