CIENCIA 19(1), 66 - 71, 2011
Maracaibo, Venezuela

Operadores llenos en espacios uniformemente convexos

*Edixo Rosales**
Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia. Maracaibo, Venezuela.

Recibido: 19-02-09 Aceptado: 15-11-10

Resumen

El propósito de este trabajo es decidir si un operador invertible es lleno, cuando el álgebra fuertemente cerrada generada por dicho operador, tiene un operador de Riesz que es lleno. Hemos usado las técnicas de Karanasios, quien a través de las propiedades del rango numérico espacial de un operador, definido en un espacio de Banach uniformemente convexo, caracteriza los operadores llenos.

Palabras clave: operador lleno, rango numérico espacial.

Full operators on unifor convexity spaces

Abstract

The objective of this work is to decide whether an invertible operator is full, when the strongly closed algebra generated by itself has a full Riesz operator. We have made used Karanasios' techniques, who characterizes the full operators when the spatial numerical range of an operator defined on a uniformly convex space Banach space is intervening.

Key words: full operators, spatial numerical range.

Introducción

Esta investigación está orientada a generalizar a espacios de Banach uniformemente convexos, algunos resultados que sobre operadores llenos se tienen en espacios de Hilbert separable.

Una estructura fundamental que lleva a obtener información sobre un operador definido en un espacio de Hilbert separable, es el álgebra débil por este operador generada. En este sentido los trabajos de Erdos [1, 2], han constituido una guía importante, ya que las técnicas dadas en sus trabajos, hasta incluso en estos momentos, son de ayuda fundamental para estudiar las propiedades de llenitud de algunos operadores. Además los trabajos de Erdos generalizan algunos resultados de Feintuch, que aseguran la pertenencia del inverso de un operador invertible definido en un espacio de Hilbert separable, cuando en el álgebra débil por dicho operador generada, los operadores compactos son densos débilmente [3, 4].

Bravo profundizó en su tesis doctoral los resultados que sobre operadores llenos se tenían en 1980 [5]. Entre los más importantes está el de permitir determinar la llenitud de un operador invertible, a partir de una propiedad distintiva que tenga un operador perteneciente al álgebra débil por él generada.

* erosales@luz.edu.ve

Karanasios, a mediados de los noventa, caracteriza la propiedad de llenitud de un operador a partir de su rango numérico espacial, para operadores definidos en espacios de Banach uniformemente convexos [6, 7].

Los autores antes señalados nos han permitido presentar algunos resultados en esta línea, que permiten modificar, generalizar algunos resultados originales debidos a Karanasios y Bravo, e incluso resolver un problema planteado por Bravo [8].

1. Preliminares

Para nosotros X será un espacio de Banach complejo y X^* su espacio dual.

Análogamente $B(X)$ será la familia de los operadores acotados sobre X. Un subespacio M de X se llama invariante de T si $TM \subset M$, donde un subespacio para nosotros será cerrado bajo la topología de la norma del espacio de Banach considerado.

Por $lat(T)$ entenderemos el conjunto de todos los subespacios invariantes de T. Un operador T se llamará lleno si $TM = M$, $\forall M \in lat(T)$.

Si $T \in B(X)$, el conmutante de T denotará la familia de operadores

$$\{T\}' = \{A \in B(x): A \circ T = T \circ A\}$$

y $A\lg lat(T) = \{S \in B(X): lat(T) \subset latS\}$

Si $D = \left\{ f \in B(X)^*: f(I) = \|f\| = 1 \right\}$, el rango numérico del operador T, será el subconjunto complejo $W(T) = \left\{ f(T): f \in D \right\}$. Es claro que si $\sigma(T)$ es el espectro del operador T, entonces $W(T) \subset \sigma(T)$. Recuerde que si λ pertenece a los números complejos C, entonces $\lambda \in \sigma(T)$, cuando el operador $T - \lambda I$ no es invertible. El subconjunto complejo $\rho(T) = C - \sigma(T)$ se le llama la resolvente del operador.

Un operador $T \in B(X)$ se dirá casinilpotente si $\sigma(T) = \{0\}$. Análogamente diremos que $T \in B(X)$ es de Riesz si tiene las siguientes propiedades:

1. Si $\lambda \neq 0$, entonces $N(T - \lambda I)^n = \ker(T - \lambda I)^n$ es de dimensión finita, $\forall n \geq 1$. Además existe $p \geq 1$ tal que $N(T - \lambda I)^n = N(T - \lambda I)^p$, $\forall n \geq p$.
2. Si $\lambda \neq 0$, entonces $R(T - \lambda I)^n = (T - \lambda I)^n X$ es un subespacio cerrado $\forall n \geq 1$. Además existe $p \geq 1$ tal que $R(T - \lambda I)^n = R(T - \lambda I)^p$, $\forall n \geq p$.
3. Si $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión infinita de valores propios del operador T y $\lambda_n \to \lambda$ entonces $\lambda = 0$.

Una clase particular de lo operadores de Riesz son los operadores compactos, donde $T \in B(X)$ es compacto si dada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ en X, tales que $x_n \in B_x = \left\{x \in X: \|x\| \leq 1\right\}_{n=1}^{+\infty}$, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ y un vector $y \in X$, tales que $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \to y$ en norma. Se sabe que todo operador compacto es de Riesz, al igual que todo operador casinilpotente. Una buena referencia para estudiar los operadores de Riesz, es la referencia [9].

Antes de enunciar los siguientes resultados, recordemos que si $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión en X y $x \in X$ son tales que $f(x_n) \to f(x)$, $\forall f \in X^*$, entonces se dice que $x_n \to x$ débilmente.

Teorema 1.1.
Si H es un espacio de Hilbert separable y $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es una sucesión de vectores ortonormales en H, entonces $e_n \to 0$ débilmente.

Demostración. Consultar Bachman [10].

Teorema 1.2.
Si H es un espacio de Hilbert separable, $T \in B(H)$ es un operador compacto, $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es

una sucesión en H, y $x \in H$ son tales que $x_n \to x$ débilmente, entonces $Tx_n \to Tx$ en norma.

Demostración. Consultar Bachman [10].

Teorema 1.3.

Si $T \in B(X)$ es un operador de Riesz, entonces $\dim \dfrac{X}{R(T-\alpha I)} = \dim \ker(T-\alpha I)$, $\forall \alpha \neq 0$

Demostración. Consultar Dowson [9]

Una sucesión $\{x_1, x_2, \ldots\}$ en un espacio de Banach X diremos que es básica, si cuando $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_x x_n = 0$, entonces $\alpha_n = 0$, $\forall 1 \leq n$. Por $[x_1, x_2, \ldots]$ entendemos al subespacio cerrado generado por la sucesión $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Cuando $X = [x_1, x_2, \ldots]$ diremos que la sucesión $\{x_1, x_2, \ldots\}$ es una base de Schauder para X.

Valen los siguientes resultados:

Teorema 1.4. (Sarason)

Sea $T \in B(X)$. Si $\rho(T)$ es la resolvente de T y $\rho_\infty(T)$ es la componente conexa no acotada de $\rho(T)$, entonces:

1. Si λ y λ_0 pertenecen a la misma componente conexa de $\rho(T)$, entonces $lat(T-\lambda)^{-1} = lat(T-\lambda_0)^{-1}$.
2. Si $\lambda \in \rho_\infty(T)$, entonces $lat(T-\lambda)^{-1} = lat(T)$.

Demostración. Ver referencia [5], o el trabajo de Sarason [11].

Teorema 1.5.

Si H es un espacio de Hilbert separable y $T \in B(X)$ invertible, entonces T no es lleno, si y sólo si, existe un vector no nulo $x \in X$, tal que $\langle T^n x, x \rangle = 0$, $\forall n \geq 1$.

Prueba. Revisar en Bravo [5].

Un espacio de Banach X se dice uniformemente convexo, si dado $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon \leq 2$, existe un $0 < \delta$ tal que $\forall x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $e \leq \|x-y\| \Rightarrow \left\| \dfrac{x+y}{2} \right\| \leq 1-\delta$. Análogamente se dice que X es estrictamente convexo si dados $x, y \in X$ tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x, y$ son linealmente independientes. Todo espacio de Banach estrictamente convexo es uniformemente convexo, siendo la inclusión recíproca falsa en general. Sarason [11] presenta una visión amplia de los espacios uniformemente convexos como de la teoría de las bases de Schauder.

Finalmente dada una red de polinomios $\{P_\alpha\}$, operadores $A, T \in B(X)$, diremos que $P_\alpha(T) \to A$ fuertemente, si $P_\alpha(T)x \to Ax$ en norma, $\forall x \in X$.

Además A_T será el álgebra de todos los operadores $A \in B(X)$, tales que existe una red de polinomios $\{P_\alpha\}$, tal que $P_\alpha(T) \to A$ fuertemente.

2. Operadores llenos en espacios uniformemente convexos

En el siguiente teorema exhibimos una prueba, ligeramente modificada, de un resultado que aparece originalmente en Karanasios [7].

Teorema 2.1 (Karanasios)

Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo y $T \in B(X)$. Si $0 \notin (T)$, entonces T es un operador lleno.

Demostración. Supongamos que T no es lleno, existe por lo tanto $M \in latT$ tal que $\overline{TM} \subset M$, donde la inclusión es estricta.

Sea un vector unitario $x \in M - \overline{TM}$.

Usando el teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$, tal que $f(\overline{TM}) = 0$, $f(x) = 1$. Sea $\Phi(A) = f(Ax)$, $\forall A \in B(X)$. Es claro que $\Phi \in B(X)^*$, $\Phi(I) = f(x) = 1$, $\|\Phi\| \leq \|f\|$.

Si $\|f\| \leq 1$, entonces $\|\Phi\| = 1$, lo que dice que $F(T) = f(Tx) = 0 \in W(T)$, lo que conduce a una contradicción.

Si $\|f\| > 1$ y $g = f|M \in M^*$, consideremos el funcional $h = \frac{1}{\|g\|} g$.

Como M es uniformemente convexo, existe un vector unitario $y \in M$, tal que $h(y) = \|h\| = 1$. Notemos que $h(\overline{TM}) = 0$. Usando el teorema de Hahn-Banach, existe $k \in X^*$, $k|M = h$, $\|k\| = 1$. Si definimos $\Gamma(A) = k(Ay)$, $\forall A \in B(X)$, se deduce que $\|\Gamma\| = \Gamma(I) = 1$ y $\Gamma(T) = 0 \in W(T)$, lo cual es un absurdo.

Observación 2.1. Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo y $T \in B(X)$. Si T no es un operador lleno, de la demostración del teorema anterior deducimos que existe un vector unitario $x \in X$ y un funcional unitario $f \in X^*$, tales que $f(x) = \|f\| = \|x\| = 1$ y $f(Tx) = 0$. Para una profundización de esta observación, el lector puede consultar a Karanasios [7].

En el próximo teorema, daremos una nueva demostración, para espacios uniformemente convexos, de un resultado que aparece inicialmente en Bravo [5].

Teorema 2.2.

Si X es un espacio de Banach uniformemente convexo, $T \in B(X)$ es un operador de casi nilpotente lleno, $M, N \in latT$ con $M \subset N$ de manera estricta, entonces $\dim \frac{N}{M} \neq 1$.

Demostración. Si $\dim \frac{N}{M} = 1$, entonces existe un vector no nulo $x \in N$, tal que $N = \langle x \rangle \oplus M$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe un funcional unitario $f \in N^*$, tal que $f(x) \neq 0$, $f(M) = \{0\}$. Como N es uniformemente convexo,

Existe un único $y \in N$ tal que $f(y) = \|f\| = \|y\| = 1$. Tenemos que $Ty = \alpha y + z (z \in M)$.

Si $\alpha = 0$, entonces $Ty \in M \Rightarrow \overline{TN} \subseteq M \Rightarrow N = M$, lo cual es una contradicción.

Esto dice que $\alpha \neq 0$ y por lo tanto $(T - \alpha I)N \subseteq M$.

Si $\alpha = 0$, entonces $T^n y = \alpha^n y + w, w \in M \Rightarrow |f(T^n x)| = |\alpha^n| \leq \|T^n\| \Rightarrow w \in N \Rightarrow |\alpha| \leq \sqrt[n]{\|T\|^n} \Rightarrow |\alpha| \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T\|^n} = 0$, lo cual es una contradicción. Es decir $\dim \frac{N}{M} \neq 1$. Esto termina la prueba.

Del teorema anterior podemos deducir el siguiente importante resultado:

Corolario 2.1.

Si $T \in B(X)$ es invertible, donde X es espacio de Banach uniformemente convexo y $S \in A_T$ (álgebra fuerte de los operadores) es un operador casinilpotente lleno, entonces T es lleno.

Demostración. Si T es invertible y no lleno, existe un $M \in latT$, tal que $\dim \frac{M}{TM} = 1$. Como $M, TM \in latS$ y S es casinilpotente, entonces tenemos por el teorema anterior que $\dim \frac{M}{TM} \neq 1$, lo cual es una contradicción.

Corolario 2.2.

Si $T \in B(X)$ es unitario, donde X es un espacio de Hilbert separable y $S \in A_T$ (álgebra fuerte de los operadores) es un operador de Riesz lleno, entonces T es lleno.

Demostración. Si T no es lleno, existe y un vector unitario $x \in X$ tal que $\langle T^n x, x \rangle = 0$, $\forall n \geq 1$. Es claro que $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$, forman una base de Schauder para $M = [x, Tx, T^2 x, \ldots]$. Además $T|M$ no tiene valores propios y $\dim \frac{M}{TM} = 1$.

Si $S \in A_T$, entonces existe una red de polinomios $\{P_\alpha\}$ tal que $P_\alpha Tx \to Sx$ en norma, $\forall x \in X \Rightarrow M, TM \in latS$. Además S es un operador de Riesz lleno, tal que $S|M$ es un operador casinilpotente. De lo contrario existe α un valor propio no nulo de S con $\ker(S-\lambda I)$ de dimensión finita. Como $\ker(S-\lambda I) \in latT$, tenemos que T tiene un valor propio, lo cual es un absurdo. Por otro lado $TM \subset M$ de manera estricta. Por lo tanto por el teorema anterior tenemos que $\dim \frac{M}{TM} \neq 1$, lo cual conduce a una contradicción.

Corolario 2.3.

Si X es un espacio de Banach uniformemente convexo, $T \in B(X)$ es invertible y casinilpotente, $0 \notin W(T)$ y $M, N \in latT$ tales que $M \subset N$, donde la inclusión es estricta, entonces $\dim \frac{M}{TM} \neq 1$.

Demostración. Como $0 \notin W(T) \Rightarrow T$ es un operador lleno.

El siguiente teorema generaliza un resultado dado para espacios de Hilbert separables por Bravo [5].

Teorema 2.3.

Si X es un espacio de Banach uniformemente convexo y $T \in B(X)$ es tal que $\|T\| = |\lambda|$, $\lambda \in \sigma(T) - \sigma_p(T)$, entonces $T - \lambda I$ es un operador lleno.

Demostración. Si $T-\lambda I$ no es lleno, entonces existen $x \in X$, $f \in X^*$ tales que: $f(x) = \|f\| = \|x\| = 1$ y $f((T-\lambda I)x) = 0 \Rightarrow$ $f(Tx) = \lambda \Rightarrow \|T\| = |\lambda|, \lambda \in W_{esp}(T) \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$, lo que es una contradicción (ver referencia [13], página 93. theorem 8).

El siguiente resultado fue originalmente planteado como un problema abierto por Bravo [8].

Teorema 2.4

Si H es un espacio de Hilbert separable y $T \in B(H)$ es invertible. $A + K \in A\lg latT$ $A + K \in A\lg latT \cap \{T\}'$, $\|A+K\| = 1$ tal que A es una isometría no escalar sobreyectiva, con $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$ donde la inclusión es estricta, K es un operador compacto y $latT$ es no trivial, entonces $latT \cap latT^{-1}$ es no trivial.

Demostración. Si $\sigma_p(A+K)$ es no vacío, el resultado se sigue. De lo contrario podemos suponer $\sigma_p(A+K)$ es vacío y que T no es un operador lleno. Por lo tanto existe $M \in latT$, tal que $\dim T^n M \Phi T^{n+1} M = 1$. Aquí $T^n M \Phi T^{n+1} M = \{x \in T^n M: \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in T^{n+1} M\}$. Elijamos vectores unitarios $e_n \in T^n M \Phi T^{n+1} M$.

Se tiene que $Te_n = \alpha_n e_{n+1} + x_{n+2}$, $x_{n+2} \in T^{n+2} M$ (*) y $(A+K)e_n = \beta_n e_n + y_{n+1}$, $y_{n+1} \in T^{n+1} M$ (**).

Se deduce de (*) y del hecho de ser T invertible que $\alpha_n \neq 0$ y por lo tanto que $\alpha_n \beta_{n+1} = \alpha_n \beta_n \Rightarrow \beta_{n+1} = \beta_n$, $\forall n \geq 0$.

Se sigue de (**) que

$$\left\langle \left((A+K) - \beta_0 I\right)^n e_0, e_0 \right\rangle = 0, \quad \forall 1 \leq n$$

$\Rightarrow (A+K) - \beta_0 I$ no es un operador lleno.

Por otro lado $\|(A+K)e_n\|^2 = 1 + \|Ke_n\| + \langle Ae_n, Ke_n \rangle + \langle Ke, Ae_b \rangle \Rightarrow |\beta_0|^2 + \|y_{n+1}\|^2 = 1 + \|Ke_n\| + \langle Ae_n, Ke_n \rangle + \langle Ke, Ae_n \rangle$.

Pasando al límite se deduce que $\|\beta_0\|^2 \leq 1$.

Supongamos primeramente que $\|\beta_0\|^2 < 1$.

Como $\sigma(A+K) = \sigma(A)$ se deduce por [14, pág. 96] que $\beta_0 \in r_\infty \Rightarrow lat((A+K) - \beta_0))^{-1} = lat(A+K) - \beta_0 I \Rightarrow (A+K) - \beta_0$ es un operador lleno, lo que conduce a una contradicción.

Se concluye que $|\beta_0| = 1 \Rightarrow (A+K)e_n = \beta_0 e_n$, lo que conduce a una nueva contradicción.

Referencias

1. ERDOS J.A. ***J of Operator Theory***. 2: 211-214. 1979.
2. ERDOS J.A. King's College, London, WC2R 2LS. 1-5. 1983.
3. FEINTUCH A. ***Proc A: M.S.*** Vol. 43: 123-126. 1974.
4. FEINTUCH A. ***Proc A: M.S.*** Vol. 63: 66-68. 1977.
5. BRAVO J. Relations between $latT$, $latT^{-1}$, $latT^{2}$ and operators with compact imaginary parts. Ph. D. Dissertation. U.C. Berkeley (1980).
6. KARANASIOS S. ***J London Math Soc***. 30: 295-304. 1984.
7. KARANASIOS S. ***Bull Greek Math Soc***. 36: 81-86. 1994.
8. BRAVO J. Comunicación personal.
9. DOWSON H. ***Spectral Theory of Linear Operator.*** Academic Press. New York and London. 1978.
10. BACHMAN G., NARICI L. ***Functional Analysis.*** Academic Press. New York and London. 1966.
11. SARASON D. ***Mem Amer Math Soc***. No. 56. MR 32 # 6256. 1965.
12. CAROTHERS N.L. ***A Short Course on Banach Space Theory.*** Department of Mathematics and Statistics Bowling Green State University. London. 2007.
13. BONSAAL F., DUNCAN J. ***Numerical Ranges of Operators on32 Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras.*** Cambridge University Press. 1971.
14. HALMOS P.R. ***A Hilbert space problem book.*** Second Edition. Springer-Verlag. New York. 1982.