CIENCIA 9(3), 391-397, 2001
Maracaibo, Venezuela

Una posible formulación de calibre para la gravedad

Rolando Gaitan

Grupo dse Física Teórica, Departamento de Física, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Apartado Postal 129. Guaparo, Valencia 2001, Venezuela. Fax: 0214-8253932. E-mail: rgaitan@fisica.ciens.ucv.ve

Recibido: 15-05-00 Aceptado: 02-08-01

Resumen

Una posible reformulación Lagrangiana de tipo Yang-Mills para la gravitación de Einstein es presentada. El punto de partida consiste en las siguientes dos suposiciones. Primero, la métrica es asumida como un mapa real definido sobre grupo de calibre dado. Segundo, se introduce una densidad lagrangiana general invariante de calibre con la condición de que esté relacionada con la de Einstein a menos de un término de borde de manera que las acciones sean idénticas. Se estudian soluciones estacionarias del vacío en la teoría abeliana mostrándose la relación de éstas con la formulación tipo Maxwell de Möller para la gravedad. Finalmente, estudiamos el límite Newtoniano de esta reformulación.

Palabras clave: Formulación Lagrangiana de campos; relatividad general; teoría de calibre.

A possible formulation of calibration for gravity

Abstract

A possible Yang-Mills like alternative lagrangian reformation for Einstein gravity is presented. The starting point consists on two next assumptions. First, the metric is assumed as a real map defined on certain given gauge group. Second, a gauge invariant general lagrangian is introduced with the condition that it is related to the Einstein one up a bound term in the way that their actions are equal. Stationary vacuum solutions of the abelian theory are studied, showing the relation between these and the Maxwell-like gravity formulation of Möller. Finally, we study the Newtonian limit of this reformation.

Keywords: Gauge theory; general relativity field; Lagrangian formulation.

Introducción

Desde la aparición de la teoría de la Relatividad General, se han considerado formulaciones Lagrangianas Cuadráticas en la Curvatura (LCC) de Riemann-Christofell para la gravitación (1-13), a las cuales muchos autores acostumbran llamar “formulaciones tipo Yang-Mills”. En éstas, siguiendo el método variacional de Palatini se recuperan las ecuaciones de campo de la teoría original de la gravedad de Einstein (12). Por otro lado, el hecho de que la adición de términos cuadráticos en la curvatura de Riemann-Christoffel al lagrangiano gravitacional lineal en el escalar de Ricci conduce a una teoría con problemas de renormalización menos severos (14), ha seguido impulsando el estudio de formulaciones LCC (15-18). Esta situación es parecida a lo que sucede en el estudio de la renormalización de las teorías de tipo Yang-Mills (19, 20).

Paralelamente a esta corriente de investigación, e inmediatamente después del planteamiento de la Teoría de calibre de Yang-Mills (TYM) (21), R. Utiyama (22) fue el primero en notar el "carácter" de tipo calibre del campo gravitacional. Si a esto se suma el éxito alcanzado por la TYM en su aplicación al modelo electro-débil (23-26), hecho que coloca a ésta como posible candidata para describir y cuantizar las interacciones fundamentales de la naturaleza se tiene una considerable motivación para tomar en cuenta, lo que podríamos llamar formulaciones de tipo calibre para la gravedad. Aquí, nos referimos a construcciones en las que la gravitación esté descrita mediante una conexión sobre cierto fibrado. Dentro de la generalidad de estas teorías (27-32) se destaca la formulación Hamiltoniana de A. Ashtekar (31) a partir de la cual se podría emprender un posible programa de cuantización de la gravedad.

El propósito fundamental de este trabajo es el de presentar una posible formulación lagrangiana invariante de calibre para la gravedad, siguiendo la idea de la TYM y en contraste con las teorías LCC.Para esto, nos basamos en la existencia de una uno-forma de conexión sobre cierto grupo de calibre G y la introducción de dos consideraciones de principio que justificaremos. Inmediatamente, discutimos la dinámica que se obtiene a partir de un principio variacional, mostrando su relación con las ecuaciones de campo de Einstein. Siguiendo esto, es de nuestro interés estudiar el caso abeliano de la formulación mostrando soluciones estacionarias de la conexión, así como la relación de éstas con la formulación de tipo Maxwell de Möller para la gravedad. Finalmente, discutimos la consistencia con el límite Newtoniano de las ecuaciones de campo obtenidas. Concluimos con algunos comentarios.

Formulación Lagrangiana de calibre

Sea G un grupo de Lie arbitrario con generadores t_a, $a = 1,2,\ldots, N$. Sea M^4 una variedad base, diferenciable y no necesariamente contractible. Así, se puede definir un fibrado sobre M^4 con G como grupo de estructura (fibrado principal), asumiendo que la proyección que define la fibra, las funciones de transición, etc., son dadas. Aquí se tiene una uno-forma de conexión con componentes $A_\mu = A_\mu^a t_a \left(\mu = 0,1,2,3\right)$ que transforma bajo cambios de calibre de la forma usual:

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1} \ , \ U \in G \ . \qquad [1]$$

Seguidamente, consideraremos mapas invariantes sobre M^4 que van de G a los reales R^1. Para garantizar la invariancia de calibre y la covariancia general de estos mapas pensaremos en construcciones que contengan, por ejemplo trazas de funcionales que dependan de potencias de $\Lambda_\mu \equiv A_\mu - \overline{A_\mu}$ donde $\overline{A_\mu}$ es la conexión de fondo (elemento arbitrario de G), lo cual es conveniente ya que Λ_μ transforma como la curvatura de Yang-Mills. La idea de conexión de fondo ha sido utilizada, por ejemplo en el contexto de la cuantización de la teoría Einstein-Yang-Mills (33), aquí solo la consideraremos a nivel clásico. Aquí, por generalidad también podrían incluirse funcionales de Wilson o "Wilson Loop" definido como la traza de la Holonomía: $W(c) = trH(c) \equiv trP\exp\left(i\oint_c A\right)$, donde es un elemento del Grupo de Ciclos (34) inscrito en el espacio-tiempo 3+1. En todo caso, dado que nos interesará mirar a la conexión como variable dinámica, indicaremos la dependencia funcional de los mapas explícitamente de la forma $F(A(x))$.

Entonces, presentamos las dos consideraciones de principio que constituirán la reformulación de tipo calibre para la gravedad:

1. Asumida la posibilidad de construir mapas de G en R^1, el tensor métrico simétrico en dimensión 3+1 es realizado mediante una colección de 10 funcionales invariantes de calibre bajo G de la forma:

$$g_{\mu\nu}(x) \equiv S_{\mu\nu}(\Lambda(x)). \qquad [2]$$

2.- La densidad Lagrangiana es

$$L_G(A,\partial A) = -\frac{1}{4k}\sqrt{-S(A)}\,F^a{}_{\mu\nu}(A)F^{a\mu\nu}(A), \qquad [3]$$

donde es la curvatura de yang-mills, la constante de estructura del grupo y una constante real. Asumiremos que la relación [3] es una reformulación lagrangiana invariante de calibre de la teoría de Einstein si la acción construida con ésta ($I_G \equiv \int d^4x L_G$) es igual a la de Einstein evaluada sobre [2] ($I_R \equiv 1/16\pi\int d^4x\sqrt{-g}R(g_{\mu\nu}(x))\big|_{g-S}$). En otras palabras:

$$I_G = I_R\,. \qquad [4]$$

En virtud de la arbitrariedad de la región de integración podemos decir que

$$-\frac{1}{4}F^a{}_{\mu\nu}(A(x))F^{a\mu\nu}(A(x)) = \frac{1}{16\pi}R\Big(S_{\alpha\beta}(A(x))\Big) + \Omega^{\mu}{}_{;\mu}(x)\,, \qquad [5]$$

donde ";" simboliza la derivación covariante y $\Omega^{\mu}(x)$es una función de ordenr^{-1} con $n > 2$ cuando $r \to \infty$. Esta última condición sobre $\Omega^{\mu}(x)$ establece que la ligadura no holonómica [5] (llamada así debido a la arbitrariedad de $\Omega^{\mu}(x)$) selecciona los posibles campos físicos $A(x)$ para una funcional $S_{\alpha\beta}(A)$ dada.

La justificación de estas dos consideraciones de principio es como sigue. La primera presenta a la conexión A_{μ} como el campo fundamental de manera de extender las simetrías de la acción de Einstein, la cual si bien es invariante bajo el grupo de Transformaciones Generales de Coordenadas (TGC), ahora lo es también bajo el grupo de calibre G. Además, los grados de libertad locales que se propagan en la teoría son los asociados a A_{μ}, pudiéndose fijar el número de éstos luego de una selección adecuada del grupo de calibre G.

La discusión acerca de qué grupo G se debería escoger para lograr que coincidan los grados locales de libertad de esta formulación de calibre con los de la gravedad sería un tema abordado en un próximo trabajo donde sea considerado el conjunto completo de ligaduras.

La segunda consideración está relacionada con el aspecto dinámico del campo de calibre A_{μ}, proponiéndose una densidad Lagrangiana de la forma más simple posible que contenga primeras derivadas de esta conexión, sea invariante de calibre bajo G y transforme como una densidad bajo TGC. Al mismo tiempo, una ligadura no holonómica sobre A_{μ} aparece. Cuando una funcional$S_{\alpha\beta}(A)$ particular es escogida, las ecuaciones dinámicas de tipo Yang-Mills (ver ecuación [9]) están siendo preparadas para conducir a cierta solución de A_{μ}, pero la escogencia de la funcional debe ser consistente con la ligadura [5].

Dinámica

Aquí, haremos el análisis variacional de la acción total $I = I_G + I_M$, donde I_M es la acción de los campos materiales con $\delta I_M = -1/2\int d^4x\sqrt{-g}T_M^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$. Considerando a los campos materiales como campos externos, la extremal de la acción cuando variamos A_{μ}conduce a

$$\left\langle -\frac{1}{2}\Big(T_M^{\alpha\beta} + T_F^{\alpha\beta}\Big)\delta S_{\alpha\beta}(A) + \frac{1}{k}\Big(D_{\mu}F^{\mu\lambda}\Big)^b\delta A_{\lambda}^b\right\rangle = 0 \qquad [6]$$

donde $\langle\ldots\rangle = \int d^Ax\sqrt{-S}(\ldots)$, $T_M^{\alpha\beta}$es el tensor momento-energía de los campos materiales...". $T_F^{\alpha\beta}$el tensor momento-energía asociado a la curvatura de Yang-Mills, definido por:

$$T_F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{k}\left(F^{a\alpha}{}_{\sigma}F^{a\beta\sigma} - \frac{S^{\alpha\beta}}{4}F^a{}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\right), \qquad [7]$$

donde$S^{\alpha\beta}$ satisface $S^{\alpha\beta}S_{\alpha\mu} = \delta^{\beta}{}_{\mu}$, y D_{μ} es la derivada covariante bajo transformaciones de calibre y TGC

$$\Big(D_{\mu}F^{\mu\nu}\Big)^b \equiv F^{b\mu\lambda}{}_{;\mu} + C^{bac}A^a{}_{\mu}F^{c\mu\lambda}\,, \qquad [8]$$

con $F^{b\mu\lambda}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-S}}\partial_\mu\left(\sqrt{-S}F^{b\mu\lambda}\right)$.

Tomando variaciones arbitrarias δA_μ (con la conexión de fondo $\overline{\Lambda}_\mu$ y los ciclos fijos), las ecuaciones de campo, que llamaremos de tipo Yang-Mills son las siguientes

$$\left(D_\mu F^{\mu\lambda}\right)^b = \frac{k}{2}\left(T_M^{\alpha\beta} + T_F^{\alpha\beta}\right)M_b{}^\lambda{}_{\alpha\beta}, \qquad [9]$$

donde el objeto

$$M_b{}^\lambda{}_{\alpha\beta} \equiv \frac{\delta S_{\alpha\beta}(\Lambda)}{\delta A^b{}_\lambda}, \qquad [10]$$

representa al Jacobiano del mapa que va de G a R^1, definido mediante [2]. Ha de observarse que en general las soluciones de [9] dependerán de cuál prescripción se tome para la funcional $S_{\alpha\beta}(A)$, por supuesto respetando la ligadura [5].

Ahora bien, queremos comentar sobre la relación existente entre las ecuaciones de movimiento de tipo Yang-Mills con las ecuaciones de campo de Einstein dadas por:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{g^{\alpha\beta}}{2}R + 8\pi T_M{}^{\alpha\beta} = 0, \qquad [11]$$

con $R^{\alpha\beta}$ el tensor de Ricci. Definamos el objeto $N^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{g^{\alpha\beta}}{2}R + 8\pi T_M{}^{\alpha\beta}$ no necesariamente nulo en general para un $R^{\alpha\beta}$ no evaluado sobre las ecuaciones de Einstein [11]. Entonces, igualando la acción total $(I = I_{G+} + I_M)$ con la obtenida por la teoría de Einstein $(I = I_R\big|_{g=S} + I_M)$, y tomando variaciones arbitrarias en los campos A_λ^b, se obtiene:

$$\left(D_\mu F^{\mu\lambda}\right)^b - \frac{k}{2}\left(T_M{}^{\alpha\beta} + T_F{}^{\alpha\beta}\right)M_b{}^\lambda{}_{\alpha\beta} = -\frac{k}{16\pi}N^{\alpha\beta}M_b{}^\lambda{}_{\alpha\beta}. \qquad [12]$$

Es inmediato ver que cuando evaluamos [12] sobre las ecuaciones de Einstein $(N^{\alpha\beta} = 0)$ se garantizan las relaciones dinámicas [9]. No obstante, en general podrían encontrarse soluciones para las ecuaciones de tipo Yang-Mills que no garanticen de manera única las ecuaciones de Einstein, según [12]. Esto sugiere que el espacio de soluciones de la reformulación de calibre presentada contiene en general al de las soluciones de la relatividad general.

Solución de vacío no trivial en la Teoría Abeliana

Con la finalidad de obtener algunas soluciones estacionarias del vacío $(T_M{}^{\alpha\beta} = 0)$ para el caso abeliano, comenzamos por tomar el grupo de calibre $G = U(1)\times\overset{N}{\ldots}\times U(1)$. En otras palabras, tenemos N generadores que satisfacen un álgebra de Lie con constantes de estructura $C^{abc} = 0$ para todo $a, b, c = 1, 2, \ldots, N$. Además, nuestro sistema físico consistirá en un objeto compacto, estacionario y con simetría esférica. Este hecho, nos permitirá considerar una conexión estacionaria y función de la coordenada radial exclusivamente $(A^a{}_\mu(r))$. En este orden de ideas, y fuera de la fuente localizada (vacío) las ecuaciones de movimiento son ahora las siguientes:

$$F^{a\mu\lambda}{}_{;\mu} = \frac{k}{2}T_F{}^{\alpha\beta}M_b{}^\lambda{}_{\alpha\beta}. \qquad [13]$$

Si uno quiere resolver estas ecuaciones para la simetría definida, se puede decir algo sobre la forma funcional tanto de la conexión como de la métrica. En cuanto a $A^a{}_\mu(r)$, consideraremos el ansatz electrostático:

$$A^a{}_0 \neq 0, \qquad [14]$$

$$A^a{}_k = 0. \qquad [15]$$

En cuanto a la métrica asumiremos que ésta posee una forma estática (diagonal y no dependiente del tiempo) tipo Schwarzschild

$$diag\left[S_{00}\left(A^{b}{}_{0}\right), -\,{}^{1}\!/_{S_{00}\left(A^{b}{}_{0}\right)}, r^{2}, r^{2}sen^{2}\theta\right] \qquad [16]$$

Sustituyendo [14], [15] y [16] en [13] se obtiene

$$\frac{d^{2}A^{a}{}_{0}}{dr^{2}}+\frac{2}{r}\frac{dA^{a}{}_{0}}{dr}=0, \qquad [17]$$

$$A^{a}{}_{k}=0, \qquad [18]$$

cuya solución es

$$A^{a}{}_{0}=-n^{a}+\frac{b^{a}}{r}, \qquad [19]$$

$$A^{a}{}_{k}=0, \qquad [20]$$

donde n^{a} y b^{a} son constantes. Con esto no es difícil probar que de [5] se obtiene $\Omega^{1}(x)\sim 0\left(1/r^{-3}\right)$, lo cual muestra que el ansatz tipo Schwarzschild es satisfactorio.

Una solución particular interesante aparece si tomamos $b^{a}=n^{a}2m$, con $2m$ el radio de Schwarzschild:

$$A^{a}{}_{\mu}=n^{a}g_{o\mu}, \qquad [21]$$

indicando que $A^{a}{}_{\mu}$ es proporcional al cuadri-potencial gravitacional de la formulación tipo Maxwell que Möller utilizó en el estudio de la localización de la energía gravitacional (35,36). En referido trabajo, el autor presenta un potencial U(1) definido por:

$$A_{\mu}=g_{o\mu}, \qquad [22]$$

covariante bajo el subgrupo de transformaciones ortogonales al tiempo y el espacio, o sea

$$x'^{i}=f^{i}\left(x^{j}\right), \qquad [23]$$

$$x'^{0}=x^{0}. \qquad [24]$$

Entonces, la relación [21] tiene el mismo subgrupo de transformaciones de coordenadas.

Queremos finalizar esta sección con un comentario sobre la relación de la solución [21] con las correspondientes a otros tipos de simetrías en general. No es complicado probar que para el problema de Reissner-Nördstrom (problema sin vacío debido a la carga electrostática), [21] resuelve la ecuación de movimiento [9] a menos de un término de orden $O(r^{-4})$. Por otro lado, si uno explora una simetría no esférica como la del problema de Kerr, se puede mostrar que [21] satisface [13] a menos de un término de orden $O(r^{-5})$, escogiendo el ansatz: $A^{a}{}_{1}=A^{a}{}_{2}=0$ y $A^{a}{}_{3}=A^{a}{}_{3}(r,\theta)$.

Todo esto indica que las soluciones estacionarias de la formulación abeliana ($G = U(1)\times\overset{N}{\ldots}\times U(1)$) para las simetrías de Reissner-Nördstrom y Kerr pueden ser aproximadas mediante [21], en el límite $r\rightarrow\infty$. Este comportamiento asintótico de las soluciones es justamente la propiedad que Möller necesitó en su formulación para poder definir la energía total de manera satisfactoria.

El límite Newtoniano

Una propiedad de consistencia que debemos esperar de esta reformulación es la de que la teoría Newtoniana pueda ser recuperada con el límite no relativista de campo débil a partir de las ecuaciones de tipo Yang-Mills obtenidas.

En un régimen de velocidades bajas $\left(\left|v^{i}\right|=\left|{}^{dx^{i}}\!/_{dx^{0}}\right|<<1\right)$ y campo gravitacional débil, tomamos un sistema de coordenadas Galileanas x^{μ} y una métrica estacionaria $g_{\mu\nu}$ que difiere de la de Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$) en una perturbación débil $\left(\left|h_{\mu\nu}\right|<<1\right)$, es decir:

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}, \qquad [25]$$

con la propiedad $g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}-h^{\mu\nu}$. Seguidamente, la distribución de materia a considerar, corresponde a un fluido perfecto cuya presión y velocidad son despreciables en nuestro sistema Galileano. Por tanto, la única componente del tensor momento-energía de la materia a considerar será T_M^{00}, la cual relacionaremos con la densidad de masa.

Para completar el paso al límite Newtoniano en el contexto de la reformulación de tipo Yang-Mills, haremos las siguientes consideraciones. Primero, es requerido un comportamiento lineal del campo gravitacional débil, para lo cual pediremos que el grupo de calibre sea $G = U(1)\times\overset{N}{\ldots}\times U(1)$.

La segunda consideración es interpretar la relación [25] como la proveniente de la perturbación de la conexión vía [2]. Esto es, haciendo una variación infinitesimal $\delta A^a{}_\mu$ en [2] alrededor de un $A_0{}^a_\mu$ fijo con $S_{\alpha\beta}\left(A_0\right) = \eta_{\alpha\beta}$, se obtiene:

$$g_{\mu\nu}(x) = S_{\mu\nu}\big(A(x)\big) = \eta_{\mu\nu} + M^{\lambda}_{b\,\mu\nu}\left(A_{,o}\right)\delta A^b{}_\lambda(x). \qquad [26]$$

Así, con $M^{\lambda}_{b\,\mu\nu}\left(A_{,o}\right)$ acotado, [26] puede ser identificada con [25]. Con esto se tiene que $h_{\mu\nu}(x)$ y $\delta A^b{}_\lambda(x)$ son infinitesimales del mismo orden.

Por otro lado, tomando $G = U(1)\times\overset{N}{\ldots}\times U(1)$ en [9] da

$$F^{b\mu\lambda}{}_{;\mu} = \frac{k}{2}\left(T_M^{\alpha\beta} + T_F^{\alpha\beta}\right) M^{\lambda}_{b\,\alpha\beta}, \qquad [27]$$

y considerando solo contribuciones de primer orden en $h_{\mu\nu}$ y $\delta A^b{}_\lambda$, la componente temporal del miembro izquierdo de [27] es

$$F^{bi0}{}_{;i} = -F^{b}{}_{i0,i} = -\nabla^2 A_0^b. \qquad [28]$$

El tensor momento-energía asociado a la curvatura de Yang-Mills ($T_F^{\alpha\beta}$) es una contribución de orden cuadrático en $\delta A^b{}_\lambda$, por lo cual el miembro derecho de [27] es

$$\frac{k}{2}\left(T_M^{\alpha\beta} + T_F^{\alpha\beta}\right) M^{0}_{b\,\alpha\beta} = \frac{k}{2} M^{0}_{b\,00}\left(A_0\right) T_M^{00}. \qquad [29]$$

Reuniendo [28] y [29] en [27] obtenemos las N ecuaciones siguientes

$$\nabla^2 A_0^b = \alpha^b T_M^{00}, \qquad [30]$$

con $\alpha^b = -\frac{k}{2} M^{0}_{b\,00}(A_0) T_M^{oo}$. La expresión [30] es la ecuación de Laplace para el límite Newtoniano de las ecuaciones de tipo Yang-Mills.

Conclusión

En este trabajo inicial hemos presentada para reescribir la teoría de la gravitación de Einstein de una forma lo más similar posible a una teoría de tipo Yang-Mills a nivel clásico. Esto se ha hecho pensando en una formulación lagrangiana invariante de calibre cuyas ecuaciones dinámicas correspondientes contienen a las de Einstein, consistentemente con el límite Newtoniano.

Se estudió la solución de vacío no trivial abeliano en el contexto de la simetría esférica estacionaria a partir de un ansatz electrostático, mostrándose que existe un caso particular proporcional al cuadripotencial tipo Maxwell de Möller. Sería interesante abordar soluciones no abelianas, muy posiblemente considerando algún ansatz de tipo Bartnik-McKinnon [37] para la simetría esférica estacionaria.

Un problema fundamental que podría ser tratado en un futuro, orientado hacia la cuestión de la cuantización es el relacionado con el análisis canónico de Dirac [38].

Agradecimientos

”El autor desea agradecer las observaciones oportunas de Luis Herrera y Pío J. Arias (Grupo de Fisica Teórica, Departamento de Física, Universidad Central de Venezuela).”

Referencias Bibliográficas

1.

WEYL H. ***Sitz D Preuss Akad D Wiss*** 465-470, 1918.

2. WEYL H. ***Ann der Phys*** 59: 101-133, 1919.
3. WEYL H. ***Phys Zeits*** 22: 473-485, 1921.
4. PAULI W. ***Phys Zeits*** 20: 457-467, 1919.
5. EDDINGTON A.S. ***"The Mathematical theory of Relativity"***, Cambridge, 1952.
6. LANCZOS C. ***Ann Math*** 39: 842-850, 1938.
7. LANCZOS C. ***Rev Mod Phys*** 21: 497, 1949.
8. LANCZOS C. ***Rev Mod Phys*** 29 :337-350, 1957.
9. FAIRCHILD Jr.E.E. ***Phys Rev*** D16: 2438-2447, 1977.
10. MIELKE E.W. ***Gen Rel Grav*** 13: 677-187, 1981.
11. BASKAL S., DERELI T. ***J Phys G.*** 19: 477-484, 1993.
12. STEPHENSON G. ***Il Nuovo Cim*** 9(2): 263-269,1958.
13. BOROWIEC A., FERRARIS M., FRANCAVIGLIA M., VOLOVICH I. ***Class Quant Grav*** 15: 43-55, 1998.
14. STELLE K.S. ***Phys Rev*** D16: 953-969, 1977.
15. YANG C.N. ***Phys Rev Lett*** 33: 445-447, 1974.
16. VON DER HEYDE P. ***Z Naturforsch*** 31ª: 1795-1726, 1976.
17. FAIRCHILD E.E. ***Phys Rev*** D14: 384-391, 1977.
18. ADAMOWICZ W. ***Gen Rel Grav*** 12 (9), 677-691, 1980.
19. SLAVNOV A.A. ***Theor Math Phys*** 10: 99-104, 1972.
20. T HOOFT G., VELTMAN M. ***Nucl Phys*** B44: 189-213, 1972.
21. YANG C.N. MILLS R. L. ***Phys Rev*** 96: 191-195, 1954.
22. UTIYAMA R. ***Phys Rev*** 101: 1597-1607, 1956.
23. GLASHOW S.L. ***Nucl Phys*** 22: 579-588, 1961.
24. SALAM A., WARD J.C. ***Phys Lett*** 13: 168-171, 1964.
25. WEINBERG S. ***Phys Rev Lett*** 18: 587-509, 1967.
26. WEINBERG S. ***Phys Rev Lett*** 19: 1264-1266, 1967.
27. KIBBLE T.W.B. ***J Math Phys*** 2: 212-220, 1961.
28. CARMELI M. ***Lett Nuovo Cim*** 4: 40-45, 1970.
29. CARMELI M. ***J Math Phys*** 11: 2728-2732, 1970.
30. KIJOWSKI J. ***"On a purely affine formulation of General Relativity"***, Springer Lectures notes in Math., 836: 88-100, 1980.
31. ASHTEKAR A. ***Phys Rev Lett*** 57 (18): 2244-2247, 1986.
32. TER-KAZARIAN G.T. ***Nuovo Cim*** 112B: 825-837, 1997.
33. DESER S., TSAO H.S., VAN NIEUWENHUIZEN P. ***Phys Rev*** D10: 3337, 1974.
34. GAMBINI R., TRÍAS A. ***Phys Rev*** D27: 2935-2939, 1983.
35. MÖLLER C. ***Ann Phys*** 4: 347-371, 1958.
36. MÖLLER C. ***"The Theory of Relativity"***, Oxford Univ. Press, 1969.
37. BARTNIK R., McKINNON J. ***Phys Rev Lett*** 61(2): 141-144, 1988.
38. DIRAC P.A.M. ***"Lectures on Quantum Mechanics"***, Yeshiva Univ. New York (USA), 1964.