CIENCIA 11(3), 221 - 229, 2003
Maracaibo, Venezuela

Una visión panorámica de la dinámica de Nambu*

Simón Codriansky[1**]

[1]*Departamento de Matemáticas y Física, Instituto Pedagógico de Caracas, El Paraíso, Caracas 1010, Venezuela*

Recibido: 30-06-03. Aceptado: 30-07-03

Resumen

El siguiente trabajo presenta resultados recientes en el desarrollo del esquema dinámico de Nambu. Este esquema admite espacios de fase de dimensión N par o impar; el primer caso de dimensión impar que no puede ser puesto en correspondencia con el esquema Hamiltoniano corresponde a N=3 y por lo tanto a éste se le presta atención preferencial en la primera parte de la exposición. La segunda parte está dedicada a la siguiente pregunta: ¿es posible imitar en el esquema de Nambu la descripción que se hace de la dinámica Hamiltoniana en términos de formas diferenciales? La respuesta es: para el caso en el que el espacio de fase tiene dimensión 3N y se lo considera desplegado por N tripletes es necesario hacer modificaciones al formalismo usual de formas diferenciales. La modificación más importante se manifiesta en la introducción de un nuevo producto exterior (denotado por ¯) que incluye en el nuevo esquema la posibilidad de que en situaciones muy bien definidas su resultado sea simétrico mientras que en otras (igualmente bien definidas) sea antisimétrico; esta propiedad se propaga a las definiciones de la diferencial, el campo vectorial, la contracción y la derivada de Lie. Con estas modificaciones se logra que las potencias de la forma diferencial canónica.

$$ {}^{m}_{1}\, dx_1 \;{}^{-}dx_2 \;{}^{-}dx_3 \qquad {}^{m}_{1}\, dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3 $$

sean invariantes integrales y que estos invariantes integrales tengan dimensión 3m con m=1,..,N.

Palabras clave: Dinámica de Nambu; forma canónica; cálculo exterior modificado.

An overview of Nambu dynamics

Abstract

This paper presents some new developments on the study of the Nambu dynamical system. The mathematical setting for this dynamical system allows for phase space of even or odd dimension N; the simplest case, of odd dimension, which cannot be put into correspondence with the Hamiltonian scheme has N=3 and therefore attention is paid to this to start with. Next the following question is addressed: to what extent is it possible to mimic the description of the Hamiltonian scheme using the language of differential forms? The answer is: if phase space is 3N dimensional and is spanned by [N] triplets some basic modifications are needed to the usual exterior calculus. Most important among them is the need of the introduction of a new exterior

* Trabajo presentado en el Segundo Congreso Venezolano de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Oriente. Cumaná, del 2000.

** Autor para la correspondencia. Email: codrians@cantv.net

product (denoted $\bar{\wedge}$) which has as a characteristic feature that in well defined circumstances it is symmetric while in others (also precisely defined) it is anti symmetric; this property requires the modification of the differential, the vector field, contraction and the Lie derivative. Once the modifications have been introduced the powers of the canonical differential form Ω are integral invariant and these invariants have dimension 3m with m=1,..., [N].

Key words: Canonical form; modified exterior calculus; Nambu dynamics.

1. Definiciones básicas

La dinámica de Nambu(1) es una propuesta que generaliza el esquema Hamiltoniano en al menos un aspecto: admite dimensión [N] par o impar para el espacio de fase F_N. Adolece de un problema importante: no se dispone de un principio variacional del cual derivar las ecuaciones de evolución. Las variables que despliegan el espacio de fase (x_i, i=1,...,[N]) definen el vector x= (x_1,...,x_N). La evolución de las x_i está determinada una vez que se introduce como información de entrada un cierto número K-1 de funciones (H_1,...,H_{K-1}), llamadas los Hamiltonianos del sistema. Si K=[N] se dice que el sistema consiste de un único multiplete de dimensión [N]. Si K divide a [N] ([N]=KS) entonces se dice que el sistema está descrito por S multipletes de dimensión K y las variables del espacio de fase se reescriben en la forma x_j^{α} donde a= 1,...,S, j= 1,...,K; el superíndice rotula el multiplete particular al cual x_j^{α} pertenece y el subíndice el lugar que ocupa dentro del multiplete. Con estas definiciones, las ecuaciones de evolución de las variables que despliegan el espacio de fase son

$$\dot{x}_i = \frac{\partial(x_i, H_1,\dots,H_{N-1})}{\partial(x_1,\dots,x_N)} \qquad [1]$$

en caso de un solo multiplete, y

$$\dot{x}_i^{\alpha} = \frac{\partial(x_i^{\alpha}, H_1,\dots,H_{K-1})}{\partial(x_1^{\alpha},\dots,x_K^{\alpha})} \qquad [2]$$

en caso de S multipletes de dimensión K. En [1] y [2] $\partial(\dots)/\partial(\dots)$ es un Jacobiano. Las definiciones (1) y (2) permiten calcular la evolución temporal de una variable dinámica F(**x**) mediante

$$\dot{F}(x) = \frac{\partial(F(x), H_1,\dots,H_{N-1})}{\partial(x_1,\dots,x_N)} \equiv \{F(x), H_1,\dots,H_{N-1}\} \qquad [3]$$

o

$$\dot{F}(x) = \sum_{\alpha=1}^{S} \frac{\partial(F(x), H_1,\dots,H_{K-1})}{\partial(x_1^{\alpha},\dots,x_N^{\alpha})} \equiv \{F(x), H_1,\dots,H_{K-1}\} \qquad [4]$$

De (3) y (4) es claro que los Hamiltonianos son constantes del movimiento, $\dot{H}_j = 0$ de manera que en el caso de un solo multiplete la solución del sistema (1) se encuentra en la región unidimensional determinada por la intersección de las N-1 hipersuperficies $H_j = C_j, j = 1,\dots,N-1$ mientras que en el caso de S multipletes de dimensión K la solución del sistema (2) se encuentra en la región [N-K+1] dimensional definida por $H_j = C_j, j = 1,\dots,K-1$ De [1] y [2] es directo

$$\partial^j \dot{x}_j = 0 \qquad [5]$$

$$\partial_{\alpha}^j \dot{x}_j^{\alpha} = 0 \qquad [6]$$

donde $\partial^j \equiv \partial/\partial x_j$, $\partial_{\alpha}^j \equiv \partial/\partial x_j^{\alpha}$ y la convención de suma se ha utilizado. La expresión (5) se conoce como condición de Liouville en caso de un multiplete; lo mismo para (6) cuando hay más de uno. Si los multipletes contienen dos variables (4) reproduce el corchete de Poisson para un espacio de fase de dimensión N=2S.

El desarrollo de la dinámica de Nambu ha seguido el camino trazado por el estudio de sistemas Hamiltonianos y en ese sentido se la ha descrito en términos de un corchete generalizado con propiedades similares al de Poisson; esto lleva a lo que se conoce como dinámica Hamiltoniana generalizada. En éste esquema la evolución de una variable dinámica está dada por

$$\dot{F}\ x \quad {}^{ij}\ x \quad {}_{i}F\ x \quad {}_{j}H\ x \quad F, H \qquad [7]$$

donde H(**x**) es el Hamiltoniano del sistema y $\Gamma^{ij}(\mathbf{x})$ es una matriz antisimétrica en (i, j). La identidad de Jacobi toma la forma

$$^{ij}\ {}_{j}\ {}^{lm}\quad {}^{l}\ {}_{j}\ {}^{mi}\quad {}^{mj}\ {}_{j}\ {}^{il}\quad 0 \qquad [8]$$

La dinámica de Nambu se escribe en la forma de la dinámica Hamiltoniana generalizada eligiendo arbitrariamente uno de los Hamiltonianos H_j como el único Hamiltoniano H (por ejemplo H_1=H) de manera que Γ^{ij} se obtiene por inspección

$$^{ij} \quad {}^{ijj_2 \cdots j_{K-1}} \quad {}_{j2}H_2 \cdots \ {}_{j_{K-1}}H_{K\ 1} \qquad [9]$$

que incluye los dos casos (uno o varios multipletes). Si la dimensión del espacio de fase es impar el determinante de Γ^{ij} se anula de manera que automáticamente aparecen vectores nulos asociados. Detalles acerca de corchetes singulares en (2).

Derivaciones de la dinámica de Nambu

Algunos intentos por derivar la dinámica de Nambu a partir de la información disponible se presentan muy brevemente en ésta subsección. Ya que se conoce que en el caso de un solo multiplete hay [N-1] constantes de movimiento, se dispone de igual número de ecuaciones diferenciales simultáneas para obtener las velocidades $\dot{x}_i$ lo cual permite expresar [N-1] de ellas en términos de, por ejemplo, $\dot{x}_N$ ($_j$ es el determinante obtenido al borrar la primera fila y la j-ésima columna en el Jacobiano

$$x_j, H_1, \ldots, H_{N\ 1} \ \Big/ \ x_1, \ldots, x_N \qquad [10]$$

si se elige, en este caso de manera arbitraria, $\dot{x}_N \quad {}_N$ se obtienen las ecuaciones [1]. Para detalles consultar Razavy (3).

Cohen (4) toma como punto de partida un conjunto de N-1 Hamiltonianos independientes del tiempo y uno explícitamente dependiente del tiempo como constantes de movimiento. Las [N] $\dot{x}_i$ se calculan a partir de $\dot{H}_j \quad 0, \ j \quad 1, \ldots, N$ y mediante el artificio de un cambio en la variable temporal, una vez que se ha demostrado que el nuevo parámetro es monótono, se obtienen las ecuaciones [1].

Algún intento de derivar las ecuaciones cuando hay más de un multiplete no ha sido presentado; en ese caso se cuenta solamente con K-1 constantes de movimiento de manera que sólo K-1 de las $\dot{x}_j$ pueden ser despejadas. Al igual que en el esquema Hamiltoniano el equivalente de la identidad de Jacobi (sección *La identidad fundamental*) podría ser de utilidad para construir los invariantes integrales restantes y al igual que en ese formalismo no se dispone de una forma sistemática de hacer esa construcción. Es importante comentar que el hecho de obtener solamente K-1 de las $\dot{x}_j$ no convierte al sistema en uno con vínculos ya que este número está determinado por las superficies integrales conocidas.

La identidad fundamental

Es sabido que la identidad de Jacobi expresa, en caso de la dinámica Hamiltoniana, la consistencia entre las operaciones de derivación respecto del tiempo y el corchete de Poisson. En efecto, al imponer

$$\frac{d}{dt}\ A, B \qquad \frac{dA}{dt}, B \qquad A, \frac{dB}{dt} \qquad [11]$$

se obtiene la identidad de Jacobi al usar $dA/dt \quad$ A,H . Al generalizar (11) a un multiplete de dimensión [N] el equivalente de la identidad de Jacobi tendrá N+1 términos; la relación obtenida se ha llamado Identidad Fundamental en Takhtajan (5). Es importante comentar que la formulación original de la dinámica de Nambu (1) no incluye la Identidad Fundamental. Para más detalles ver la sección titulada *Cuestiones algebraicas*

Invariantes integrales

El equivalente de los invariantes integrales de Poincare es definido por Kálnay y Tascón (6). Considerar el caso en que hay más de un multiplete. Para ello se define una s-coordenada como un conjunto de s funciones de las variables del espacio de fase y un N-s momento como el conjunto $f_1, \ldots, f_{N\ s}$. Un invariante integral J_r satisface

$$\dot{J}_r \quad \frac{d}{dt} \int^{N}_{1} \sum^{s}_{j\ 1} \sum^{N\ s}_{k\ 1} dq_j df_k \quad 0 \qquad [12]$$

en particular se obtienen invariantes integrales si se toma $q_{i_k} \;\; x_{i_k}, k \;\; 1,\ldots,8$, y $q_{j_k} \;\; x_{i_k}, k \;\; s \;\; 1,\ldots,[N]$

Singlete

El caso extremo de multiplete lo constituye un singlete, es decir un multiplete que contiene solamente una coordenada. Este objeto fue introducido por Codriansky (7) acoplándolo con un triplete; la parte que describe el singlete es simétrica y aquella que describe el triplete es antisimétrica, como en (3) o (4). Cuando un singlete se encuentra libre corresponde a un reloj a fin de satisfacer la condición de Liouville. Un ejemplo interesante surge de pedir que un doblete sea descrito, alternativamente, por un par de singletes. Si el Hamiltoniano que describe el doblete es $H(x_1, x_2)$ y el que describe los dos singletes es $G(x_1, x_2)$, la evolución temporal de las variables implica

$$\dot{x}_1 \quad {}_2H \quad {}_1G; \quad \dot{x}_2 \quad {}_1H \quad {}_2G \qquad [13]$$

de donde se obtiene que $H(x_1, x_2)$ y $G(x_1, x_2)$ son las partes real e imaginaria de una función analítica.

La condición de Liouville y la dinámica de Nambu

El sistema dinámico de Nambu satisface la condición de Liouville (5) o (6). La afirmación inversa no es válida, es decir, un sistema que satisface la condición de Liouville no corresponde necesariamente a un sistema dinámico de Liouville. La forma más simple de mostrarlo es exhibiendo un ejemplo. Considerar (8)

$$\frac{d^3x}{dx^3} \quad ax \quad b\frac{dx}{dt} \qquad [14]$$

que se convierte, definiendo $x_1=x$, $x_2=dx/dt$, $x_3=d^2x/dt^2$, en

$$\frac{dx_1}{dt} \quad x_2, \frac{dx_2}{dt} \quad x_3, \frac{dx_3}{dt} \quad ax_1 \quad bx_2 \qquad [15]$$

que satisface la condición de Liouville. Es directo comprobar que este es un triplete de Nambu si $(a/2)^2-(b/3)^3<0$; los Hamiltonianos son $H_1=x_1-x_3/b$, $H_2= bx_2^2 \quad x_3^2$. Se obtiene un sistema formado por un singlete y un doblete si a= 1, b=0 y un sistema Hamiltoniano generalizado si a=0.

Relación entre los esquemas de Hamilton y Nambu

A pesar de que el desarrollo del esquema dinámico de Nambu ha seguido la pauta del esquema Hamiltoniano es interesante preguntar cuán diferentes son ambos en el caso de un espacio de fase de dimensión par. Parte de la respuesta se obtiene del teorema de Lie y Koenigs (9) que establece que un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas puede ser parcialmente Hamiltonianizado; esto significa que el sistema original puede ser puesto en correspondencia con uno descrito por una función Hamiltoniana que reproduce un subconjunto de las ecuaciones del sistema original que se completa con ecuaciones que no se derivan usando el método Hamiltoniano. Este resultado permite estudiar el conjunto de sistemas dinámicos de Nambu y preguntar si alguno puede ser Hamiltonianizado parcialmente e inversamente, dado un sistema Hamiltoniano determinar las condiciones para que pueda ser descrito mediante el formalismo de Nambu. Considerar el siguiente conjunto de tres Hamiltonianos en un espacio de fase de dimensión cuatro

$$H_1 \quad \frac{1}{2} \quad x_1^2 \quad x_2^2 \quad , H_2 \quad \frac{1}{2} \quad x_3^2 \quad x_4^2 \quad ,$$
$$H_3 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 ; \qquad [16]$$

es directo comprobar que las ecuaciones de evolución para las x_i no determinan un sistema Hamiltoniano.

El problema inverso requiere determinar los tres Hamiltonianos H_1, H_2, H_3 que permiten que, dado H, se cumpla (e_{jk} son los elementos de la matriz simpléctica)

$$_{ijkl} \quad {}_j H_1 \quad {}_k H_2 \quad {}_1 H_3 \quad e_{ik} \quad {}_k H \qquad [17]$$

las condiciones de integrabilidad se reducen a seis ecuaciones diferenciales parciales acopladas para los H_i. Una vez satisfechas es necesario regresar a [17] para elegir del conjunto de soluciones aquellas que la satisfacen. Este algoritmo ha sido puesto en práctica en casos que determinan familias de Hamiltonianos H. No se dispone aún de la prueba completa de que [17] se satisface.

Una indicación diferente proviene de que los grupos canónicos no coinciden. En efecto, el grupo canónico para el sistema Hamiltoniano está formado por las transformaciones canónicas (que dejan invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton) mientras que el grupo canónico para el sistema dinámico de Nambu está formado por transformaciones de coordenadas con determinante igual a 1; este caso, sin embargo, admite cambios en las funciones Hamiltonianas cuyo determinante es la unidad, estas transformaciones fueron llamadas "de calibre" (1). La combinación de ambos tipos de transformación da origen a una que mantiene la forma de las ecuaciones de evolución y es, por lo tanto, canónica.

2. Descripción geométrica del sistema dinámico de Nambu

El sistema Hamiltoniano

La descripción geométrica de la dinámica Hamiltoniana se basa en la existencia de una 2-forma cerrada, no degenerada; es el esquema simpléctico. De acuerdo al teorema de Darboux esa 2-forma siempre puede escribirse (al menos localmente)

$$^{(2)} \quad {}_{i\;1}^{\;n} \, dq_i \quad dp^i \qquad [18]$$

en un espacio de fase de dimensión 2n. La 2-forma $\omega^{(2)}$ es conservada por el campo vectorial de Hamilton

$$\mathrm{v}_H \quad {}_{i\;1}^{\;n} \quad \frac{}{\mathrm{p}^i} \frac{}{q_i} \quad \frac{}{q_i} \frac{}{p^i} \qquad [19]$$

en el sentido de que la derivada de Lie operando sobre $\omega^{(2)}$ se anula. Las ecuaciones de evolución de Hamilton se escriben

$$i_v \qquad dH$$
$$£_v \quad ^{(2)} \quad 0 \qquad [20]$$

donde i_{v_H} es el operador de contracción asociado al campo Hamiltoniano. (Recordar: $i_{v_H}(dq_i) \quad \frac{}{p^i}$)). Al usar

$$\frac{d}{dt} I^{(2)} \quad \frac{d}{dt} \quad ^{(2)} \quad £_v \quad ^{(2)} \quad 0 \qquad [21]$$

resulta que $I^{(2)}$ es un invariante integral. El resto de los invariantes integrales es (k=2, , n)

$$I^{2k} \quad {}^{(2)} \; {}^{k} \qquad [22]$$

que corresponden a los invariantes integrales de Poincare. El invariante I^{2n} corresponde al volumen de una región del espacio de fase y su invariancia corresponde a la condición de Liouville. El hecho de usar el lenguaje geométrico hace que la descripción sea invariante de coordenadas.

El conjunto de campos vectoriales Hamiltonianos forma un álgebra de Lie cuyo producto es el conmutador; es decir,

$$\mathrm{v}_H , \mathrm{v}_G \quad \mathrm{v}_H \ \mathrm{v}_G . \ \mathrm{v}_G \ \mathrm{v}_H \quad \mathrm{v}_{\ H,G} \qquad [23]$$

donde {H,G} es el corchete de Poisson de H y G.

El sistema de Nambu en caso de varios tripletes

La descripción geométrica del sistema de Nambu se hace siguiendo el ejemplo del sistema Hamiltoniano. El espacio de fase tiene dimensión 3S y se considera desplegado por S tripletes. Las ecuaciones de evolución son un caso particular de las (2) con K=3 (α=1,,S)

$$\frac{d}{dt} x_i^{\alpha} \quad \frac{x_i^{\alpha}, H_1, H_2}{x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha}, x_3^{\alpha}} \quad {}_{ijk} \ \frac{1}{\mathrm{x}_j^{\alpha}} \frac{H_2}{\mathrm{x}_k^{\alpha}} \quad \mathrm{v}_i^{\alpha} \qquad [24]$$

de manera que el campo vectorial de Nambu es

$$\mathrm{v}_{H_1 H_2} \quad \sum_{1}^{S} \sum_{i\ 1}^{3} \mathrm{v}_i \ \overline{\ x_i\ } \qquad [25]$$

Las ecuaciones [24] se reproducen si se postula una 3-forma cerrada no degenerada ${}^{(3)} \quad dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3$ de manera que al contraerla con el campo vectorial $\mathrm{v}_{H_1 H_2}$ se obtienen los $\frac{d}{dt} x_i$. Por otra parte, la derivada de Lie asociada con el campo vectorial de Nambu actuando sobre $\omega^{(3)}$ se anula de manera que ${}^{(3)}$ es un invariante integral. Sin embargo, debido a la antisimetría del producto exterior cualquier potencia de $\omega^{(3)}$ se anula y no es posible reproducir el resto de los invariantes integrales (en caso de que existan); la situación se extiende trivialmente hasta la forma de orden máximo de manera que no es posible definir la forma de volumen y por lo tanto no es posible disponer de la condición de Liouville, que es claramente válida en el esquema dinámico de Nambu (ver (6)). Este problema fue detectado muy tempranamente (10) y se afirmó que la descripción geométrica del sistema de Nambu no es posible. Una solución, propuesta, (11) hace uso de lo que se llamó "diferenciales parciales" y que propone desmontar la forma $\omega^{(3)}$ y considerar cada uno de sus sumandos por separado. El problema encontrado aquí es que el único invariante integral es el de volumen de manera que la condición de Liouville se mantiene. Esta descripción es como sigue: definir operadores d_{α}, α=1,...,S tales que para una p-forma\ ${}_{j \cdots j_p} \, dx_{j1} \ \ldots \ dx_{jp}$

$$d \quad \sum_{i\ 1}^{3} \frac{{}_{j1 \cdots j_p}}{x_i} dx_i \quad dx_{j1} \ldots \ dx_{jp} \qquad [26]$$

Definir S 3-formas ${}^{(3)} \quad dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3$ y definir d por las relaciones $d_{\alpha} d_{\beta} = - \, d_{\beta} d_{\alpha}$, $d^2 \quad 0$ y $d = d_1 + \ldots + d_S$. Usando el campo vectorial de Nambu es inmediato derivar $i_{\mathrm{v}} \ {}^{(3)} \quad d\ H \quad d\ G, \quad 1,\ldots,S.$ Por otro lado, la acción de la derivada de Lie sobre ${}^{(3)}$ es

$$\pounds_{\mathrm{v}} \ {}^{(3)} \quad d \ d \ H \quad d \ G \quad 0 \qquad [27]$$

de manera que la derivada de Lie de la 3-forma ${}^{(3)}$ ${}^{(3)}$ es diferente de cero. De esto sigue que ${}^{(3)}$ ni ${}^{(3)}$ son invariantes integrales como tampoco ${}^{(3)}_{1} \ {}^{(3)}_{2},, \ {}^{(3)}_{1} \ {}^{(3)}_{2} \ {}^{(3)}_{3}, \ldots, \ {}^{(3)}_{1} \ldots \ {}^{(3)}_{S-1}$. Sin embargo, la integral de la forma de volumen es un invariante integral garantizando el teorema de Liouville. Este resultado claramente contradice el de Estabrook (10).

El resto de la presentación se dedica a mostrar la forma en la que las dificultades descritas antes se resuelven modificando de manera fundamental las operaciones definidas en un álgebra exterior.

Cálculo exterior modificado

Es claro que el origen de la dificultad para describir geométricamente un sistema dinámico de Nambu se encuentra en la antisimetría del producto exterior. De manera que la modificación debe hacerse a ese nivel fundamental. La antisimetría no puede ser mantenida y es por esa razón que se generaliza el cálculo exterior definiendo un nuevo producto exterior $\bar{\ }$, al que se denomina e-producto, por la siguiente propiedad

$$dx_i \;\bar{}\; dx_j \qquad 1^{\ ij}\, dx_i \;\bar{}\; dx_j \qquad [28]$$

de manera que si las 1-formas involucradas se encuentran en el mismo multiplete el e-producto es antisimétrico y si se encuentran en diferentes multipletes $\bar{\ }$ es simétrico.

Comentario: la definición formal del e-producto se realiza simetrizando el producto tensorial de las 1-formas involucradas y extendiéndolo por linealidad.

El cálculo de la segunda diferencial de una función sobre el espacio de fase es

$$d^2 f\ x \qquad \frac{{}^2 f\ x}{x_i\quad x_j} dx_i \;\bar{}\; dx_j$$

$$\frac{{}^2 f\ x}{x_i\quad x_j} \quad \frac{{}^2 f(x)}{x_j\quad x_i}\ dx_i \;\bar{}\; dx_j \qquad [29]$$

de manera que para que la segunda diferencial se anule debe ocurrir que

$$\frac{{}^2 f(x)}{x_i\quad x_j} \quad \frac{{}^2 f(x)}{x_j\quad x_i} \quad 0 \qquad [30]$$

Al mismo tiempo que se han introducido esas modificaciones, es necesario revisar la contracción y la derivada de Lie. El cálculo de la derivada de Lie sobre la 3-eforma $\omega^{(3)}$ que resulta de comparar la 3-eforma en dos instantes cercanos resulta en

$$£_{v} \qquad {}^1 v_1 \quad {}^2 v_2 \quad {}^3 v^3$$

$$dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3 \qquad [31]$$

que se anula debido a la condición de Liouville

$${}^1 v_1 \quad {}^2 v_2 \quad {}^3 v_4 \quad 0 \qquad [32]$$

de acuerdo a la cual para α fijo ${}^1 v_1 \quad {}^2 v_2 \quad {}^3 v_4 \quad 0$. El resultado es que la 3-eforma $\omega^{(3)}$ es un invariante del campo vectorial de Nambu. Una consecuencia directa de éste cálculo es que al comparar $\omega^{(3)}$ en dos instantes diferentes y debido a la conmutación de la integral con la derivada de Lie, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \quad {}_3 \quad {}^{(3)} \qquad {}_3\, £_{V} \quad {}^{(3)} \quad 0 \qquad [33]$$

donde Ω^3 es la región de integración, como consecuencia de [33] los invariantes integrales son $\ {}_3 \quad {}^{(3)}\ {}^{k}$ k=1,…,S. La contracción se modifica de la siguiente manera

$$i_{v}\ \ f \quad 0$$

$$i_{v}\ \ dx_i \qquad v_i$$

$$i_{v}\ \ dx_i \;\bar{}\; dx_j$$

$$i_{v}\ \ dx_i \quad dx_j \qquad 1^{\ ij}\, i_{v}\ \ dx_j \quad dx_i \qquad [34]$$

lo cual muestra que la contracción se define unívocamente una vez que su acción sobre 0-eformas, 1-eformas y 2-eformas se ha determinado.

Consecuencias

1. La primera consecuencia de la introducción del e-producto es que el cua-

drado de $\omega^{(3)}$ es diferente de cero y de hecho es fácil comprobar que $^{(3)}\ ^{k}\quad 0$ para k=1,...,S, es decir, hasta que se obtiene la forma de volumen. Si k >S $^{(3)}\ ^{k} = 0$.

2. La ecuación $i_{\mathrm{v}}\ ^{(3)}\quad dH\ \bar{}\ dG\ \bar{}\ dH\ /\ 2$ define el campo vectorial **V** como el de Nambu.

3. Para estudiar la composición de dos campos vectoriales considerar campos de la forma

$$\bar{u}\quad u^{\ i},\bar{\mathrm{v}} = \mathrm{v}^{\ j},\bar{w}\quad w^{\ k} \qquad [35]$$

el resultado es un campo vectorial de acuerdo al producto

$$\bar{u},\bar{\mathrm{v}}\ {}_{,}\quad \overline{u\mathrm{v}}\quad 1\ ^{ij}\ \bar{\mathrm{v}}\bar{u}; \qquad [36]$$

Las relaciones similares a la identidad de Jacobi para los diferentes casos son
$A,B\qquad AB\quad BA$

$$\bar{u},\ \bar{\mathrm{v}},\bar{w}\qquad \bar{\mathrm{v}}\ \bar{\mathrm{w}},\bar{\mathrm{u}}\qquad \bar{w},\ \bar{u},\bar{\mathrm{v}}$$
$$0 \qquad [37]$$

$$\bar{u},\ \bar{\mathrm{v}},\bar{w}\qquad \bar{\mathrm{v}}\ \bar{\mathrm{w}},\bar{\mathrm{u}}\qquad \bar{w},\ \bar{u},\bar{\mathrm{v}}$$
$$0 \qquad [38]$$

$$\bar{u},\ \bar{\mathrm{v}},\bar{w}\qquad \bar{\mathrm{v}}\ \bar{\mathrm{w}},\bar{\mathrm{u}}\qquad \bar{w},\ \bar{u},\bar{\mathrm{v}}$$
$$0 \qquad [39]$$

Cuestiones algebraicas

Una variedad de Poisson se define como una en la cual el producto es el corchete de Poisson definido por sus propiedades básicas: linealidad, antisimetría, derivación, identidad de Jacobi. Una variedad de Nambu se define de manera similar tomando como producto el corchete de Nambu. Si se consideran solamente la linealidad, antisimetría y derivación la estructura se ha denominado [12]. Álgebra clásica de Nambu de tipo I (ACN-I); si a eso se le agrega el equivalente de la identidad de Jacobi en el caso de un solo triplete

$$\frac{d}{dt}\ A,B,C\qquad \tfrac{d}{dt}A,B,C\qquad A,\tfrac{d}{dt}B,C\qquad A,B,\tfrac{d}{dt}C \qquad [40]$$

que se expresa en la forma (H, G Hamiltonianos)

$$A,B,C\ ,H,G\qquad A,H,G\ ,B,C\qquad A,\ B,H,G\ ,C$$

$$A,B,\ C,H,G \qquad [41]$$

que se generaliza de manera evidente a un conjunto cualquiera de cinco funciones sobre el espacio de fase. La ecuación [41] no se satisface idénticamente; por lo tanto es una condición que debe ser satisfecha. En caso de un multiplete de dimensión S [41] tiene S+1 términos; a esa forma general se le llamó Identidad fundamental (5). Una variedad ACN-I que satisface la identidad fundamental se define (12) como Álgebra clásica de Nambu de tipo II (ACN-II). La razón dada (12) para esa separación es que en la formulación original de Nambu (1) solamente se mencionan las condiciones que definen ACN-I.

La propiedad básica de ACN-I es que si se toman dos representaciones de esa álgebra su producto tensorial es de tipo ACN-I. Por otra parte, el producto tensorial de dos representaciones de ACN-II no es de tipo ACN-II. Es sabido que para recuperar la posibilidad en ACN-II de obtener un álgebra de tipo ACN-II al construir el producto tensorial de dos ACN-II es necesario introducir estructuras adicionales que convierten a ACN-II en un álgebra de Hopf. Este resultado es un segundo indicio de que el sistema dinámico de Nambu está fuertemente relacionado con geometrías no conmutativas. El primero es la realización de el producto en términos de objetos que no conmutan. Acerca de éste punto no se harán más comentarios debido a que los resultados concretos de los cuales se dispone se encuentran en etapa muy incipiente.

Referencias Bibliográficas

1. NAMBU Y. ***Phys Rev*** D7: 2405-2412, 1973.
2. SUDARSHAN E.C.G., MUKUNDA N. ***Classical dynamics. A modern perspective***, John Wiley, New York (USA),1974.
3. RAZAVY M., KENNEDY F. ***J Can J Phys*** 52: 1532-1546, 1974.
4. COHEN I. ***Int J Theor Phys*** 12: 69-78, 1975.
5. TAKHTAJAN L. ***Commun Math Phys*** 160: 295-315, 1994.
6. KÁLNAY A.J., TASCÓN R. ***Int J Theor Phys*** 16: 635-648, 1977.
7. CODRIANSKY S., GONZALEZ C.A. ***Nuevo Cimento*** 97: 64-74, 1987.
8. CODRIANSKY S., NAVARRO R., PEDROZA M. ***J Phys A:Math Gen*** 29: 1037-1044, 1996.
9. WHITTAKER E. ***A treatise on the analytic dynamics of particles and rigid bodie***s, Cambridge University Press, London, p. 275, 1937.
10. ESTABROOK F.B. ***Phys Rev*** D8: 2740-2743, 1973.
11. FECKO M. ***J Math Phys*** 33: 926-929, ibid 930-933, 1992.
12. SAHOO D., VALSAKUMAR M.C. ***Phys Rev*** A46: 4410-4412, 1992.