

Anillos y módulos con conjunto anulador cero

Alirio J. Peña P.

*Laboratorio de Álgebra Teórica y Computacional (LATyC),
Departamento de Matemática y Computación, Universidad del Zulia,
Facultad Experimental de Ciencias, Apartado Postal 526.
Maracaibo 4001, Venezuela. E-mail: apena@luz.ve*

Recibido: 09-02-99 Aceptado: 06-10-00

Resumen

En este artículo se prueba que los anillos y módulos con conjunto anulador cero son, respectivamente, los anillos primos y módulos primos fieles. Se estudia el caso en que el anillo R está fuertemente acotado a izquierda y se muestran algunas relaciones entre el retículo completo $B(R)$ formado por los funtores núcleo acotados sobre la categoría de R -módulos a izquierda y la clase de libre torsión formada por los módulos primos y fieles junto con el módulo cero. Se exhiben los átomos del retículo $B(R)$ para el caso general y los coátomos para el caso en que cada ideal no nulo de R contiene un ideal primo minimal no nulo. Además, se ofrecen dos descripciones para el funtor núcleo idempotente correspondiente a esta clase de módulos para el caso general y para el caso en que R es primo y noetheriano a izquierda.

Palabras clave: Anillo fuertemente acotado a izquierda; conjunto anulador; funtor núcleo simétrico; módulo fuertemente primo; módulo primo y fiel.

Rings and modules with zero annihilating set

Abstract

In this paper it is proved that the rings and modules with zero annihilating set are, respectively, the prime rings and faithful prime modules. It is studied the case when the ring R is left strongly bounded and we show some relations between the complete lattice $B(R)$ formed by the bounded kernel functors over the category of left R -modules and the torsion-free class formed by the faithful prime modules together with the zero module. The atoms of the lattice $B(R)$ are exhibit in the general case and the coatoms for the case in that each nonzero ideal of R contain a nonzero minimal prime ideal. Furthermore we show two description for the kernel functor corresponding to this class of modules for the general case and for the case in that R is prime and left noetherian.

Key words: Annihilating set; faithful prime module; left strongly bounded ring; strongly prime module; symmetric kernel functor.

Introducción

La noción de conjunto anulador $A(M)$ para un R -módulo a izquierda M , y la de conjunto anulador $A(\mathcal{F})$ para un filtro $\mathcal{F}$ de ideales a izquierda de un anillo asociativo R con

elemento identidad, fueron introducidas en Peña (1), de la siguiente manera:

$A(M) := \{a \in R : aRx = (0),$
para algún $0 \neq x \in M\}$ y

$A(\) := \{ a \in R : RaR \not\subseteq \ }.$

Notar que $A(0) = \emptyset$ y los conjuntos $A(M)$ y $A(\)$ son ideales del monoide multiplicativo de R , los cuales no necesitan ser cerrados bajo la suma. Así, estos conjuntos motivan naturalmente la noción de parte absorbente de R , como sigue: diremos que un subconjunto A de R es una *parte absorbente de R* si y sólo si $R \cap Ra \subseteq A$, para cada $a \in A$. Algunas de las propiedades básicas de los conjuntos anuladores para módulos y filtros, y de las partes absorbentes de un anillo se muestran en Peña (1). En particular, se prueba que si M es un R -módulo a izquierda y $\mathcal{F}$ es el filtro de Gabriel asociado a M , entonces $A(M) = A(E(M)) = A(\mathcal{F}) = \{ a \in R : \text{Hom}_R(R/RaR, E(M)) \neq (0) \}$, donde R/RaR es considerado como un R -módulo a izquierda y $E(M)$ denota la cápsula inyectiva de M .

Sea M un R -módulo a izquierda. Es natural plantearnos las siguientes cuestiones: ¿cuándo $A(M)$ es un ideal (bilátero) de R ? Y, en particular, ¿cuándo $A(M) = (0)$? El primero de estos problemas fue estudiado recientemente en Dauns (2), quien prueba que $A(M)$ es un ideal de R si y sólo si la familia de ideales (biláteros, a izquierda o a derecha) de R contenidos en $A(M)$ tiene un único elemento maximal. Un caso particular de esta situación, cuándo $A(M)$ es un ideal de R , fue estudiado por Peña (1). El objetivo fundamental de este trabajo es presentar una respuesta a los siguientes:

- **Problema 1:** Caracterizar los anillos y módulos con conjunto anulador nulo.
- **Problema 2:** Describir el funtor núcleo idempotente correspondiente a la clase de libre torsión formada por los módulos primos y fieles junto con el módulo cero.

En la sección 1 se ofrece alguna terminología y resultados básicos. Además, se prueba que un módulo no nulo M es fuertemente primo en el sentido de Handelman-Lawrence (3) si y sólo si M es absolutamente libre de torsión en el sentido de Rubin (4)

(Proposición 1.1). En la sección 2 se prueba uno de los resultados principales de este trabajo (Teorema (2.1)), en el cual se muestran varias condiciones equivalentes a la condición $A(M) = (0)$, siendo M un R -módulo a izquierda no nulo arbitrario. En particular, se considera el caso $M = R$ (Corolario (2.1)). Asimismo, se ofrece una demostración elemental de una observación hecha por Handelman-Lawrence (3), la cual caracteriza los anillos R fuertemente primos a izquierda como aquellos sobre los cuales existe un R -módulo a izquierda fuertemente primo (Proposición (2.1)). En la sección 3 se estudia el Problema 1 sobre los anillos fuertemente acotados a izquierda (Proposición (3.2)) y se prueba que si R es un tal anillo, entonces R es primo si y sólo si R es fuertemente primo a izquierda (Corolario (3.1)). En la sección 4 se muestra que el conjunto $B(R)$ formado por los funtores núcleo acotados (no necesariamente idempotentes) sobre la categoría de R -módulos a izquierda es un subretículo completo de $K(R)$ (Proposición (4.1)), se muestran sus átomos para el caso general y sus coátomos para el caso en que cada ideal no nulo de R contiene un ideal primo minimal no nulo (Proposición 4.2). También se ofrecen algunos resultados básicos sobre la clausura de Gabriel de un filtro acotado para el caso en que el anillo R es noetheriano a izquierda. Estos resultados son aplicados en la sección 5 en el estudio del funtor núcleo idempotente $\mathcal{F}_0$ correspondiente a la clase de libre torsión formada por los módulos primos y fieles junto con el módulo cero (Problema 2). El estudio de esta última clase de módulos fue propuesto por Handelman-Lawrence (3) y en este trabajo se ofrecen dos descripciones para este funtor núcleo tanto para el caso general (Proposición 5.1) como para el caso en que R es primo y noetheriano a izquierda (Corolario 5.2).

1. Terminología y Resultados Básicos

En todo lo que sigue R denotará un anillo asociativo con elemento identidad $1 \neq 0$,

por un *ideal* de R entenderemos un ideal bilátero de R y denotaremos por $Id(R)$ la familia de ideales de R . Por un *módulo* entenderemos un R -módulo a izquierda unitario, $R\text{-Mod}$ denotará la categoría de módulos con objeto cero (0) y cuyos morfismos actuarán del lado derecho (y, por tanto, la composición de tales morfismos se escribirá de izquierda a derecha). Si N es un submódulo no nulo de un módulo M , diremos que N es un *submódulo esencial* de M (o que M es una *extensión esencial* de N) si y sólo si para cada $0 \neq x \in M$ se tiene que $N \cap Rx \neq (0)$. Denotaremos por e la familia formada por los ideales a izquierda esenciales de R . Usaremos los símbolos ${}_R M$ y $N \leq M$ para indicar que M es un módulo y N es un submódulo de M , respectivamente. Sean ${}_R M$, $N \leq M$ y $X \subseteq M$. Entonces, el conjunto $(N:X) := \{r \in R : rx \in N, \text{ para cada } x \in X\}$ es un ideal a izquierda de R . En particular, si $x \in M$, entonces $(0:x) := (0:\{x\})$ se llama el *anulador a izquierda* de x , y $(0:M) := ((0):M)$ es un ideal de M , llamado el *anulador* de M . Asimismo, diremos que M es *fiel* si y sólo si $(0:M) = (0)$. Denotaremos por $E(M)$ la cápsula inyectiva de M y siguiendo a Peña (1), llamaremos el *conjunto anulador para* M , el cual denotaremos por $A(M)$, al conjunto $A(M) := \{a \in R : aRx = (0), \text{ para algún } 0 \neq x \in M\}$.

Sea M un módulo no nulo. Siguiendo a Beachy (5), diremos que M es *primo* si y sólo si $(0:M) = (0:N)$, para cada submódulo no nulo N de M , o equivalentemente, si $(0:M) = A(M)$. Esto último fue observado por Dauns (2). Ahora, siguiendo a Handelman-Lawrence (3), llamaremos un *aislador* para un elemento no nulo x de M a todo subconjunto finito y no vacío $S(x)$ de R tal que el anulador a izquierda del conjunto $\{sx : s \in S(x)\}$ es el ideal nulo. Denotaremos por $Insul(M)$ el conjunto formado por todos los elementos de M que tienen aislador junto con el elemento cero de M . Además, diremos que M es *fuertemente primo* si y sólo si cada elemento no nulo de M tiene un aislador, i.e., si $M = Insul(M)$. La clase de módulos fuertemente primos es cerrada bajo submódulos no nulos, imágenes iso-

mórficas, productos directos, extensiones esenciales (y por tanto, también es cerrada bajo extensiones). Notar que si M es fuertemente primo, entonces $A(M) = (0)$. En efecto, si $a \in A(M)$, entonces existe un elemento $0 \neq x \in M$ tal que $aRx = (0)$. Ahora, por hipótesis, existen elementos $s_1, \dots, s_n \in R$ para los cuales $\bigcap_{i=1}^n (0:s_i x) = (0)$. De donde, como cada $as_i x = 0$, se tiene que $a = 0$. Finalmente, diremos que R es *primo* (*fuertemente primo a izquierda*) si y sólo si ${}_R R$ es un módulo primo (*fuertemente primo*).

Observación: En la literatura sobre teoría de módulos existe otra noción de módulo fuertemente primo, debida a Beachy (5), la cual no es equivalente a la dada por Handelman-Lawrence (4), a saber: un módulo no nulo M se dice *fuertemente primo* si y sólo si para cada submódulo no nulo N de M y cada $x \in M$, existen elementos $x_1, \dots, x_n \in N$ para los cuales $\bigcap_{i=1}^n (0:x_i) = (0:x)$, o equivalentemente, si existen homomorfismos de módulos no nulos $f_j: N \rightarrow E(M)$ para los cuales $\bigcap_{j=1}^n (x_j)f_j \neq x$ (Proposición 2.8 en Matlis

(6)). Es fácil ver que: (i) un módulo no nulo M es fuertemente primo en el sentido de Beachy si y sólo si M es isomorfo a un submódulo de un *módulo N -generado* (i.e., una imagen homomórfica de una suma directa de copias de N), para cada submódulo no nulo N de M (7); (ii) cada módulo fuertemente primo en el sentido de Handelman-Lawrence es fuertemente primo en el sentido de Beachy; (iii) cada módulo fuertemente primo, en ambos sentidos, es primo; (iv) cada módulo simple es fuertemente primo en el sentido de Beachy y así, un tal módulo fuertemente primo no necesita ser fiel. Para $M = R$, se tiene que las nociones de anillos fuertemente primos izquierda son equivalentes (Proposición V.4 en (3) y Proposición 1.3 en (5)). En lo sucesivo, el término fuertemente primo se referirá exclusivamente al dado por Handelman-Lawrence (3).

Un retículo completo L se dice *local* si y sólo si L contiene un único coátomo. Usaremos los símbolos $\wedge$ y $\vee$ respectivamente, para indicar las operaciones de ínfimo y supremo, en todos los retículos considerados y, en caso de ser necesario indicaremos el contexto al cual se hace referencia. Sea L un retículo completo con elemento mínimo 0 y elemento máximo 1 . Por un $\{0, 1\}$ -subsemirretículo completo de L entenderemos un subsemirretículo completo de L respecto de la operación $\wedge$ que contiene a 0 y 1 . Para una excelente referencia sobre teoría de retículos véase Birkhoff (8).

Asumiremos que el lector está familiarizado con la terminología y resultados básicos relacionados con los siguientes temas: teoría de anillos (9); teoría de funtores núcleo y sus filtros correspondientes (10-12); clases de torsión (hereditarias) y clases de libre torsión (10, 13-14), así como con las respectivas correspondencias biunívocas entre estos objetos y sus estructuras reticulares. Sin embargo, para facilidad del lector, a continuación se incluye alguna terminología y resultados básicos. Siguiendo a Goldman (10), un endofunctor covariante $f: R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ se dice un *functor núcleo* si y sólo si f satisface las siguientes condiciones: (i) $f(M) \subseteq M$, para cada módulo M ; (ii) si $f: N \rightarrow M$ es un morfismo en $R\text{-Mod}$, entonces $f(N) \subseteq f(M)$; (iii) si $N \leq M$, entonces $f(N) = N \cap f(M)$. Además, un functor núcleo f se dice *idempotente* si y sólo si $f(M/f(M)) = (0)$, para cada módulo M . Denotaremos por $K(R)$ el retículo completo formado por los funtores núcleo sobre $R\text{-Mod}$ con elemento mínimo 0 y elemento máximo 1 . Además, denotaremos por $I(R)$ el subretículo completo de $K(R)$ formado por los funtores núcleo idempotentes sobre $R\text{-Mod}$. Para cada módulo M , al functor núcleo $f_M(N) := \{ \text{Ker}(f) : f \in \text{Hom}_R(N, E(M)) \}$, para cada módulo N , se llama el *functor núcleo asociado con M* . Se tiene que $f_M = f_{E(M)}$ es un functor núcleo idempotente y cada functor núcleo idempotente es

de la forma f_E , para algún módulo inyectivo E (el cual no es único, pues $E = E \oplus E$). Recordar que si $f \in K(R)$, entonces $f(M) \subseteq M$ si y sólo si $f(M) \subseteq M$ para cada módulo M . Denotaremos por σ el filtro correspondiente al functor núcleo f . Además, siguiendo a Golan (12), denotaremos por $R\text{-fil}$ y $R\text{-gab}$ las familias de filtros y de filtros de Gabriel, respectivamente, de ideales a izquierda de R .

Veamos que la noción de módulo fuertemente primo coincide con la de *módulo absolutamente libre de torsión*, en el sentido de Rubin (4), i.e., un módulo libre de f -torsión, para cada functor núcleo propio f (véase también Viola-Prioli (17)).

Proposición 1.1

Un módulo no nulo M es fuertemente primo si y sólo si M es absolutamente libre de torsión.

Prueba. Supongamos que M es fuertemente primo y sea $f \in K(R) \setminus \{0\}$ tal que $f(M) \neq (0)$ y sea $0 \neq rx \in f(M)$. Entonces, existirían elementos $s_1, \dots, s_n \in R$ para los cuales $\bigcap_{i=1}^n (0 : s_i rx) \neq (0)$. Pero entonces, como cada $s_i rx \in f(M)$, tendríamos que cada $(0 : s_i rx) \subseteq f(M)$ y así, $(0) \subseteq f(M)$, lo cual contradice el hecho que f es propio. Por tanto, $f(M) = (0)$. Recíprocamente, supongamos que M es absolutamente libre de torsión y veamos que si $0 \neq x \in M$, entonces x tiene un aislador. En efecto, sea H la familia de ideales a izquierda H de R para los cuales existen elementos $s_1, \dots, s_n \in R$ tales que $\bigcap_{i=1}^n (0 : s_i rx) \subseteq H$. Entonces, es fácil ver que H es un filtro propio (pues $(0 : x) \subseteq H$ y $x \neq 0$). Luego, si f es el functor núcleo correspondiente a H , entonces $0 \neq x \in f(M)$ y así, por hipótesis, $f = 0$. De donde, $(0) = f(M)$ y existen elementos $s_1, \dots, s_n \in R$ para los cuales $\bigcap_{i=1}^n (0 : s_i rx) \neq (0)$. Por tanto, $\{s_1, \dots, s_n\}$ es un aislador para x .

2. Anillos y Módulos con Conjunto Anulador Nulo

Para cada filtro σ denotaremos por $Id(\sigma)$ la familia formado por los ideales de R que están en σ . Recordar que un filtro σ se dice *acotado* si y sólo si para cada $H \in \sigma$ existe un ideal $I \in Id(\sigma)$ tal que $I \subseteq H$. Así, si I es un ideal de R , entonces la familia $[I] := \{H \in R : I \subseteq H\}$ es un filtro acotado. Notar que $[R] = \{R\}$ es el filtro más pequeño y $[(0)]$ es el filtro más grande formado por todos los ideales a izquierda de R . Denotaremos por R -bound la familia de filtros acotados de ideales a izquierda de R . Ahora, un funtor núcleo σ se dice *acotado* si y sólo si su filtro correspondiente está acotado. Denotaremos por $B(R)$ el conjunto de funtores núcleo acotados.

Teorema 2.1

Sean M un módulo no nulo y σ_M el funtor núcleo asociado con M . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $A(M) = (0)$;
- (b) M es primo y fiel;
- (c) Cada submódulo no nulo de M es fiel;
- (d) M es libre de σ -torsión, para cada $\sigma \in B(R) \setminus \{\infty\}$;
- (e) $[B(R) \setminus \{\infty\}] \subseteq \sigma_M$ en $K(R)$;

Prueba. Es claro que (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) y (d) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f).

(a) $\Rightarrow$ (e): Supongamos que $A(M) = (0)$, y sean $\sigma \in B(R) \setminus \{\infty\}$ y $x \in (M)$. Entonces, existe un ideal $I \in \sigma$ tal que $I \subseteq (0 : x)$. De donde, al ser $I \subseteq (0)$ y $A(M) = (0)$, se sigue que $x = 0$. Así, $\sigma \in \sigma_M$ en $K(R)$.

(e) $\Rightarrow$ (a): Supongamos la condición (e). Si $0 \neq a \in A(M)$, entonces $RaR \in \sigma_a$. Ahora, sea σ_a el funtor núcleo asociado con el filtro acotado $[RaR]$. Entonces, $\sigma_a \in B(R) \setminus \{\infty\}$ y

así, se tendría que $RaR \in \sigma_a \subseteq [RaR] \subseteq \sigma_a$, lo cual es una contradicción.

Corolario 2.1

Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $A(R) = (0)$;
- (b) R es un anillo primo;
- (c) Cada ideal a izquierda no nulo de R es fiel;
- (d) ${}_R R$ es un módulo libre de σ -torsión, para cada $\sigma \in B(R) \setminus \{\infty\}$;
- (e) $[B(R) \setminus \{\infty\}] \subseteq \sigma_R$ en $K(R)$;
- (f) Existe un módulo no nulo M tal que $A(M) = (0)$.

Prueba. Por el Teorema 2.1, basta ver que (f) $\Leftrightarrow$ (a). Sean M un módulo no nulo tal que $A(M) = (0)$ y $a \in A(R)$. Entonces, existe un $0 \neq r \in R$ tal que $aRr = (0)$. Luego, como M es fiel, existe un $0 \neq x \in M$ tal que $rx = 0$ y así, $aRrx = (0)$. Por tanto, $a \in A(M) = (0)$.

Notar que la prueba anterior muestra que, en general, $A(R) \subseteq A(M)$ para cada módulo fiel M .

Proposición 2.1

R es un anillo fuertemente primo a izquierda si y sólo si existe un módulo fuertemente primo M .

Prueba. Supongamos que M es un módulo fuertemente primo. Entonces, $A(M) = (0)$ y así, por el Teorema 2.1, M es un módulo primo y fiel. Ahora, si $0 \neq r \in R$, entonces existe un elemento $m \in M$ tal que $rm = 0$. Luego, por hipótesis, existen $s_1, \dots, s_n \in R$ tales que $\bigcap_{i=1}^n (0 : s_i rx) = (0)$. De donde, se sigue que $\bigcap_{i=1}^n (0 : s_i r) = (0)$ y así, el conjunto $\{s_1, \dots, s_n\}$ es un aislador para x .

Observaciones: (a) Si M es un módulo fiel y fuertemente primo en el sentido de Beachy (5), entonces R es un anillo primo y

M es de σ -torsión, para cada funtor núcleo propio σ que satisface $\sigma(R) = (0)$. En efecto, si $0 \neq r \in (M)$, entonces existe un ideal a izquierda $H \subseteq \sigma$ tal que $Hr = (0)$. Luego, como M es fiel, existe un elemento $x \in M$ tal que $rx \neq 0$. De donde, $Hrx = (0)$ y así, se tiene que $0 \neq rx \in (M)$ y $(M) \neq (0)$. Ahora, si $0 \neq m \in M$, entonces existen elementos $x_1, \dots, x_n \in (M)$ para los cuales $\bigcap_{j=1}^n (0 : x_j) \subseteq (0 : m)$. Por tanto, como cada $(0 : x_j) \subseteq \sigma$, se tiene que $m \in (M)$ y así, M es de σ -torsión. Notar que el argumento anterior prueba que si σ es un funtor núcleo, entonces $\sigma(R) = (0)$ si y sólo si $(M) = (0)$ para cada módulo fiel M . El autor no conoce si la condición $(M) = (0)$ para cada módulo primo y fiel M implica que $\sigma(R) = (0)$.

(b) Si M es un módulo primo y σ es un funtor núcleo acotado, entonces es fácil ver que $M \subseteq T_\sigma$ ó $M \subseteq F_\sigma$ y así, M es σ -decisivo en el sentido de Peña (18).

(c) [(4, pp. 222)] Si R es un anillo fuertemente primo a izquierda, primitivo a izquierda y libre de Soc-torsión (donde $\text{Soc}(M)$ denota el sócalo de M), entonces existe un módulo no nulo M tal que $A(M) = (0)$ y M no es fuertemente primo. Así, en tal caso, M es un módulo primo (y fiel) que no es fuertemente primo.

3. Anillos Fuertemente Acotados a Izquierda

En esta sección se estudia el caso en que el anillo R es fuertemente acotado a izquierda, i.e., si cada ideal a izquierda no nulo de R contiene un ideal no nulo de R (pp. 219 en Faith (19)). Veremos que en presencia de esta condición, las nociones de anillo primo y anillo fuertemente primo a izquierda (derecha) son equivalentes (Corolario 3.1). Además, veremos que la propiedad de ser local para el retículo $R\text{-fil}$ surge naturalmente en este contexto (Proposición 3.2). Para cada elemento $a \in R$, denotaremos por $[a] := [RaR]$.

Lema 3.1

Sea R un anillo fuertemente acotado a izquierda tal que $R\text{-fil}$ es un retículo local con coátomo σ . Entonces, $\sigma = [0] \setminus \{(0)\}$.

Prueba. Es claro que $(0) \in \sigma$. Ahora, si $(0) \notin H \subseteq R$, entonces, por hipótesis, existe un ideal no nulo I de R tal que $I \subseteq H$. Luego, como $[I]$ es un filtro propio y todo filtro propio está contenido en un coátomo de $R\text{-fil}$ (Corolario (2.11) en Golan (12)), se tiene que $[I] \subseteq \sigma$. Por tanto, $I \subseteq \sigma$ y así, $H \subseteq \sigma$.

Proposición 3.1

Supongamos que $R\text{-fil}$ es un retículo local con coátomo σ . Entonces, las siguientes afirmaciones son válidas:

- (a) $A(\sigma) = (0)$.
- (b) $R = gab$ si y sólo si R es fuertemente primo a izquierda.
- (c) Si $R = gab$, entonces $\sigma = \tau_R = e$.

Prueba. Sea $a \in A(\sigma)$. Entonces, por definición, $RaR \subseteq \sigma$. Ahora, si fuese $a \neq 0$, tendríamos que $[a] \subseteq [0]$ y así, por hipótesis, $[a] \subseteq \sigma$, lo cual es una contradicción. De donde, $A(\sigma) = (0)$ y así, vale (a). Ahora, supongamos que $R = gab$ y sean σ el funtor núcleo (idempotente) correspondiente al filtro e e $I = (R)$. Entonces, como σ es propio, se tiene que $I \not\subseteq \sigma$. Por otro lado, si $I \subseteq \sigma$, tendríamos que $I \subseteq \sigma$ y así, $(R/I) = R/I$. Luego, como σ es idempotente, también tendríamos que $(R/I) = (0)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $(R) = (0)$ y así, por la Proposición 1.1, R es fuertemente primo a izquierda. Es claro que si R es fuertemente primo a izquierda, entonces $\sigma = \tau_R$ es un filtro de Gabriel. Finalmente, como en la prueba de la Proposición 12 en Da Rocha-Viola-Prioli (20), se tiene que $\sigma = \tau_R = Z$, siendo Z el funtor núcleo correspondiente al filtro e de ideales a izquierda esenciales de R .

La partes (b) y (c) del resultado anterior generalizan la Proposición 12 en Da Rocha-Viola-Prioli (20), la cual aparece enunciada bajo la hipótesis de que el retículo $R\text{-fil}$ está linealmente ordenado. Sin embargo, la prueba que presentamos es esencialmente la misma que aparece en (20).

Proposición 3.2

Sean M un módulo no nulo, τ_M el funtor núcleo asociado con M y consideremos las siguientes condiciones:

- (a) $\tau = [0] \setminus \{(0)\}$.
- (b) $R\text{-fil}$ es un retículo local con coátomo τ .
- (c) $A(M) = (0)$.

Entonces, (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c). Además, si R es un anillo fuertemente acotado a izquierda, entonces (c) $\Leftrightarrow$ (a).

Prueba. La implicación (a) $\Rightarrow$ (b) es inmediata, mientras que (b) $\Rightarrow$ (c) se sigue de la Proposición 3.1 junto con el hecho de que $A(M) = A(\tau)(1)$. Ahora, supongamos que R es un anillo fuertemente acotado a izquierda y que $A(M) = (0)$. Si $H = [0] \setminus \{(0)\}$ tal que $H = \tau$, entonces, por hipótesis, existe un ideal no nulo I de R tal que $I \leq H$. Luego, si $0 \neq a \in I$, tendríamos que $RaR = \tau$ y así, $a \in A(\tau) = A(M) = (0)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, vale (a).

Corolario 3.1

Supongamos que R es fuertemente acotado a izquierda y sea τ_R el funtor núcleo asociado con R . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\tau = [0] \setminus \{(0)\}$;
- (b) $R\text{-fil}$ es un retículo local con coátomo τ ;
- (c) R es un anillo primo;
- (d) R es un anillo fuertemente primo a izquierda.

Corolario 3.2

Si R es un anillo conmutativo, entonces R es un dominio si y sólo si $R\text{-fil}$ es un retículo local cuyo coátomo τ es un filtro multiplicativamente cerrado. Además, en tal caso,

$$= \tau_R$$

Corolario 3.3

Si R es un anillo fuertemente acotado a izquierda y M es un módulo no nulo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) M es fuertemente primo;
- (b) M es fuertemente primo en el sentido de Beachy y fiel;
- (c) M es primo y fiel.

Prueba. Basta ver que (b) $\Leftrightarrow$ (a). Supongamos (b). Por el Teorema 2.1, sabemos que $A(M) = (0)$. Ahora, sean $K(R) \setminus \{0\}$ tal que $(M) = (0)$ y $0 \neq x \in (M)$. Entonces, existiría un $(0) \neq H = \tau$ tal que $Hx = (0)$. Luego, por hipótesis, existiría también un ideal no nulo I de R contenido en H . De donde, $I = (0 : Rx) = A(M) = (0)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $(M) = (0)$, para cada $K(R) \setminus \{0\}$ y por la Proposición 1.1, vale (a).

4. El Retículo Completo $B(R)$

En esta sección se prueba que el conjunto $B(R)$ de funtores núcleo acotados es un subretículo completo de $K(R)$ y se exhiben sus átomos. Además, si R tiene suficientes ideales minimales no nulos, entonces los coátomos de $B(R)$ también son exhibidos. Para cada ideal a izquierda H de R , denotaremos por $\tilde{H} := (H : R)$. Es bien conocido que $\tilde{H}$ es el ideal de R más grande que está contenido en H , llamado el *corazón de H* .

Lema 4.1

Si τ es un filtro, entonces τ está acotado si y sólo si para cada $H = \tau$ se tiene que $\tilde{H} \in \tau$.

Prueba. La condición de suficiencia es clara. Ahora, supongamos que σ es un filtro acotado y sea $H \in \sigma$. Entonces, existe un ideal $I = Id(\sigma)$ tal que $I \subseteq H$. De donde, $I \subseteq \tilde{H}$ y así, $H \in \sigma$.

Proposición 4.1

$B(R)$ es un subretículo completo de $K(R)$.

Prueba. Sean $\sigma = \bigcap_{j=1}^n B(R)$, $\sigma_j = U \cap K(R)$ y $H \in \sigma$. Entonces, por el Ejemplo (2.1) en Golan (12), existen $I_j \subseteq U$, $I_j = Id(\sigma_j)$ y $r_j \in R$ ($1 \leq j \leq n$) para los cuales $\bigcap_{j=1}^n (I_j : r_j) \subseteq H$. De donde, si $I = \bigcap_{j=1}^n I_j$, tenemos que $I = Id(\sigma)$ tal que $I \subseteq H$ y así, $\sigma \in B(R)$. Por otro lado, si $\sigma = U \cap K(R)$, entonces por el Lema 4.1, se sigue que $\sigma \in B(R)$.

Por la Proposición 4.1, el conjunto $R\text{-bound}$ es un subretículo completo de $R\text{-fil}$. Veamos la forma de los átomos de $R\text{-bound}$. Sea σ un filtro acotado tal que $\sigma \in [R]$. Entonces, existe un ideal $I = Id(\sigma)$ tal que $I \subseteq R$. Luego, existe un ideal primo maximal P de R tal que $I \subseteq P$ y así, $[R] \subseteq [P]$. Recíprocamente, si P es un ideal primo maximal de R , entonces es fácil ver que el filtro $[P]$ es un átomo de $R\text{-bound}$. Por otro lado, si R tiene suficientes ideales primos minimales no nulos (i.e., cada ideal no nulo de R contiene un ideal primo minimal no nulo), entonces los coátomos de $R\text{-bound}$ son los filtros de la forma $[Q]$ donde Q es un ideal primo minimal no nulo de R . En resumen, tenemos la

Proposición 4.2

Los átomos del retículo $B(R)$ corresponden a los filtros de la forma $[P]$ donde P es un ideal primo maximal de R . Además, si R tiene suficientes ideales primos minimales no nulos, entonces los coátomos de $B(R)$ corresponden a los filtros de la forma $[Q]$ donde Q es un ideal primo minimal no nulo de R .

Recordar que un funtor núcleo se dice *simétrico* si y sólo si es idempotente y acotado (15).

Análogamente se definen los *filtros simétricos*. Denotaremos por $Symm(R)$ el conjunto de funtores núcleo simétricos. Es bien conocido que el conjunto $Symm(R)$ es un subretículo completo de $K(R)$ (Proposición 4.1). Notar también que, por el Corolario 2.1 y la Proposición 4.1, R es un anillo primo si y sólo si $B(R)$ es un retículo local con coátomo $[B(R) \setminus \{0\}]$.

Para cada $R\text{-fil}$, denotaremos por $\bar{\sigma}$ la clausura de Gabriel de σ . Veamos que si R es noetheriano a izquierda, entonces el conjunto $R\text{-bound}$ de filtros acotados es cerrada bajo el operador clausura de Gabriel.

Proposición 4.3

Supongamos que R es noetheriano a izquierda y sea σ un filtro acotado. Entonces, $\bar{\sigma}$ es un filtro simétrico.

Prueba. Sea $\sigma = \{H \subseteq R : I_1, \dots, I_n = Id(\sigma), I_j \subseteq H\}$. Entonces, es fácil ver que σ es un filtro acotado que contiene a R . Además, como σ es multiplicativamente cerrado y R es noetheriano a izquierda, entonces por la Proposición 3 en (15), tenemos que $\sigma = R\text{-gab}$ y así, $\bar{\sigma} \in R\text{-gab}$. Ahora, si $\sigma = R\text{-gab}$ tal que $\sigma \in [R]$, entonces $Id(\sigma) \subseteq R$ y así, como todo filtro de Gabriel es cerrado bajo la multiplicación usual de ideales a izquierda, se sigue que $\bar{\sigma} \in [R]$. Por tanto, $\bar{\sigma} \in B(R)$.

Sean U un subconjunto no vacío de $K(R)$ y M un módulo. Entonces, diremos que M es *absolutamente libre de U -torsión* (abreviado, $U\text{-ATF}$) si y sólo si M es libre de U -torsión para cada $U \subseteq U \setminus \{0\}$. Por la Proposición 1.1, un módulo no nulo M es fuertemente primo si y sólo si M es $K(R)\text{-ATF}$ si y sólo si M es $I(R)\text{-ATF}$. Además, por el Teorema 2.1, un módulo no nulo M es $B(R)\text{-ATF}$ si y sólo si M es primo y fiel. Ahora, denotaremos por $U^\vee$ el $\{0\}$ -subretículo completo de $K(R)$ generado por U , i.e., los elementos de $U^\vee$ son los supremos en $K(R)$ de subconjuntos de U , junto con 0 . Entonces, M es $U\text{-ATF}$ si y sólo si M es $U^\vee\text{-ATF}$. Así, en el estudio de la noción de li-

bre torsión relativa a un subconjunto no vacío U de $K(R)$ podemos suponer que U es un $\{\quad\}$ -subsemiretículo completo de $K(R)$.

Corolario 4.1

Sean R un anillo noetheriano a izquierda, I un ideal de R y M un módulo. Entonces, $\overline{[I]} = \{H \subseteq R : I^n \subseteq H \text{ para algún } n \geq 1\} = \bigcup_{n \geq 1} [I^n]$. Además, M es $B(R)$ -ATF si y sólo si M es $\text{Symm}(R)$ -ATF.

Para cada funtor núcleo α , denotaremos por T_α la clase de módulos de α -torsión y por F_α la clase de módulos libres de α -torsión. Ahora, si U es un $\{\quad\}$ -subsemiretículo completo de $K(R)$, denotaremos por $\text{ATF}(U)$ la clase de módulos U -ATF. Es claro que $\text{ATF}(U)$ es una clase de módulos cerrada bajo submódulos, imágenes isomórficas, productos directos y extensiones esenciales. De donde, existe un único funtor núcleo idempotente α_U tal que $\text{ATF}(U) = F_{\alpha_U}$. Llamaremos a α_U el funtor núcleo asociado a U . Veamos que $\alpha_U = \overline{[U \setminus \{\quad\}]}$ en $I(R)$. En efecto, si $U \setminus \{\quad\}$ y $M \in F_{\alpha_U}$, entonces, por definición de α_U , se tiene que $M \cap F_\alpha = F_\alpha$ y así, $\overline{M \cap F_\alpha} = \overline{F_\alpha}$ en $K(R)$. De donde, $\overline{[U \setminus \{\quad\}]} \subseteq \overline{M \cap F_\alpha}$ en $I(R)$. Por otro lado, si $M \in K(R)$ para cada $U \setminus \{\quad\}$, entonces es claro que $M \cap \text{ATF}(U) = F_{\alpha_U}$ y así, $\overline{M \cap \text{ATF}(U)} = \overline{F_{\alpha_U}}$ en $I(R)$. Por tanto, se tiene la siguiente

Proposición 4.4

Sean U un $\{\quad\}$ -subsemiretículo completo de $K(R)$ y α_U el funtor núcleo asociado a U . Entonces, α_U es la clausura de Gabriel del funtor núcleo $\overline{[U \setminus \{\quad\}]}$.

5. El Funtor Núcleo α_0

En esta última sección se estudia la clase de libre torsión formada por todos los módulos primos y fieles junto con el módulo cero (pp. 222 en Handelman-Lawrence (3)). Es bien conocido que si R es un anillo primo y noetheriano a izquierda, entonces el funtor núcleo idempotente α_0 correspondiente a esta clase de módulos es propio y simétrico (Proposiciones 4.1 y 4.3). En van Oystaeyen

(16), el funtor núcleo α_0 es denotado por α^* . En esta sección se ofrecen dos descripciones para α_0 y para su filtro correspondiente (Proposición 5.1 y Corolario 5.2).

Sea $F_0 := \{R \text{M} : A(M) \neq (0)\}$. Entonces, por el Teorema 2.1, se tiene que $F_0 = \text{ATF}(B(R))$ y así, existe un único funtor núcleo idempotente α_0 tal que $F_0 = F_{\alpha_0}$. Denotaremos por α_0 el filtro de Gabriel correspondiente a α_0 . Veamos algunas propiedades básicas de α_0 .

Proposición 5.1

Las siguientes afirmaciones son válidas:

- (a) R es un anillo primo si y sólo si $\alpha_0 \neq 0$.
- (b) $\alpha_0 = \overline{B(R) \setminus \{\quad\}}$ en $I(R)$.
- (c) R es un anillo simple si y sólo si $\alpha_0 = 0$.
- (d) $A(\alpha_0) = (0)$.

Prueba. La parte (a) se sigue del Corolario 2.1, mientras que (b) se sigue de la Proposición 4.4. Finalmente, (c) es una consecuencia de (b) y la parte (d) es inmediata.

Corolario 5.1

Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) R es un anillo primo;
- (b) $\alpha_0(R) \neq (0)$;
- (c) $\alpha_0 \neq R$ en $I(R)$.

Prueba. Se sigue del Corolario 2.1 y las Proposiciones 4.1 y 5.1.

Corolario 5.2

Si R es un anillo primo y noetheriano a izquierda, las siguientes afirmaciones son válidas:

- (a) $\alpha_0 = \overline{[\text{Symm}(R) \setminus \{\quad\}]}$ en $I(R)$ y α_0 es el único coátomo de $\text{Symm}(R)$.
- (b) $\alpha_0 = \overline{\{[a] : 0 \neq a \in R\}}$ en $R\text{-gab}$.
- (c) $\alpha_0 = \{H \subseteq R : A(R/H) \neq (0)\}$.

Prueba. Las dos primeras afirmaciones se siguen de la parte (a) de las Proposiciones 4.3 y 5.1; mientras que la última afirmación se sigue de la parte (c) del Corolario en 4.1.

Problema: ¿Cuándo $0 =_R$? Además, si R es un anillo primo, describir los filtros con conjunto anulador nulo.

Problema: Sean M un módulo y $0 \neq x \in M$. Entonces, si x tiene un aislador, ¿es Rx un módulo fuertemente primo?

Observaciones: (a) Para cada módulo M , denotemos por $CK\text{-dim}(M)$ la dimensión de Krull clásica de M (21, 22). Ahora, por la Proposición (15.1) en (24), se tiene la siguiente identidad: $CK\text{-dim}(M) = CK\text{-dim}(R)$ para cada módulo M primo y fiel.

(b) Sean τ un funtor núcleo idempotente y M un módulo. Siguiendo a Goldman (10), denotaremos por $Q_\tau(M)$ el *módulo de cocientes de M relativo a τ* . $Q_\tau(M)$ es el único (salvo isomorfismo) módulo τ -inyectivo y libre de τ -torsión. Para más detalles sobre las definiciones anteriores, la construcción de $Q_\tau(M)$ y las propiedades functoriales de la asignación $Q_\tau : M \mapsto Q_\tau(M)$ (10, 13-16). En particular, $Q_\tau(R)$ tiene una estructura natural de anillo, que extiende la de R , y se llama el *anillo de cocientes de R relativo a τ* . Además, diremos que τ *tiene la propiedad (T)* si y sólo si el funtor localización Q_τ es exacto a derecha y conmuta con sumas directas arbitrarias, o equivalentemente, si $Q_\tau(M) \cong Q_\tau(R) \otimes_R M$ para cada módulo M . Ahora, siguiendo a Murdoch y van Oystaeyen (15), $Q_{\alpha_0}(R)$ se llama el *anillo de funciones* de la variedad afín $\text{Spec}(R)$ (junto con la topología de Zariski) y si R es un anillo primo y noetheriano a izquierda tal que 0 tiene la propiedad (T), entonces $Q_{\alpha_0}(R)$ es un anillo simple generalizando la construcción del cuerpo de funciones de una variedad afín sobre un anillo conmutativo.

Agradecimiento

Este artículo fue parcialmente financiado por la División de Investigación de la Facultad Experimental de Ciencias de la Universidad del Zulia, Venezuela, a través del Proyecto de Investigación PNC-001-95.

Referencias Bibliográficas

1. PEÑA A. *Divulgaciones Matemáticas* 2(1):11-35, 1994.
2. DAUNS J. *Comm Algebra* 25(8):2409-2435, 1997.
3. HANDELMAN D., LAWRENCE J. *Trans Amer Math Soc* 211:209-223, 1975.
4. RUBIN R.A. *Pacific J Math* 46 (2): 503-514, 1973.
5. BEACHY J. *Lecture Notes in Mathematics* 545:2-31, 1976.
6. MATLIS E. *Pacific J Math* 8:511-528, 1958.
7. WISBAUER R. *Comm Algebra* 11 (20):2249-2265, 1983.
8. BIRKHOFF G. *Lattice theory*, Colloquium Publ. 25, 2nd edition, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1948.
9. ANDERSON F., FULLER K. *Rings and categories of modules*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, New York (USA), Vol. 13.
10. GOLDMAN O. *J Algebra* 13:10-40, 1969.
11. GABRIEL P. *Bull Soc Math France* 90:323-448, 1962.
12. GOLAN J. *Linear topologies on a ring: an overview*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 159, Longman Scientific & Technical, Harlow (UK), 1987.
13. GOLAN J. *Torsion theory*, Longman Scientific & Technical, Harlow (UK), 1986.
14. STRENTROM B. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, New York (USA), Vol. 237, 1971.

-
15. MURDOCH D., OYSTAEYEN F. *J Algebra* 35:500-515, 1975.
 16. OYSTAEYEN F. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, New York (USA), Vol. 444, 1975.
 17. VIOLA-PRIOLI J. *Pacific J Math* 56 (1):275-283, 1975.
 18. PEÑA A. Relative decisiveness and cocriticality in modules, en preparación, 2000.
 19. FAITH C. *Algebra II: ring theory*, Springer Verlag, New York (USA), 1976.
 20. DA ROCHA A., VIOLA-PRIOLI J. *Pacific J Math* 132 (1):21-34, 1988.
 21. GORDON R., ROBSON J.C. *Krull dimension*, Amer. Math. Soc. Memoir 113, Providence, R.I., 1973.
 22. GOLAN J. *Decomposition and dimension in module categories*, Marcel Dekker, New York (USA), 1977.