CIENCIA 16(3), 338 - 343, 2008
Maracaibo, Venezuela

Sobre la dualidad para spin 2

Minerva Betancourt y Adel Khoudeir*
Centro de Física Fundamental, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida 5101, Venezuela.

Recibido: 30-11-05 Aceptado: 10-04-06

Resumen

En este trabajo se presentan dos aspectos la dualidad para el campo de spin 2, tanto en el caso sin masa como en el masivo. El primero se refiere a la equivalencia dual canónica de la acción de Fierz-Pauli masiva con la acción propuesta por Casini, Montemayor y Urrutia (1). El segundo punto es mostrar la autodualidad del campo sin masa de spin 2 en cuatro dimensiones a través de la reducción dimensional de las acciones de Fierz-Pauli y Curtright en cinco dimensiones.

Palabras claves: dualidad, gravitación.

About the duality for spin 2

Abstract

In this work we present two aspects about the duality for the spin 2 field, considering two cases, with mass, or masless. The first one, refers to de canonic dual equivalence of the Fierz-Pauli massive action, with the action proposed by Casini, Montemayor and Urrutia (1). The second point in this work is to show the autoduality of the masless spin 2 field in four dimensions, through the dimensional reduction of the Fierz-Pauli and Curtright actions in five dimensions.

Key words: duality, gravitation.

* Trabajo presentado en el V Congreso de la Sociedad Venezolana de Física, Universidad del Zulia. Nucleo Punto Fijo - Edo. Falcón, Venezuela, Noviembre 2005.

* Autor para la correspondencia. E-mail: minerba@ula.ve.

Introducción

El concepto de dualidad en las teorías físicas se ha constituido en una de las piezas claves para el entendimiento de fenómenos físicos a nivel no perturbativo. La principal idea en este concepto radica en que un fenómeno físico puede ser formulado por al menos dos teorías, en principio diferentes en sus respectivas formulaciones, pero que resultan ser equivalentes físicamente. En particular, el estudio y establecimiento de teorías duales para el campo de spin 2 (gravitación) representaría un rol importante en la construcción y la compresión de simetrías en la no conocida teoría M, así como en teorías de supergravedades y supercuerdas.

En este trabajo, dos aspectos sobre las teorías duales para spin 2 en cuatro dimensiones (3, 1) son considerados. El primer punto a tratar muestra la equivalencia dual canónica de la usual teoría de Fierz-Pauli con una propuesta reciente (1) para describir un campo de spin 2 masivo. El otro aspecto a mostrar en este trabajo es la autodualidad, en cuatro dimensiones, de un campo de spin 2 sin masa (gravitación linealizada) descrita por una acción de Fierz-Pauli, a través de las reducciones dimensionales de las teorías de Curtrigh (4) y Fierz-Pauli en cinco dimensiones.

Equivalencia dual canónica para spin 2 masivo

Comencemos considerando la acción de primer orden propuesta en la referencia (1), donde se incluye, además del campo simétrico h_{mn}, un campo $T^{p}{}_{mn}$ con la propiedad de simetría: $T^{p}{}_{mn}=-T^{p}{}_{nm}$. La acción es:

$$S=\int d^4x\Big[-\frac{1}{8}T^{p}_{(mn)}T^{(mn)}_{p}-\frac{1}{4}T_{(mn)\,p}T^{(mp)\,n}+\frac{1}{6}T^{ml}_{l}T^{s}_{ms} \\ -\frac{1}{2}T^{l}_{(mn)}\varepsilon^{mnrs}\partial_r h_{ls}-\frac{\mu^2}{2}\left(h_{mn}h^{mn}-h^{m}_{m}h^{n}_{n}\right)\Big] \qquad [1]$$

En efecto, esta acción es equivalente a la usual acción de Fierz-Pauli para describir un campo de spin 2 masivo si eliminamos el campo $T^{p}{}_{mn}$ usando su ecuación de movimiento; mientras que si se elimina el campo h_{mn} en términos de $T^{p}{}_{mn}$, se obtiene una nueva formulación para el campo de spin 2 masivo (1).

Vamos a realizar el análisis canónico a esta acción. Se encuentra que los momentos canónicos son: $\pi_{lk}=\frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{lk}}=-\frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}T_{(ij)l}-\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}T_{(ij)k}$, y $\pi_{ok}=\frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{0k}}=-\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}T_{(ij)0}$. Es decir, tenemos los siguientes vínculos primarios

$$\phi_k=\pi_{0k}-\frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}T_{(ij)0}\approx 0, \qquad [2]$$

$$\phi_{lk}=\pi_{lk}+\frac{1}{4}\varepsilon^{0ijk}T_{(ij)l}+\frac{1}{4}\varepsilon^{lij}T_{(ij)k}\approx 0. \qquad [3]$$

El Hamiltoniano canónico total, resulta ser

$$H=\frac{2}{3}T_{(0i)0}T_{(0i)0}-\frac{1}{4}T_{(0i)j}T_{(0i)j}-\frac{1}{8}T_{(ij)0}T_{(ij)0}+\frac{1}{8}T_{(ij)k}T_{(ij)k} \\ -\frac{1}{4}T_{(0i)j}T_{(0j)i}-\frac{1}{4}T_{(0i)j}T_{(ij)0}+\frac{1}{4}T_{(ij)k}T_{(ik)j}-\frac{1}{6}T_{(0i)i}T_{(0j)j} \\ +\frac{1}{6}T_{(ij)j}T_{(ik)k}+(\varepsilon^{ikl}T_{(oi)0}+\pi_{lk})\partial_k h_{l0}-\pi_{0k}\partial_k h_{00} \\ +\varepsilon^{ijk}T_{(i0)l}\partial_j h_{lk}+\mu^2 h_{0i}h_{0i}-\frac{\mu^2}{2}h_{00}h+\frac{\mu^2}{2}h^2 \\ +\lambda_i\phi_i+\lambda_{ij}\phi_{ij}. \qquad [4]$$

donde λ_i y λ_{ij} son multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos ϕ_i y ϕ_{ij}, respectivamente. Preservando los vínculos primarios, obtenemos los siguientes vínculos secundarios: $\psi_k \equiv \dot{\phi}_k = \left\{H, \phi_k\right\} = -\partial_l (\varepsilon^{ijk} T_{(0i)0} - \pi_{jk}) + 2\mu^2 h_{0k} \approx 0$ y $\psi_{ij} \equiv \dot{\phi}_{ij} = \left\{H, \phi_{ij}\right\} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{lmi}\partial_m T_{(l0)j} - \mu^2 h_{ij} - \mu^2 \eta^{ij}\eta^{lm} h_{lm}$. La preservación de los vínculos secundarios ψ_i y ψ_{ij} determina los valores de los multiplicadores: λ_k: $\lambda_k = \frac{1}{2\mu^2}(\mu^2 \partial_k h_{00} - \varepsilon^{ijk}\partial_m \partial_j T_{(i0)m} - \mu^2 \partial_l h_{lk} + \mu^2 \partial_k$ y $\lambda_{ij} = \frac{1}{2}\partial_i h_{0j} + \frac{1}{2}\partial_j h_{0i}$. Considerando $\varepsilon_{ljk}\phi_k$, se obtiene

$$T_{(jk)0} = \varepsilon_{ljk}\pi_{0l} \qquad [5]$$

Mientras que la parte antisimétrica de ϕ_{lk} resulta ser $\varepsilon_{lij}\pi_{lk} = -\frac{1}{2}T_{(li)l}\delta_j^k - \frac{1}{2}T_{(jl)l}\delta_i^k - T_{(ij)k}$. La traza de esta expresión nos dice que $T_{(ijj)}=0$. Por lo tanto,

$$T_{(ij)k} = -\varepsilon_{ijl}\pi_{lk}. \qquad [6]$$

Por otra parte, al realizar variaciones independientes repecto a $T_{(0i)0}$, que aparece como un multiplicador cuadrático en la acción, se encuentra que

$$\frac{\partial S}{\partial T_{(0i)0}} = -\frac{2}{3}T_{(0i)0} + \varepsilon^{ijk}\partial_j h_{0k} = 0 \Rightarrow T_{(0i)0} = \frac{3}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_j h_{0k}. \qquad [7]$$

Realizando la siguiente descomposición: $T_{(jk)0} = \hat{g}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij} g + b_{ij}$, donde $\hat{g}_{ij}$ es la parte simétrica y sin traza de $T_{(0i)j}$, g su traza y b_{ij} la componente antisimétrica, y considerando las expresiones encontradas para $T_{(jk)0}$, $T_{(ij)j}$ y $T_{(0i)0}$ en términos de los momentos canónicos, la acción se escribe como

$$S = \int d^4x \Big[\pi_{ij}\partial_0 h_{ij} + \frac{3}{4}\left(\partial_i h_{0k}\partial_i h_{0k} - \partial_j h_{0i}\partial_i h_{0j}\right) + \frac{1}{4}\pi_{0i}\pi_{0i} - \frac{1}{2}\pi_{ij}\pi_{ij} + \frac{\pi^2}{4} - \pi_{ij}\partial_i h_{j0} + \frac{1}{2}g_{ij}g_{ij} - \varepsilon^{ilk}g_{ij}\partial_l h_{jk} - \varepsilon^{ilk}b_{ij}\partial_l h_{jk} - \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\pi_{k0}b_{ij} + \mu^2 h_{0i}h_{0i} - \frac{\mu^2}{2}h_{ij}h_{ij} - \mu^2 h_{00}h + \frac{\mu^2}{2}h^2 \Big]$$

Nótese que $\hat{g}_{ij}$ es un multiplicador cuadrático, por lo tanto, podemos determinarlo usando su ecuación de movimiento. Realizando variaciones con respecto a $\hat{g}_{ij}$ se tiene que $\hat{g}_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ilk}\partial_l h_{jk} + \frac{1}{2}\varepsilon^{jkl}\partial_l h_{lk}$, mientras que variaciones respecto a b_{ij}, que es un multiplicador lineal, conlleva a la siguiente ecuación de ligadura $-\frac{1}{2}\varepsilon^{jlk}\partial_l h_{ik} - \frac{1}{2}\varepsilon^{ilk}\partial_l h_{jk} - \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\pi_{0k} = 0$. Contrayendo con ε^{ijk} se encuentra que $\pi_{0i} = \partial_j h_{ij} + \partial_i h$. Sustituyendo $\hat{g}_{ij}$ y π_{0i} en la acción, la acción se reduce a

$$S = \int d^4x \Big[\pi_{ij}\partial_0 h_{ij} + \frac{3}{4}(\partial_m h_{0k}\partial_m h_{0k} - \partial_n h_{0m}\partial_m h_{0n}) + \frac{1}{2}\partial_l h \partial_l h - \partial_l h \partial_n h_{nl} + \partial_j h_{jl}\partial_n h_{nl} - \frac{1}{2}\pi_{ij}\pi_{ij} + \frac{\pi^2}{4} - \pi_{ij}\partial_i h_{j0} - \frac{1}{2}\partial_m h_{jk}\partial_m h_{jk} + (-\partial_j h_{jk} + \partial_k h)\partial_0 h_{0k} - (-\partial_j h_{jk} + \partial_k h)\partial_k h_{00} + \mu^2 h_{0i}h_{0i} - \frac{\mu^2}{2}h_{ij}h_{ij} - \mu^2 h_{00}h + \frac{\mu^2}{2}hh \Big] \qquad [8]$$

Finalmente, redefiniendo el momento canónico de la siguiente forma

$$P_{ij} = \pi_{ij} + \eta_{ij}\partial_l h_{0l} - \frac{1}{2}\partial_i h_{0j} - \frac{1}{2}\partial_j h_{0i} \qquad [9]$$

se llega a

$$S = \int d^4x \Big[\pi_{ij}\partial_0 h_{ij} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{ij} + \frac{P^2}{4} - \frac{1}{2}\partial_k h_{ij}\partial_k h_{ij} + \frac{1}{2}\partial_k h \partial_k h + \partial_k h_{jk}\partial_j h_{ij} + \frac{\mu^2}{2}hh - \frac{\mu^2}{2}h_{ij}h_{ij} + h_{0i}(2\partial_i \pi_{ij} + \mu^2 h_{0i}) - h_{00}(\partial_i \partial_j \pi_{ij} - \nabla^2 h + \mu^2 h) \Big] \qquad [10]$$

que es justamente la forma canónica de la acción de Fierz-Pauli para describir un campo de spin 2 masivo. Esto muestra que la acción en términos del campo $T_{(mn)p}$ es canónicamente dual a la usual teoría de Fierz-Pauli para spin 2 masivo, que se describe por un tensor simétrico de segundo orden h_{mn}.

Reducción dimensional y dualidad para spin 2 sin masa

Recientemente se ha establecido la formulación dual para un campo de spin 2 sin masa (gravitación linealizada) en cuatro dimensiones (2) (la cual se describe por la usual acción de Fierz-Pauli) y extendida a dimensiones mayores (3). En cuatro dimensiones resulta que la gravitación linealizada descrita por un campo sin masa, simétrico y de spin 2, es autodual, como ocurre con la autodualidad del campo de spin 1 en cuatro dimensiones; mientras que en dimensiones mayores, la teoría dual se describe por objetos que poseen propiedades de simetrías mixtas: así, por ejemplo, en cinco dimensiones, la teoría dual a la acción de Fierz-Pauli resulta ser la acción de Curtright (4), expresada en términos del campo $T_{mn}{}^{p}=-T_{nm}{}^{p}$.

En esta sección, realizaremos una típica reducción dimensional de la acción de Curtright en cinco dimensiones a cuatro dimensiones y la compararemos con la redución dimensional de la acción de Fierz-Pauli para mostrar que en este proceso la teoría usual de Fierz-Pauli en cuatro dimensiones para spin 2 es autodual. Además, veremos que también aparecen las dualidades para campos antisimétricos sin masa en cuatro dimensiones. La teoría de Curtright es una propuesta para describir campos de spin 2 sin masa en *D* dimensiones, utilizando un campo $T_{mn}{}^{p}$ como el descrito en la sección anterior, el cual propaga *D(D-2)(D-4)/3* grados de libertad *on shell*. Nótese que en cuatro dimensiones esta teoría es localmente trivial, y en cinco dimensiones propaga el mismo número de grados de libertad igual a la de un campo simétrico $h_{mn}=h_{nm}$ (recordemos que h_{mn} propaga *D(D-3)/2* grados de libertad). La acción de Curtright en 5 dimensiones es

$$\begin{aligned} S(T_{[AB]C}) = -\frac{1}{2}\int d^5x\Big[&\partial^A T^{[BC]D}\partial_A T_{[BC]D} - 2\partial_A T^{[AB]C}\partial^D T_{[DB]C} \\ &-\partial_A T^{[BC]A}\partial^D T_{[BC]D} - 4T_{[AB]A}\partial^{CD}T_{[CB]D} \\ &-2\partial_A T_{[AB]B}\partial^C T_{[DC]}D\Big] \end{aligned} \qquad [11]$$

Los índices con letras mayúscula *(A,B,C)* están asociados a los campos en 5 dimensiones, mientras que las letras minúsculas *(a,b,c)* corresponden a las etiquetas de los campos en 4 dimensiones; la quinta coordenada (la compactificada) se denotará por *5*. En el proceso de reducción dimensional consideraremos que los campos en cuatro dimensiones no dependen de la quinta coordenada compactificada. El campo $T_{[AB]C}$ se descompone en las siguientes piezas

$$\begin{aligned} T_{[AB]C} = (&T_{[ab]c}, T_{[ab]5} \equiv B_{ab} = -B_{ba}, \\ &T_{[a5]b} \equiv T_{ab}, T_{[a5]5} \equiv A_a) \end{aligned} \qquad [12]$$

La acción reducida a cuatro dimensiones resulta ser

$$\begin{aligned} S = -\frac{1}{2}\int d^4x\Big[&\partial_\alpha T_{[bc]d}\partial_a T^{[bc]d} - 2\partial_a T^{[ab]c}\partial^d T_{[db]c} \\ &-\partial_a T^{[cd]a}\partial^b T_{[cd]b} - 4T_a^{ab}\partial^{cd}T_{[cb]d} - 2\partial_a T_b^{cb}\partial^a T_{cf}^{f} \\ &+2\partial_a T^a\partial_b T^b + \frac{1}{6}H_{abc}H^{abc} - 2\partial_a T^{ab}\partial^c T_{cb} \\ &-2T\partial^{ab}T_{ab} - \partial_a T\partial_a T + \partial_a \mathrm{T}_{cd}\partial_a T_{cd} - 2A_a\partial^{bc}T_{[ba]c} \\ &-4\partial_a T_b\partial^a A_b + 4\partial_a T^a\partial^b A_b\Big] \end{aligned} \qquad [13]$$

El campo T_{ab} es simétrico en cuatro dimensiones y $H_{abc} = \partial_a B_{bc} + \partial_b B_{ca} + \partial_c B_{ab}$ es la intensidad de campo de antisimétrico B_{ab}. Nótese que el campo vectorial aparece acoplado con $T_{[ab]c}$, el cual podemos desacoplarlo si definimos: $T_{[ab]c} = \tilde{T}_{[ab]c} - \frac{1}{2}(\eta_{ac}A_b - \eta_{bc}A_a)$. En efecto, la acción reducida resulta ser

$$S = S_C + S_{FP} + S_B + S_A \qquad [14]$$

donde S_C es la acción de Curtrihgt en cuatro dimensiones

$$S_C = -\frac{1}{2}\int d^4x\Big[\partial_a \tilde{T}_{[bc]d}\partial_a \tilde{T}^{[bc]d} - 2\partial_a \tilde{T}^{[ab]c}\partial^d \tilde{T}_{[db} - \partial_a \tilde{T}^{[cd]a}\partial^b \tilde{T}_{[cd]b} - 4\tilde{T}^{ab}_{a}\partial^{cd}\tilde{T}_{[cb]d} - 2\partial_a T^{cd}_{b}\partial^a \tilde{T}^{f}_{cf} - 2\partial_a \tilde{T}^{b}_{[bc]}\partial^a \tilde{T}^{f}_{[cf]}\Big] \qquad [15]$$

que no propaga ningún grado de libertad físico en cuatro dimensiones. S_{FP} es la acción de Fierz-Pauli para el campo T_{ab}

$$S_{FP} = \int d^4x\left[\partial_a T^{ab}\partial_c T^c_b - \frac{1}{2}\partial_a T^{bc}\partial_a T_{bc} - \partial_a T^{ab}\partial_b T^c_c + \frac{1}{2}\partial_b T^a_a \partial_b T^c_c\right] \qquad [16]$$

que describe la propagación de 2 grados de libertad físicos en cuatro dimensiones, correspondientes a un gravitón. S_B es la acción para un campo antisimétrico: $S_B = -\frac{1}{2\cdot 3!}\int d^4xH_{abc}H^{abc}$ y S_A es la acción de Maxwell: $S_B = -\frac{1}{4}\int d^4x\tilde{F}_{ab}\tilde{F}^{ab}$. Así que la acción reducida se describe por las acciones de Curtright, de Fierz-Pauli y las acciones para un campo antisimétrico de segundo orden y un campo vectorial. Ahora comparemos este resultado con la reducción dimensional de la acción de Fierz-Pauli sin masa en 5 dimensiones.

$$S = \int d_A h^{AB}\left[\partial_A h^{AB}\partial_C h^C_B - \frac{1}{2}\partial_A h^{BC}\partial^A h_{BC} - \partial_A h^{AB}\partial_B h^C_C + \frac{1}{2}\partial_B h^A_A \partial^B h^C_C\right] \qquad [17]$$

Es bien conocido que esta acción se reduce a cuatro dimensiones para describir un campo de spin 2, un campo vectorial y un campo escalar. Veamos rápidamente este hecho. El campo h_{AB} se descompone de la siguiente manera $h_{AB} = (h_{mn}, h_{m5} \equiv A_m, H_{55} \equiv \phi)$. La acción reducida a cuatro dimensiones es

$$S = \int d^4x\Big[\partial_a h_{ab}\partial_c h_{cb} - \frac{1}{2}\partial_a h_{bc}\partial^a h_{bc} - \partial_a h^{ab}\partial_b h + \frac{1}{2}\partial_a h\partial^a h - \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} - \partial_a h_{ab}\partial_b\phi + \partial_a h\partial^a\phi\Big] \qquad [18]$$

Observemos que el campo escalar ϕ aparece acoplado con el campo h_{ab}, el cual podemos desacoplarlo si definimos $h_{ab} = \tilde{h}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\phi$. La acción reducida resulta ser en cuatro dimensiones la suma de la acción de Fierz-Pauli más las acciones de un campo vectorial (Maxwell) y un campo escalar:

$$S = \int d^4x\Big[\partial^\alpha h_{ab}\partial^c h_{cb} - \frac{1}{2}\partial_a h_{bc}\partial^a h_{bc} - \partial_a h^{ab}\partial_b h + \frac{1}{2}\partial_a h\partial^a h - \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} - \frac{1}{2}\partial^\alpha\phi\partial^\alpha\phi\Big] \qquad [19]$$

Por lo tanto, las reducciones dimensionales de la teoría de Curtright y la de Fierz-Pauli en cuatro dimensiones proporcionan las dualidades que existen en cuatro dimensiones: la teoría de spin 2 es autodual como lo es la teoría de spin y un campo escalar ϕ y un campo antisimétrico B_{mn}.

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado dos aspectos sobre la dualidad para spin 2. El primero tiene que ver con la equivalencia dual canónica para dos teorías que describen spin 2 masivo. El segundo punto estableció la autodualidad de la teoría para spin 2 sin masa (gravitación linealizada), realizando la reducción dimensional de las acciones duales de Curtright y Fierz-Pauli en cinco dimensiones.

Agradecimientos

Uno de los autores (A. K.) agradece al Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico de la Universidad de los Andes por el financiamiento de este trabajo, a través del proyecto C-1063-01-05-B.

Referencias bibliográficas

1. CASINI H., MONTEMAYOR R., URRUTIA L. ***Phys. Rev. D.*** 66, 085018, 2002.
2. CASINI H., MONTEMAYOR R., URRUTIA L. ***Phys. Rev. D.*** 68, 065011, 2003.
3. BOULANGER S., NOCKAERT C., HENNEAUX M. ***A note on spin-s duality***. ***JHEP,*** 030: 6023, 2003.
4. CURTRIGHT T. ***Phys. Lett. B.*** 165: 304, 1985.