CIENCIA 8(2), 188-190, 2000
Maracaibo, Venezuela

Números de Stirling y acción de grupos

José H. Nieto

Departamento de Matemática y Computación, Facultad de Ciencias,
La Universidad del Zulia, Apartado 526. Maracaibo, Venezuela. E-mail: jhnieto@luz.ve

Recibido: 28-10-98. Aceptado: 08-05-2000

Resumen

Los números de Stirling sin signo de primera clase $\left[{n \atop k}\right]$ y de segunda clase $\left\{{n \atop k}\right\}$ suelen definirse mediante las identidades:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k}\right] x^k \quad \text{y} \quad x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}$$

donde $x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$ denota el factorial inferior de x. Pero también es posible definirlos de manera combinatoria y demostrar luego ambas identidades polinómicas por inducción. En esta nota mostramos deducciones puramente combinatorias de ambas identidades y de algunas otras propiedades de los números de Stirling, utilizando como método el estudio de las coloraciones del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ y la acción del grupo simétrico S_n sobre ellas.

Palabras clave: Acción de grupos; coloraciones; combinatoria; números de Stirling, particiones; permutaciones.

Stirling numbers and group actions

Abstract

The unsigned Stirling numbers of the first kind $\left[{n \atop k}\right]$ and of the second kind $\left\{{n \atop k}\right\}$ are usually defined by means of the identities:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k}\right] x^k \quad \text{y} \quad x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}$$

where $x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$ denotes the lower factorial of x. But it is also possible to define them combinatorially, proving afterwards both identities by induction. In this note we show purely combinatorial deductions of both polynomial identities and some other properties of Stirling numbers, using as method the study of the colorations of the set $\{1,2,\ldots,n\}$ and the action of the symmetric group S_n over them.

Key words: Colorations; combinatorics; group action; partitions; permutations; Stirling numbers.

Introducción

En primer lugar explicaremos la notación utilizada en el presente trabajo. El conjunto de los enteros no negativos lo denotaremos $\mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathbb{N}_n = \{i \in \mathbb{N}: 0 \le i < n\}$. Observemos que $\mathbb{N}_0 = \emptyset$ y $\mathbb{N}_n = \{0,\ldots,n-1\}$

para $n > 0$. Al número de elementos de un conjunto (finito) A lo denotaremos $|A|$. S_n denotará el *grupo simétrico* sobre $\mathbb{N}_n$, es decir el conjunto de todas las biyecciones de $\mathbb{N}_n$ en sí mismo (también llamadas *permutaciones*) con la composición como operación de grupo. Una *k-coloración* de $\mathbb{N}_n$ es simplemente una función $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_k$. Al conjunto de todas estas coloraciones lo denotaremos $X(n,k)$. Entonces $|X(n,k)|=k^n$. Usaremos la convención $0^0=1$, de modo que la igualdad anterior es válida incluso si n, k o ambos son nulos. Si x es un número real y $n \in \mathbb{N}$ entonces definimos el *factorial inferior* como:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\ldots(x-n+1)$$

y el *factorial superior* como:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\ldots(x+n-1)$$

Por convención $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$. Denotaremos mediante $\mathrm{Part}(n, k)$ el conjunto de todas las particiones de $\mathbb{N}_n$ con exactamente k bloques (disjuntos y no vacíos) y mediante $\mathrm{Perm}(n, k)$ el conjunto de todas las permutaciones de $\mathbb{N}_n$ que se descomponen en producto de exactamente k ciclos disjuntos. Definimos el *número de Stirling sin signo de primera clase* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ como $|\mathrm{Perm}(n, k)|$ (para otra definición combinatoria equivalente vea (1)) y el *número de Stirling de segunda clase* $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ como $|\mathrm{Part}(n, k)|$ (ver (2); para otro punto de vista ver (3)). Si un grupo G actúa sobre un conjunto A y $a \in A$, denotaremos la *órbita* de a mediante $\overline{a}$. El *estabilizador* de un elemento $a \in A$ es $G_a = \{g \in G : ga = a\}$, que es un subgrupo de G. Como es bien sabido el cardinal de una órbita $\overline{a}$ es igual al índice de G_a en G, en particular si G es finito entonces $|\overline{a}| = |G| / |G_a|$. El conjunto de todas las órbitas será denotado $\overline{A}$. El conjunto de puntos fijos en A de un elemento $g \in G$ lo denotaremos A_g. Más adelante usaremos el siguiente resultado (para una demostración vea (4):

Lema de Burnside

Si un grupo finito G actúa sobre un conjunto finito A entonces

$$\overline{A} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |A_g|.$$

2. Resultados

Un primer resultado sencillo sobre números de Stirling que puede obtenerse considerando las acciones naturales de S_n sobre $\mathrm{Part}(n,k)$ y $\mathrm{Perm}(n,k)$ es el siguiente:

Proposición 1

Si p es primo y $1 < k < p$ entonces $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}$ y $\begin{Bmatrix} p \\ k \end{Bmatrix}$ son divisibles entre p.

Demostración. Tomemos en S_p un ciclo de longitud p, por ejemplo el definido mediante $c(i) = i+1$ para $0 \le i < p-1$ y $c(p-1) = 0$. Sea C el subgrupo cíclico de S_p generado por c. Consideremos la acción de C sobre $\mathrm{Part}(p,k)$ definida así: si $g \in C$ y $P = \{B_1,\ldots,B_k\} \in \mathrm{Part}(p, k)$ entonces $g \cdot P = \{g(B_1),\ldots,g(B_k)\}$. Supongamos que $g \cdot P = P$ y sea $m=|B_1|$ el tamaño de uno de los bloques de P. El conjunto de todos los elementos de $\mathbb{N}_p$ pertenecientes a bloques de P de tamaño m debe ser claramente invariante bajo g. Pero si g es diferente de la identidad, entonces es un ciclo de longitud p, y no deja invariante a ningún subconjunto propio de $\mathbb{N}_p$. Por lo tanto todos los bloques de P deberían ser de tamaño m y entonces $km = p$, lo cual es absurdo ya que p es primo y $1 < k < p$. Concluimos que el estabilizador de cualquier $P \in \mathrm{Part}(p, k)$ se reduce a la identidad, y por lo tanto todas las órbitas tienen cardinal p.

La demostración para los números de Stirling de primera clase es análoga, considerando la acción de C sobre S_p definida por conjugación, es decir $g \cdot \sigma = g \sigma g^{-1}$.

Proposición 2

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \qquad [1]$$

Demostración. Supongamos que $x \in \mathbb{N}$. El miembro izquierdo de [1] es igual al número de coloraciones de $\mathbb{N}_n$ con x colores. Pero estas coloraciones se pueden clasificar según el número de colores efectivamente utilizados. Las que emplean exactamente k colores se pueden obtener particionando $\mathbb{N}_n$ en k clases y asignando un color diferente a cada clase, lo cual puede hacerse de $x^{\underline{k}}$ maneras. Sumando en k se obtiene que [1] se cumple para todo $x \in \mathbb{N}$ y por tanto, en virtud del teorema de identidad de polinomios, es una identidad polinomial.

Proposición 3

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^{k} \qquad [2]$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{N}$ y consideremos la acción del grupo S_n sobre las coloraciones $X(n,x)$ definida mediante $gf = f \circ g^{-1}$ para todo $g \in S_n$, $f \in X(n,x)$. Dos coloraciones son equivalentes si y sólo si cada color es utilizado el mismo número de veces en cada una de ellas. Por lo tanto las órbitas pueden ponerse en correspondencia con las combinaciones con repetición de x colores tomados de n en n, que son $\binom{x+n-1}{n}$. Por otra parte las coloraciones que quedan fijas bajo una permutación $g \in S_n$ son aquellas que asignan el mismo color a los elementos de cada ciclo de g. Si denotamos mediante $\lambda(g)$ el número de ciclos de g entonces estas coloraciones son $x^{\lambda(g)}$. Aplicando el Lema de Burnside resulta entonces que:

$$\binom{x+n-1}{n} = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} x^{\lambda(g)}$$

Pero para cada k desde 0 hasta n hay $\left[{n \atop k} \right]$ permutaciones $g \in S_n$ con $\lambda(g) = k$. Agrupando los términos correspondientes en la igualdad anterior y multiplicando ambos miembros por $n!$ obtenemos [2]. La demostración se completa como la anterior, aplicando el teorema de identidad de polinomios.

Proposición 4

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] x^{k}$$

Demostración. Basta substituir x por $-x$ en (2) y multiplicar ambos miembros por $(-1)^n$.

Referencias Bibliográficas

1. NIETO J.H. ***Divulgaciones Matemáticas*** 2:5-9, 1994.
2. GRAHAM R.L., KNUTH D.E., PATASHNICK O. ***Concrete Mathematics***, 2nd ed., Addison Wesley, 1995.
3. KNUTH D.E. ***The Art of Computer Programming***, Vol. I: Fundamental Algorithms, 2nd ed., Addison Wesley, 1973.
4. NIETO J.H. ***Teoría Combinatoria***, Ediluz, Maracaibo, 1996.