

LA FUNCIÓN SPLINE PARA EL AJUSTE DE LACTANCIAS EN VACAS

The Spline Function to Fitting of Cow-lactation Data

Egar E. Sánchez C.¹, Osiris Castejón S.¹ y Rafael Román B.²

¹ Unidad de Estadística. ² Departamento de Producción e Industria Animal.

Facultad de Ciencias Veterinarias, Universidad del Zulia, Apartado 15252. Maracaibo, Edo. Zulia, Venezuela.

E-mail: sanchez@telcel.net.ve.

RESUMEN

Con el fin de proponer el uso de la función spline para el ajuste de datos de lactancias en vacas, se realizó un estudio usando tres grupos de lactancias simuladas, generadas mediante el modelo gamma de Wood y de 40 semanas de duración. Estas se ajustaron a cuatro modelos spline, el primero ajustó los datos de lactancia con dos segmentos de recta (2lineal), el segundo con un polinomio de grado dos hasta el pico de lactación y después con una línea recta (Spl), el tercero con tres segmentos de recta (3lineal) y finalmente, cuatro líneas rectas (4lineal). Los resultados fueron comparados con los obtenidos por el propio modelo gamma, basados en los valores de R^2 , producción acumulada (Y_T), producción inicial (β_{00}), producción pico (Y_{max}), producción a los 120 d (Y_{120}) y a los 210 d (Y_{210}). Los ajustes se realizaron en dos casos: para el promedio de las lactancias de cada grupo y para cada lactancia individual; en el segundo caso fue realizado un análisis de varianza y la prueba de Dunnett. No se encontraron diferencias significativas entre los valores de R^2 , Y_T , Y_{120} y Y_{210} , pero sí se observaron para β_{00} y Y_{max} en los modelos 2lineal. Con respecto a los valores de Y_{max} , puede esperarse que las funciones spline propuestas, superen los obtenidos por el modelo gamma. Los resultados muestran que los modelos 3lineal, 4lineal y Spl son los que más coinciden con el modelo gamma en el ajuste de lactancias.

Palabras clave: Función spline, simulación, modelo gamma de Wood y curvas de lactancia.

ABSTRACT

In order to propose the use spline function to fitting of cow-lactation data, a study was done using three groups simulated lactation, generated by means of the gamma model proposed

Wood and for 40 weeks of lactation length. They were adjusted to four spline model. The first model fitted lactation data with two segments of straight line (2linear). The second made it by a polynomial of second degree until the peak of the curve and later with straight line (Spl), the third fitted with three segments of straight line (3linear) and finally with four segments of straight line (4linear). These results were compared with those obtained by the gamma model based on the values R^2 , accumulated yield (Y_T), initial yield (β_{00}), peak yield (Y_{max}), and yield at the 120 days (Y_{120}) and 210 days (Y_{210}). The adjustments were carried out in two cases: the averages of the lactation of each group and for each individual lactation; in the second case was done variance analysis and the Dunnett test. There were no significant differences for the values of R^2 , Y_T , Y_{120} and Y_{210} , but there were for β_{00} and Y_{max} in the 2linear model. For the values of Y_{max} can be expected that the proposed spline functions overcome the values obtained by the gamma model. The results show that the 3linear, 4linear and Spl models were those that more agreed with the gamma model for lactation adjustment.

Key words: Spline function, simulation, wood gamma model and lactation curves.

INTRODUCCIÓN

Muchos han sido los modelos de regresión sugeridos para describir la forma de la curva de lactancia en vacas lecheras. Uno de los mas utilizados y considerado como el mejor, es el modelo gamma propuesto por Wood [17] y dado por: $y = a \cdot b^t \cdot e^{-c \cdot t}$. Al compararlo con los modelos: lineal, lineal modal, exponencial, exponencial modal y el cuadrático en el ajuste de la producción de leche en vacas Jersey [1], los mejores coeficientes de determinación fueron obtenidos con los modelos gamma y cuadrático, $R^2 = 0,6393$ y $0,6407$, respectivamente. Ajustes muy similares para los modelos gamma y lineal, con una suave superioridad del gamma,

$R^2 = 0,74$ contra $0,71$, se han observado en curvas de lactancias en vacas Holstein-Friesian y Holstein-Friesian x Gir [10]. En vacas mestizas 5/8 y 1/2 Holstein Pardo Suizo Brahman [2], la función gamma fue utilizada para describir la producción de leche en el tiempo sin reportarse valores de R^2 . Recientemente, se compararon la bondad de los ajustes en lactancias de vacas Carora y cruzadas Holstein Friesian x Brahman entre los modelos gamma, Mitscherlic x exponencial, Michaelis-Menten x exponencial, lineal hiperbólico y lineal simple, encontrándose una mejor precisión, $R^2 = 0,99$, con el modelo de Wood [16]. Modificaciones a este modelo han sido propuestas por varios autores, como es la inclusión de un nuevo parámetro [6] y el ajuste por regresión múltiple después de su transformación logarítmica [5]. Se ha sugerido también para la descripción de las curvas de lactancia, la combinación de un modelo autoregresivo de primer orden con los modelos gamma, lineal o cuadrático [7] y la del modelo gamma con las funciones seno y coseno [3]. Además de los modelos de regresión ya mencionados se han empleado otros, entre éstos la función inversa polinomial, la cual, basándose en la comparación de los R^2 , proporcionó un mejor ajuste que la gamma en curvas de lactancia para vacas Puras y Cruzadas [3]. Planteamientos adversos al modelo de Wood también se han hecho, específicamente sobre la interpretación práctica de los parámetros b y c, además, se ha considerado, que describir con estos dos parámetros las tasas de incremento y de descenso para las zonas antes y después del pico de lactación, es una sobre simplificación del problema [5].

La curva típica de lactancia presenta dos o tres zonas [13], una primera zona de ascenso rápido hasta un punto de máxima producción, otra de descenso lento y casi lineal y, una tercera intermedia o meseta de corta duración, por lo que se infiere, que al ajustar varias curvas, cada una de ellas describirá adecuadamente las zonas mencionadas. La función spline es una función versátil que puede ajustarse a este tipo de situaciones, llamada también polinomios por piezas, permite el modelado de relaciones no lineales complejas, por el ajuste de diferentes polinomios en rangos diferentes y razonables de la variable independiente y utilizando el método de los mínimos cuadrados ordinarios. La función básica del spline es el spline cúbico [8, 14], ya que permite el ajuste de un polinomio de grado tres en cada uno de los segmentos seleccionados, pudiendo ser modificado para ajustar polinomios de menor grado [12].

El objetivo del presente trabajo fue proponer la función spline (modificada) para el ajuste de datos de lactancia, de esta manera, se asume la curva de lactancia compuesta por varias piezas de polinomios de bajo grado, con parámetros fácilmente interpretables y estimados con menos dificultades computacionales. Considerando que el uso del modelo gamma es el más destacado en la literatura, este estudio fue realizado empleando lactancias simuladas generadas mediante el modelo de Wood, para luego comparar los ajustes de diferentes funciones spline propuestas, con respecto a las obtenidas por el propio modelo gamma.

MATERIALES Y MÉTODOS

Artificialmente se generaron tres conjuntos de datos utilizando el modelo gamma de Wood [4, 9, 14]; cada uno de ellos simula 10 lactancias de la producción de leche semanal, 40 semanas, de 10 vacas individuales. El modelo gamma considerado para la simulación es definido así:

$$y_i = a \cdot t^b \cdot e^{-c \cdot t} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, 10 \quad (1)$$

donde: ε_i es el error, simulado empleando la distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$.

Varios fueron los valores utilizados para los coeficientes a, b, y c, pero sólo algunos de los reportados por Barrios y col. y por Vaccaro y col. [2,16], son considerados para ilustrar este trabajo. La TABLA I presenta los valores de a, b, y c utilizados en cada simulación. Los coeficientes correspondientes a las simulaciones número 1 y 3, fueron los obtenidos al ajustar el modelo gamma a lactancias de vacas pertenecientes a tres grupos raciales: Carora, Holstein Friesian x Brahman y otro de alto grado de herencia, dos estaciones, seca y lluviosa, año de la lactancia, 1 a 5 años, y dos tipos de paridad, primera y dos o más [16]. Los coeficientes de la simulación 2 se refieren a vacas 1/2 Pardo suizo, cuatro épocas de parto: Enero-Febrero, Abril-Junio, Julio-Septiembre y Octubre-Diciembre, dos sistemas de alimentación y animales con 1, 2, 3, y más de 4 partos.

En su forma general la función spline viene dada por:

$$S = \beta_{00} + \beta_{01}t + \beta_{02}t^2 + \beta_{03}t^3 + \sum_{j=1}^h \beta_j (t-t_j)^3 x_j \quad (2)$$

TABLA I
COEFICIENTES DEL MODELO GAMMA USADOS EN LAS DIFERENTES SIMULACIONES

Simulación	a	b	c
1	11,981	0,074	0,00258
2	9,530	0,116	0,00300
3	8,714	0,184	0,00385

TABLA II
COEFICIENTES DE DETERMINACIÓN Y PRODUCCIÓN TOTAL OBTENIDOS AL UTILIZAR LOS VALORES DE LACTANCIA PROMEDIO

Simulación	Gamma		2lineal		3lineal		4lineal		Spl	
	R ²	Y _T								
1	0,9687	485,317	0,9359	485,327	0,9612	485,327	0,9626	485,327	0,9585	485,327
2	0,9557	478,326	0,9468	478,343	0,9568	478,343	0,9579	478,343	0,9555	478,343
3	0,9502	435,757	0,9322	435,772	0,9502	435,772	0,9502	435,772	0,9482	435,772

donde: h = número de nodos, el cual es fijado por el investigador; t = tiempo; t_j = tiempo correspondiente al $j^{\text{ésimo}}$ nodo; y X_j = variable indicadora igual a 1 si $t > t_j$ y 0 si $t \leq t_j$.

Esta función es conocida como el spline cúbico, ya que permite el ajuste de polinomios de tercer grado por tramos. En la presente investigación, sólo fueron considerados hasta un máximo de tres nodos y polinomios de primero y segundo grados. Los siguientes casos específicos de la función spline fueron los estudiados:

1.- Un nodo, t_1 , en la semana de máxima producción observada, de esta manera, la curva de lactancia estaría compuesta por dos tramos de polinomios. Dos casos a su vez fueron considerados aquí.

a.- El ajuste de dos líneas rectas (spline 2lineal), una que describe la producción hasta el pico de lactación y otra para la descripción de la producción después del pico. En este caso la función tiene la siguiente forma [11]:

$$S = \beta_{00} + \beta_{01}t + \beta_1(t - t_1)X_1 \tag{3}$$

donde: X_1 es igual a 1 si $t > t_1$ y 0 si $t \leq t_1$; β_{00} = producción inicial; β_{01} = Tasa de incremento hasta la producción pico, observada en el tiempo t_1 y $\beta_{01} + \beta_1$ = Tasa de descenso después del pico.

b.- El ajuste de un polinomio de grado dos en la zona de ascenso hasta el pico y una función lineal en la etapa de descenso (spline Spl), de esta manera, la función esta dada por:

$$S = \beta_{00} + \beta_{01}t + \beta_1(t - t_1)^2X_1 \tag{4}$$

donde: X_1 es igual a 1 si $t \leq t_1$ y 0 si $t > t_1$; $\beta_{00} + t_1^2 \beta_1$ = producción inicial; $\beta_{01} - 2t_1\beta_1$ = Tasa de incremento hasta la producción pico, observada en la semana t_1 y β_{01} = Tasa de descenso después del pico.

2.- Un nodo t_1 en un punto intermedio de la zona ascendente y otro t_2 , en el punto de máxima producción observada, para este caso la curva de lactancia estaría representada por tres segmentos de recta (spline 3lineal), dos en la etapa de ascenso, ambos de corta duración, y uno en la etapa de descenso. El primer segmento describe el ascenso inicial, el cual es un ascenso rápido, el segundo describe la curvatura donde el ascenso comienza levemente a disminuir para luego llegar al

punto de máxima producción y el tercero, la zona de descenso propiamente. En un caso así la función es [11]:

$$S = \beta_{00} + \beta_{01}t + \beta_1(t - t_1)X_1 + \beta_2(t - t_2)X_2 \tag{5}$$

donde: X_1 es igual a 1 si $t > t_1$ y 0 si $t \leq t_1$; X_2 es igual a 1 si $t > t_2$ y 0 si $t \leq t_2$; β_{00} = producción inicial; β_{01} = Tasa de ascenso inicial hasta el nodo t_1 ; $\beta_{01} + \beta_1$ = Tasa de ascenso desde el nodo t_1 hasta el pico t_2 y $\beta_{01} + \beta_1 + \beta_2$ = Tasa de la zona de descenso.

3.- Finalmente, un nodo adicional t_3 en la parte intermedia de la zona de descenso fue también considerado, permitiendo representar la curva por cuatro segmentos de rectas (spline 4lineal). Este caso es una extensión del anterior [11], por lo tanto:

$$S = \beta_{00} + \beta_{01}t + \beta_1(t - t_1)X_1 + \beta_2(t - t_2)X_2 + \beta_3(t - t_3)X_3 \tag{6}$$

donde: $X_1, X_2, \beta_{00}, \beta_{01}$ y $\beta_{01} + \beta_1$ son iguales al caso anterior; $\beta_{01} + \beta_1 + \beta_2$ = Tasa de descenso inicial, desde el pico hasta el nodo t_3 y $\beta_{01} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ = Tasa de descenso al final de la producción, después del nodo t_3 .

El método de regresión no lineal, método de Gauss - Newton, fue utilizado para el ajuste de la función gamma y el método de los mínimos cuadrados ordinarios para el ajuste de las funciones spline estudiadas [15]. Con el fin de comparar los ajuste dados por los modelos spline con los obtenidos por el modelo gamma, fueron estimados los valores de R^2 producción total (Y_T), producción inicial (β_{00}), producción máxima (Y_{max}), producción a los 120 d (Y_{120}) y a los 210 d (Y_{210}). Los ajustes se realizaron en dos casos, primero para el promedio de las lactancias del grupo de 10 vacas y luego, para cada lactancia individual. Con los datos obtenidos en el segundo caso, fue realizado un análisis de la varianza y la prueba de Dunnett.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la TABLA II se muestran los valores obtenidos de R^2 y Y_T después de ajustar los diferentes modelos estudiados a la lactancia promedio de cada simulación.

Se observa claramente que basándose en los valores estimados de R^2 , los modelos 3lineal y 4lineal son los que

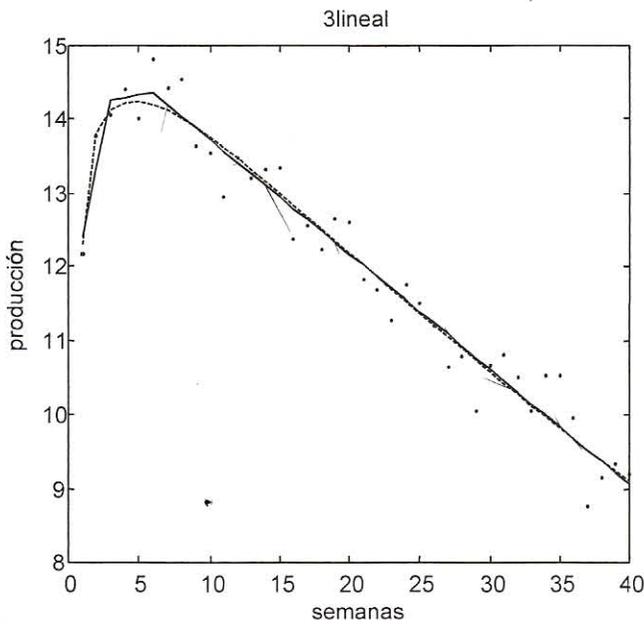


FIGURA 1. AJUSTES DE LAS FUNCIONES 3LINEAL Y GAMMA. DATOS DE LA SIMULACIÓN # 2.

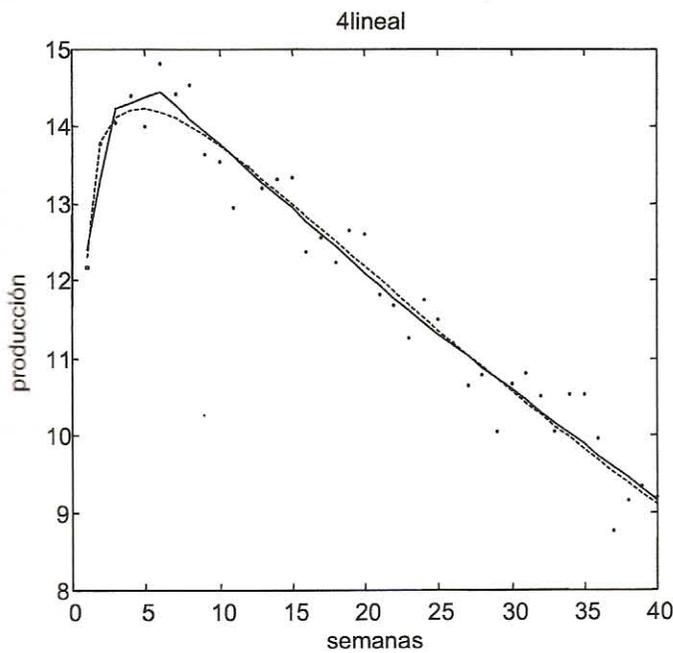


FIGURA 2. AJUSTES DE LAS FUNCIONES 4LINEAL Y GAMMA. DATOS DE LA SIMULACIÓN # 2.

ajustan los datos de igual manera que lo hace la función gamma, después de estos dos modelos, el mejor ajuste corresponde al spline Spl y el menos adecuado, al 2lineal. Para la producción total Y_T , no se notan diferencias, siendo los valores obtenidos prácticamente iguales entre ellos. Comparando los ajustes de los modelos 3lineal y 4lineal, no parece existir una superioridad importante entre el valor obtenido por el 4lineal sobre el 3lineal, debido a que la función gamma en estos

casos ilustrados, después del pico, tiende suavemente a una línea recta. Los resultados obtenidos de R^2 y Y_T , en los casos probados, muestran que los ajustes de los modelos 3lineal, 4lineal y Spl, son tan buenos como los del gamma y sirven para describir de una manera global, las lactancias de un grupo de animales.

Las FIGS. 1 y 2 ilustran los ajustes logrados con las funciones 3lineal y 4lineal respectivamente, superpuestos a los encontrados con la función gamma. Se observa cómo los dos segmentos de recta aproximan la curvatura de la zona de ascenso y lo innecesario que puede resultar utilizar dos segmentos de recta para describir la zona de descenso.

Las FIGS. 3 y 4 se refieren a las funciones Spl y 2lineal superpuestas a los datos simulados y a la función gamma. Como puede notarse, el ajuste más pobre se presenta para la función 2lineal, específicamente en la zona de ascenso.

Los valores estimados que permiten hacer comparaciones más específicas entre los modelos estudiados con respecto al modelo gamma, se muestran en la TABLA III. Pueden notarse diferencias entre los valores de producción máxima en la simulación 1, donde pareciera existir una sobre-estimación por parte de los modelos spline propuestos. Así mismo, se observan diferencias en los valores de producción inicial, pero únicamente para el caso del modelo 2lineal (simulaciones 1 y 3). Para los datos de la simulación 2 no existe diferencia aparente entre valores de producción máxima y de producción inicial. El resto de los valores estimados, tales como producción a los 120 y 210 d, no manifiestan alejarse de los obtenidos por la función gamma en ninguno de los casos, lo que verifica lo antes expuesto, es decir, la adecuada descripción de la zona de descenso con una línea recta [5, 13].

Las diferencias entre los modelos que parecen existir para los valores estimados de producción máxima, se deben a que, los modelos spline de regresión se ajustan a las características específicas de su ecuación, una de estas características es el punto de producción pico, cuya posición es determinada al fijar la semana correspondiente a la producción máxima observada; por el contrario, la función gamma, ajusta la curva de lactancia a sus características específicas, ninguna de las cuales es fijada por el analista estadístico. Es necesario destacar, que la falta de coincidencia en la estimación de la producción máxima entre los modelos spline propuestos y la función gamma, no les resta méritos por las dos razones siguientes: 1- En términos generales, los ajustes son bastante similares, pudiendo verificarse con los valores de R^2 y Y_T . 2- La necesidad de fijar la semana de producción máxima igual a la observada, hace más real el ajuste.

La TABLA IV muestra los valores promedio para R^2 y Y_T , obtenidos después de ajustar los diferentes modelos a cada lactancia individual.

A través del análisis de la varianza, no se encontró diferencia significativa entre modelos para los promedios de R^2 ,

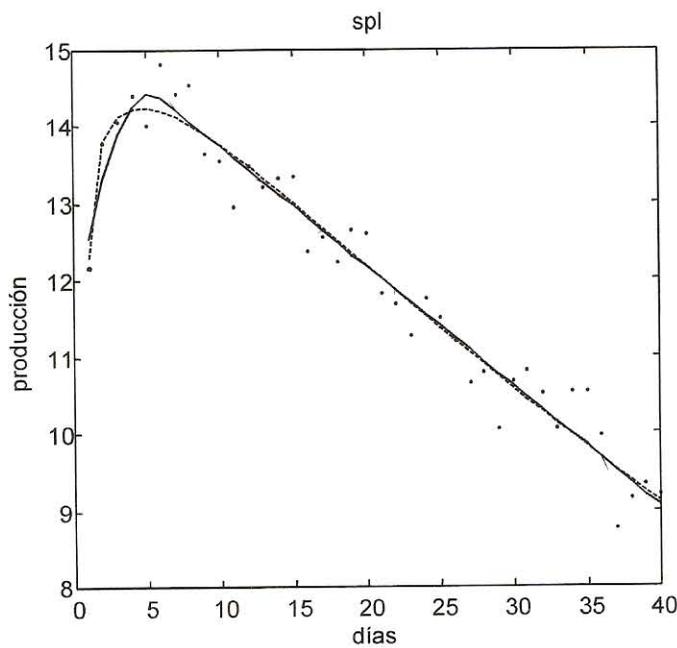


FIGURA 3. AJUSTES DE LAS FUNCIONES SPL Y GAMMA. DATOS DE LA SIMULACIÓN # 2.

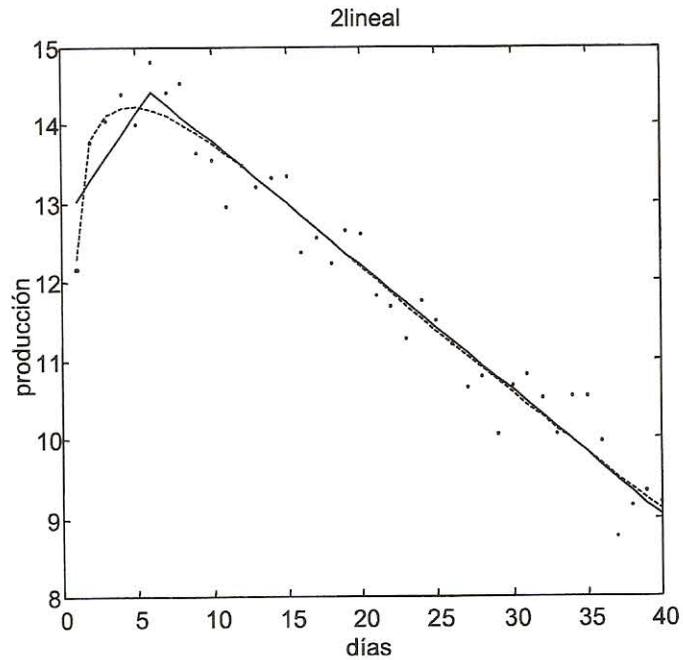


FIGURA 4. AJUSTES DE LAS FUNCIONES 2LINEAL Y GAMMA. DATOS DE LA SIMULACIÓN # 2.

TABLA III
VALORES ESTIMADOS DE PRODUCCIÓN INICIAL, PRODUCCIÓN MÁXIMA, PRODUCCIÓN A LOS 120 DÍAS Y A LOS 210 DÍAS

Simulación	Parámetros Estimados	Gamma	2lineal	3lineal	4lineal	Spl
1	β_{00}	9,0493	10,4106	9,0337	9,0246	8,8539
	Y_{max}	14,6869	15,4434	15,3033	15,1776	15,2638
	Y_{120}	13,4180	13,2669	13,1938	13,2408	13,1733
	Y_{210}	10,6558	10,6946	10,7007	10,7283	10,7028
2	β_{00}	12,3247	12,9829	12,2588	12,2654	12,4569
	Y_{max}	14,2368	14,4270	14,3533	14,4440	14,4247
	Y_{120}	12,6818	12,6795	12,6410	12,6062	12,6511
	Y_{210}	10,5779	10,6142	10,6174	10,7956	10,6168
3	β_{00}	9,8748	10,7299	9,8251	9,8260	9,8765
	Y_{max}	12,9267	13,3534	13,2613	13,2743	13,2604
	Y_{120}	11,7285	11,6764	11,6283	11,6235	11,6277
	Y_{210}	9,6657	9,6945	9,6985	9,6956	9,6982

TABLA IV
VALORES PROMEDIOS DE COEFICIENTES DE DETERMINACIÓN Y PRODUCCIÓN TOTAL OBTENIDOS AL AJUSTAR LOS DIFERENTES MODELOS ESTUDIADOS A CADA LACTANCIA INDIVIDUAL

Simulación	Gamma		2lineal		3lineal		4lineal		Spl	
	R^2	Y_T	R^2	Y_T	R^2	Y_T	R^2	Y_T	R^2	Y_T
1	0,7909	485,316	0,7564	485,544	0,7881	485,544	0,7901	485,545	0,7842	485,317
2	0,7308	478,337	0,7252	478,352	0,7360	478,352	0,7396	478,352	0,7325	478,377
3	0,7010	436,632	0,6897	435,764	0,7072	435,764	0,7107	435,764	0,7043	435,759

TABLA V
VALORES PROMEDIOS DE PRODUCCIÓN INICIAL, PRODUCCIÓN MÁXIMA,
PRODUCCIÓN A LOS 120 DÍAS Y A LOS 210 DÍAS

Simulación	Parámetros Estimados	Gamma	2lineal	3lineal	4lineal	Spl
1	β_{00}	9,0605	10,8281*	9,3738	9,3738	9,4135
	Y_{max}	14,7592	15,3467*	15,1503*	15,1503*	15,2056*
	Y_{120}	13,4231	13,3540	13,2613	13,2613	13,2458
	Y_{210}	10,6644	10,7010	10,7291	10,7291	10,6959
2	β_{00}	12,3327	12,9661	12,3088	12,3150	12,3650
	Y_{max}	14,2576	14,3773	14,4951	14,5228	14,3957
	Y_{120}	12,6932	12,7052	12,6640	12,6204	12,6432
	Y_{210}	10,6932	10,6225	10,6154	10,5869	10,6142
3	β_{00}	9,8855	10,7931	9,9278	9,9292	9,9594
	Y_{max}	12,9267	13,4958*	13,2803	13,2804	13,2405
	Y_{120}	11,7292	11,7143	11,6568	11,6372	11,6635
	Y_{210}	9,6643	9,6922	9,6957	9,6901	9,6934

*Difieren significativamente de los encontrados por el modelo gamma.

como lo revelan los valores obtenidos de $P = 0,7453$, primera simulación, $P = 0,9909$ para la segunda y la tercera $P = 0,9734$. Igual sucedió con los valores promedio de Y_T , con $P = 0,9998$, $P = 1,000$ y $P = 0,9538$ en la primera, segunda y tercera simulación respectivamente, sin embargo, se nota que los ajustes de los modelos 3lineal y 4lineal, son los que mejor coinciden con los del modelo gamma, luego sigue el Spl y por último el 2lineal. Se observa también en las simulaciones 2 y 3, ajustes ligeramente superiores de las funciones 3lineal y 4lineal respecto al obtenido por gamma, por lo tanto, estos resultados demuestran, que los modelos spline 3lineal, 4lineal y Spl en promedio coinciden con el de Wood en el ajuste de lactancias para un animal individual.

La TABLA V muestra los valores promedio de producción inicial, producción máxima, producción a los 120 y a los 210 d. Igual que el caso anterior, los mismos fueron obtenidos con el fin de estudiar puntos específicos en el ajuste de los modelos spline con respecto al modelo de Wood.

Como resultado del análisis de la varianza, en ninguno de los casos simulados hubo diferencia significativa entre modelos para los valores promedios de Y_{120} y Y_{210} , verificándose nuevamente que los diferentes spline, en los casos estudiados, coinciden con la curva de Wood en la zona después del pico. Para los valores de β_{00} que estiman la producción inicial promedio, en la simulación 1 se encontraron diferencias significativas ($P=0,0041$) y según la prueba de Dunnett, solo fueron observadas para el modelo 2lineal, lo que no sucedió en las simulaciones 2 y 3, aunque se aprecia una ligera superioridad de los valores β_{00} correspondientes al modelo 2lineal con respecto a los otros, lo que permite ratificar que los modelos 3lineal, 4lineal y Spl son los que mas coinciden con el modelo gamma. En los resultados obtenidos para los puntos de máxima producción promedio, todos los modelos spline mostraron

valores mayores a los obtenidos por el gamma, en la primera simulación se observaron diferencias significativas ($P= 0,0014$) y por la prueba de Dunnett, todos los modelos difieren del modelo de Wood en lo que se refiere al valor promedio de Y_{max} . En la segunda simulación no hubo diferencias y en la tercera, solamente el valor del modelo 2lineal, según Dunnett, difiere del modelo gamma. En términos generales, puede esperarse en la estimación de la producción máxima, que las funciones spline propuestas superen a las obtenidas con el modelo gamma, lo que no restaría validez a los modelos spline por las consideraciones antes mencionadas.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los modelos spline 3lineal, 4lineal y Spl dados por las ecuaciones (5), (6) y (4) respectivamente, presentan valores de R^2 , Y_T , β_{00} , Y_{120} , Y_{210} y en algunos casos de Y_{max} , similares a los dados por el modelo gamma propuesto por Wood, por lo tanto, los resultados encontrados sugieren que pueden ser usados tanto en el ajuste de lactancias promedio de un grupo de animales como para lactancias de un animal individual.

Considerando que la importancia de los modelos matemáticos es la descripción de las lactancias a través de sus parámetros y que los modelos spline propuestos están expresados en términos de parámetros sencillos y fácilmente interpretables, los mismos resultan útiles como herramienta en el análisis de las curvas de lactancia.

Los modelos propuestos no pretenden sustituir al modelo gamma, pero se espera que representen una buena alternativa para investigaciones adicionales o futuras.

Se recomienda el modelo 3lineal por describir las zonas de ascenso y descenso con tres parámetros. Si se desea estu-

diar la producción dividida en un número mayor de zonas, pudiera probarse el modelo 4lineal.

Siempre es recomendable la observación de los datos antes de decidirse por algún ajuste particular. En casos donde el pico es rápidamente alcanzado, se hace difícil el ajuste de dos segmentos de recta antes de la producción pico, la función spline 3lineal ha servido así mismo para describir esta situación con un segmento de recta para el ascenso y dos en el descenso.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AGUIRRE, D.; BOSCHINI, C. Comparación de la producción de leche en vacas Jersey importadas con sus hijas nativas durante tres lactancias completas. IV Análisis de los ajustes (R^2) de varios modelos de estudio de la curva de lactancia. **Ciencias Veterinarias. Costa Rica**. Vol. 14 (2): 15-23. 1992.
- [2] BARRIOS, A.; RINCÓN, E.; VENTURA, M.; HUERTA, N.; FONDEVILA, M.; SURRA, J. Factores que afectan la curva de lactancia de vacas mestizas en regiones tropicales. **Rev. Fac. Agron. LUZ**. Vol 13: 741-749.1996.
- [3] BATRA, T.R. Comparison of two mathematical models in fitting lactation curves for pureline and crossline dairy cows. **Ani. Sci.** Vol. 66: 405-414. 1986.
- [4] CONGLETON, W.R.; EVERETT, R.W. Error and bias in using the incomplete Gamma function to describe lactation curves. **J. D. Sci.** Vol. 63: 101-109. 1980.
- [5] COBY, J.M.; LE DU, L.P. On fitting curves to lactation data. **Anim. Prod.** Vol. 26: 127-133. 1978.
- [6] DHANOA, M.S. A note on an alternative form of the lactation model of Wood. **Anim. Prod.** Vol. 32: 349-351. 1981.
- [7] DHANOA, M.S.; LE DU, L.P. A partial adjustment model to describe the lactation curve of a dairy cow. **Anim. Prod.** Vol. 34: 243-247. 1982.
- [8] KINCAID, D.; CHENEY, W. **Análisis Numérico. Las Matemáticas del Cálculo Científico**. ADDISON - WESLEY IBEROAMERICANA. Estados Unidos. 708 pp.1994.
- [9] MATLAB. Edición de estudiante. **Guía de usuario**. Versión 4. The MATH WORKS Inc. Prentice Hall. 1996.
- [10] MADALENA, F.E.; MARTÍNEZ, M.L.; FREITAS, A.D. Lactation curves of Holstein-Friesian and Holstein-Friesian x Gir cows. **Anim. Prod.** Vol. 29: 101-107. 1979.
- [11] NETER, J.; KUTNER, M.; NACHTSHEIN, C.; WASSERMAN, W. **Applied linear statistical models**. Other Uses of Indicator Variables. IRWIN. Fourth Ed.: 474-475. 1996.
- [12] MONTGOMERY, D.; PECK, E. **Introduction to linear regression analysis**. Piecewise Polynomial fitting (spline). Jhon Wiley & Son, INC. 2nd Ed: 210-218. 1992.
- [13] MONTIEL, U. Producción de leche en búfalas en un bosque muy seco tropical. Universidad del Zulia, Facultad de Ciencias Veterinarias, Venezuela. (Trabajo de ascenso): 76-77. 1977.
- [14] NAKAMURA, S. **Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB**. PRENTICE HALL. 1^a Ed. 476 pp. 1997.
- [15] STATISTICAL ANALYSIS SYSTEM INSTITUTE S.A.S. **User' guide: Statistics**, S.A. S. Release 6.03. 1990.
- [16] VACCARO, R.; D' ENJOY, G.; SABATÉ, C. Curvas de lactancias de vacas Carora y cruzadas Holstein Friesian x Brahman. **Rev. Fac. Ciencias Veterinarias U.C.V.** Vol. 40 (1): 37-44. 1999.
- [17] WOOD, P.D.P. A note on seasonal fluctuations in milk production. **Anim. Prod.** Vol.15 :89-92. 1972.