

# Análisis por métodos iterativos de imágenes estelares digitalizadas

Ingrid M. Inciarte V.\*<sup>1</sup> y Jurgen Stock<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia  
Maracaibo 4011, Venezuela

<sup>2</sup>Centro de Investigaciones de Astronomía (CIDA), Mérida, Venezuela

Recibido: 11-10-95 Aceptado: 19-07-96

## Resumen

Se estudia una nueva técnica para determinar las posiciones y formas de imágenes fotográficas digitalizadas de objetos estelares sobre una placa astrométrica. El método hace uso de la función de la tangente hiperbólica y el algoritmo es usado para determinar la posición del punto de la imagen que se considera su centro, iterando los parámetros que la definen. El método que se propone ofrece más flexibilidad que los métodos convencionales y se adapta mejor a las imágenes de estrellas brillantes.

**Palabras claves:** Astrometría; imágenes digitalizadas; reducción.

## Analysis by iteratives methods of digitized stellar images

### Abstract

A new technique to determinate the positions and shapes of digitized photographic images of stellar objects on an astrometric plate is studied. The method uses the hiperbolic tangent function, and the algorithm is used to determinate the position of the image center iterating the parameters that define it. The proposed method offers more flexibility than the conventional methods and it adapts well to the images of bright stars.

**Key words:** Astrometry; digitized images; reduction.

### Introducción

Para medir coordenadas rectangulares en placas astrométricas suelen utilizarse microdensitómetros rastreadores, los cuales usan un rayo analizador de diámetro pequeño que se hace mover en ambas coordenadas. A cada paso se mide la opacidad o densidad de la placa y se almacena en un arreglo bidimensional. Cada una de estas medidas se llama píxel. Si se grafican los valores de las densidades en función de  $x$  o  $y$  se obtienen perfiles de densidades para

cada imagen. Es importante determinar con gran exactitud los valores de  $x$  y  $y$  de los centros de las imágenes, razón por la cual se han desarrollado diferentes algoritmos que se basan en perfiles gaussianos bidimensionales (1, 2). Muchas veces los perfiles de las imágenes se desvían de una distribución gaussiana. Este es el caso típico de los objetos brillantes entre los que se encuentran las estrellas de referencia, objetos cuyas coordenadas  $x$  y  $y$  son imprescindibles para determinar las coordenadas es-

\* Autor para la correspondencia.

féricas  $\alpha$  y  $\delta$  de otras estrellas menos brillantes en la placa. Es deseable construir un modelo que se adapte mejor a estos perfiles y a la vez que determine las formas de las imágenes fotográficas con la intención de detectar e identificar defectos tales como elongación, imágenes dobles e imágenes de objetos no estelares.

### Material observacional

El método de la tangente hiperbólica se ha probado con una placa que fue expuesta tres veces con igual tiempo de exposición del mismo campo, produciendo tres imágenes por objeto, tomada con un telescopio refractor que tiene una distancia focal de 8,3 metros permitiendo una escala de placa de 24",525/mm. La placa que abarca 50x70 minutos de arco, fue rastreada con el microdensitómetro rastreador para placas, la PDS (Photographic Density Scanner) del Departamento de Astronomía de la Universidad de Yale.

Se seleccionaron 60 estrellas para probar el método obteniendo un total de 180 imágenes. Entre las imágenes seleccionadas para el estudio se escogieron aquellas con un gran rango de magnitudes que no presentaban defectos visibles, y a la vez imágenes deformadas, imágenes de estrellas dobles pero no completamente separadas y se incluyeron áreas que no presentaban imágenes. De todas las imágenes, se escogieron cinco como estrellas de control para chequear la estabilidad del microdensitómetro. Estas imágenes fueron rastreadas repetidamente durante el proceso de rastreo. El rayo analizador tiene un tamaño de 20x20 micrones y un paso de 10 micrones en ambas coordenadas. Estos 10 micrones equivalen a ocho unidades del láser del interferómetro de la PDS y cada unidad equivale a 1,26 micrones, lo que hace un total aproximado de 10 micrones. El tamaño de la ventana fue ajustado según la magnitud de la estrella, siendo de 80x80 píxeles para las más brillantes y 30x30 para las más

débiles. Se dieron coordenadas precisas a la PDS de manera que al rastrear las imágenes, quedaran centradas en sus respectivas ventanas. La placa se rastreó cuatro veces con una rotación aproximada de 90 grados luego de cada medición y se definieron como las placas 254491, 254492, 254493 y 254494 para las diferentes orientaciones. Se espera deducir información sobre la precisión del método a través de la intercomparación de las mediciones de los cuatro rastreos.

La PDS de la Universidad de Yale posee un interferómetro con láser que mide con gran exactitud las coordenadas de cada píxel. Estas coordenadas no se graban y por lo tanto no están disponibles para nosotros, por lo que se tiene que deducir las coordenadas de cada píxel por su número de fila y de columna dentro de la ventana de rastreo de cada objeto. Sin embargo, las coordenadas del interferómetro se conservan transitoriamente en la memoria de una computadora como para calcular para cada imagen las coordenadas de su centro y otros parámetros, utilizando un paquete de programas que se basa en la superposición de perfiles tipo gaussiano.

### Modelo de la tangente hiperbólica

El modelo desarrollado construye perfiles que pueden tener forma no-gaussiana con la ayuda de la función de la tangente hiperbólica. Estos perfiles ofrecen mayor flexibilidad cuando se intenta adaptar la función matemática más adecuada a los perfiles reales de las imágenes. El perfil deseado se obtiene por la diferencia entre dos funciones de la tangente hiperbólica y está representada por el área bajo la curva.

El ancho del perfil artificial que se está generando de esta diferencia, depende del desplazamiento entre las dos funciones. Si además, el argumento es multiplicado por un factor, puede variarse la inclinación de la curva del perfil. Inclusive, si se usan

diferentes inclinaciones para las dos funciones pueden generarse perfiles asimétricos. Sean  $c$  y  $p$  los parámetros que describen el ancho y la inclinación del perfil. Variando estos dos parámetros se obtiene una gran variedad de perfiles que van desde formas de perfiles gaussianos hasta perfiles completamente achatados.

Tanto en el caso de los perfiles gaussianos como en los de la tangente hiperbólica, debe considerarse el hecho de que las imágenes son bidimensionales y que además pueden presentar elongación en cualquier dirección. Tomando en cuenta estas ideas se tiene que el perfil ajustado puede ser descrito en la forma:

$$D(x,y) = D_0 + qa \left\{ \tanh \left[ p_x \left( \frac{u}{c_x} + 1 \right) - \tanh \left[ p_x \left( \frac{u}{c_x} - 1 \right) \right] \right\} \left\{ \tanh \left[ p_y \left( \frac{v}{c_y} + 1 \right) \right] - \tanh \left[ p_y \left( \frac{v}{c_y} - 1 \right) \right] \right\} \quad [1]$$

$$u = (x - x_0) \cos w + (y - y_0) \sin w \quad [2]$$

$$v = -(x - x_0) \sin w + (y - y_0) \cos w \quad [3]$$

$$q = \frac{1}{4 \tanh(p_x) \tanh(p_y)} \quad [4]$$

donde  $D(x,y)$  es el valor de la opacidad del pixel en la posición dada por las coordenadas  $x$  y  $y$ ,  $D_0$  es la densidad del fondo alrededor de la imagen,  $c_x$  y  $c_y$  son los parámetros que definen el ancho en dos direcciones perpendiculares entre sí,  $p_x$  y  $p_y$  son las inclinaciones en esas direcciones respectivamente,  $a$  es la amplitud del centro de la imagen,  $w$  es el ángulo en el que se orienta el eje mayor de las imágenes elongadas y al cual se refiere  $c_x$  y  $p_x$  y  $x_0$  y  $y_0$  son las coordenadas del centro de la imagen.

En el caso más general, estos nueve parámetros deben determinarse por el mé-

todo de los mínimos cuadrados. Solamente la amplitud  $a$  y el fondo  $D_0$  aparecen en forma lineal, mientras que los otros deben determinarse por iteraciones sucesivas, iniciando el proceso con valores aproximados.

### Linealización de las ecuaciones

Normalmente las imágenes cubren suficientes píxeles para aplicarse el método de los mínimos cuadrados para la iteración. En cualquier caso, la ecuación [1] se expresa en función de los valores iniciales de todos los parámetros desconocidos y de sus incrementos, transformándose ahora a una ecuación donde se han eliminado los términos no lineales y serán estos incrementos (ahora lineales) los que se determinarán por el método de los mínimos cuadrados. Una vez que se han sumado los incrementos a los respectivos valores iniciales, se repite el proceso hasta que los incrementos sean tan pequeños como se desea. La ecuación [1] se transforma a:

$$D = D(\bar{a}, \bar{D}_0, \bar{c}_x, \bar{c}_y, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{w}, \bar{x}_0, \bar{y}_0) + \frac{\partial D}{\partial c_x} \Delta c_x + \frac{\partial D}{\partial c_y} \Delta c_y + \frac{\partial D}{\partial p_x} \Delta p_x + \frac{\partial D}{\partial p_y} \Delta p_y + \frac{\partial D}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial D}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial D}{\partial y_0} \Delta y_0 \quad [5]$$

donde el primer término del miembro derecho y las derivadas parciales se calculan para los valores iniciales de los parámetros, o de los valores provenientes de la última iteración.

### Determinación de los parámetros de los perfiles

El número de iteraciones que se requiere para obtener los valores finales de los parámetros, depende de la precisión de los valores iniciales. Si los valores no son lo suficientemente precisos, el proceso podría no converger. Surge entonces la pregunta de

cuáles valores iniciales deben ser usados para cada imagen, para garantizar convergencia de la iteración y para reducir el número de iteraciones al mínimo.

### Densidad del fondo, $D_0$

Para analizar el perfil de una imagen es necesario eliminar la contribución del fondo luminoso del cielo, y otras contribuciones que se deben al proceso de revelado y al rastreo mismo.

Los cuatro bordes de las ventanas de rastreo contienen solamente mediciones del fondo del cielo, ya que las imágenes mismas no se extienden tan lejos de su centro. Para cada uno de los bordes de cada ventana se usan las densidades para cada píxel de dos filas o dos columnas (dependiendo de cual borde se está midiendo) y se promedian. Comparando las medidas para los cuatro bordes promediados se puede observar si uno de ellos está afectado por la presencia de alguna otra imagen cercana al borde de la ventana. Los bordes que no están afectados, se promedian para obtener un valor local final para el fondo que es restado de todos los píxeles de la ventana. Si dos de los bordes están afectados, entonces se procede a tomar un valor común como fondo que se obtiene de las medidas de rastreo de unas ventanas vacías.

### Coordenadas iniciales del centro de la imagen, $X_0$ y $Y_0$

Considérese que puede usarse las medidas de los píxeles de las ventanas como supuestos pesos. Una manera de obtener las coordenadas iniciales, es promediando estos "pesos" y obtener un "centro de gravedad" para usarlo como coordenadas iniciales aproximadas.

### Magnitud equivalente de cada imagen, $aa_0$

Los parámetros que describen el tamaño y la forma de la imagen, o sea,  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $P_x$ ,

y  $P_y$  dependen de la magnitud de los objetos. De esta manera, conociendo la magnitud o un equivalente de ella, se podrían pronosticar los mencionados parámetros y usar estos valores pronosticados como valores iniciales. La opacidad máxima que en todos los casos se debe encontrar cerca del centro de la imagen y que será fácil de buscar, no es un argumento adecuado para tal propósito por dos razones. En primer lugar es un valor muy "ruidoso" por las granulaciones del material fotográfico y, en segundo lugar, por llegar a un valor de saturación para objetos brillantes. Mas sirve una magnitud equivalente que se llamará  $aa_0$ . Esta magnitud equivalente  $aa_0$  se obtiene mediante la suma de todos los valores de los píxeles en un cuadrado de tamaño fijo, centrado en las coordenadas aproximadas de cada imagen.

### Amplitud, $a$

Generalmente las imágenes cubren muchos píxeles, inclusive las más débiles. La amplitud  $a$  entonces, puede determinarse como el valor promedio de los píxeles más cercanos al centro de la imagen.

### Valores iniciales para $C_x$ , $C_y$ , $P_x$ y $P_y$

Considerando la ecuación [1] unidimensionalmente se tiene que:

$$D(x) = \frac{a}{2 \tanh(p)} \left\{ \tanh \left[ p \left( \frac{x}{c} + 1 \right) \right] - \tanh \left[ p \left( \frac{x}{c} - 1 \right) \right] \right\} \quad [6]$$

expresión con la que se puede obtener perfiles que van a través del centro de la imagen para diferentes direcciones. Estos perfiles se determinan para seis ángulos distintos que van desde -60 hasta 90 grados a través de la imagen y un perfil promedio entre ellos.

Se ha escogido un número de cuatro imágenes de diferentes magnitudes  $aa_0$ .

para construir sus perfiles. Inicialmente no se conocen los parámetros  $c$  y  $p$  que mejor se ajustan a éstas. Estos parámetros se pueden determinar en forma semimanual, proporcionando valores iniciales, incrementos y el número de pasos a desarrollar. El programa desarrollado para esto, usa los parámetros y calcula la diferencia, pixel por pixel, entre los valores empíricos y calculados de la densidad a lo largo y ancho de todo el perfil. Luego, el mínimo de la suma de los cuadrados de las diferencias es un buen indicador del sentido en el que se debe cambiar los valores iniciales de  $c$  y  $p$  de manera que la suma sea lo más pequeña posible.

Con los valores finales hallados de  $c$  y  $p$  para las cuatro imágenes, se pueden construir los perfiles artificiales que se ajustan mejor a los reales promediados. En la Figura 1 se observa la superposición de estos perfiles para una estrella brillante y en las Figuras 2 y 3 la relación establecida de los parámetros  $c$  y  $p$  de las cuatro imágenes con los respectivos valores de  $aa\omega$ . De esta rela-

ción se tiene una forma de predecir los  $c$  y  $p$  (interpolando los valores de  $aa\omega$ ) para cualquier imagen, que servirán como valores iniciales  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $p_x$ , y  $p_y$ .

### Determinación de $C_x$ , $C_y$ , $P_x$ y $P_y$

El parámetro  $\omega$  que describe el ángulo de orientación de una imagen alargada es el más difícil de determinar, y es con frecuencia el causante del fallo de la convergencia. Este hecho es debido a que en una imagen con simetría radial o de una forma totalmente irregular este ángulo no tiene definición. Es por eso que es preferible considerar solamente los demás parámetros como incógnitas y efectuar el cálculo para varios valores diferentes pero cada vez fijos de  $\omega$ . Quedan entonces solamente los parámetros  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $p_x$ , y  $p_y$ , más las coordenadas centrales como incógnitas.

El proceso para determinar  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $p_x$ , y  $p_y$ , se lleva a cabo para un número de ángulos preestablecidos, para cada uno de

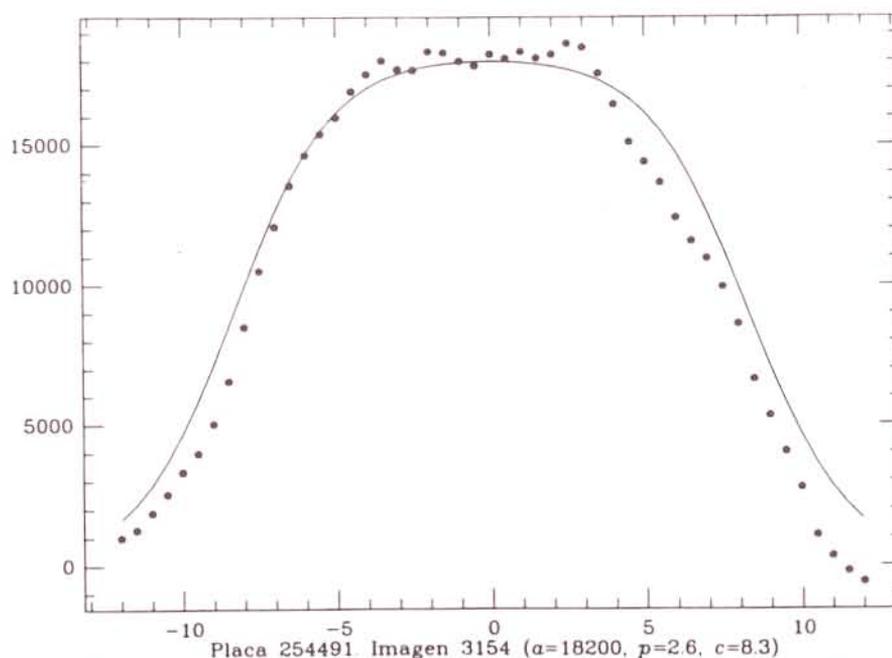


Figura 1: Perfil medido de una imagen estelar brillante (línea de puntos) y perfil teórico ajustado a ésta (línea continua).

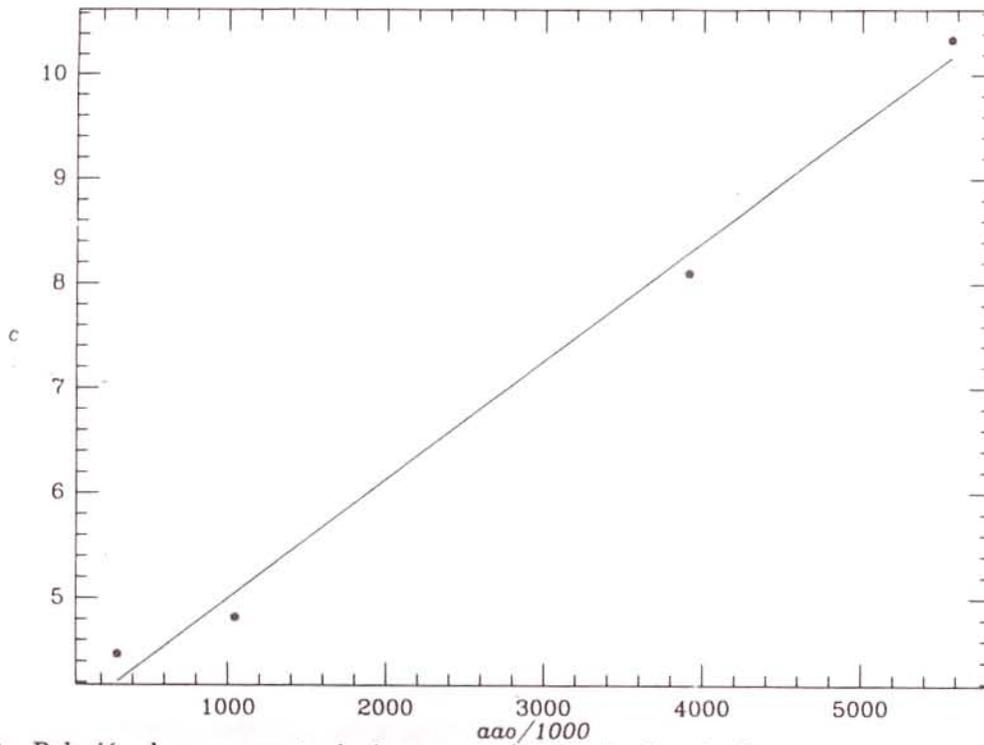


Figura 2: Relación de  $c$  para cuatro imágenes, con la magnitud equivalente  $aao$ .

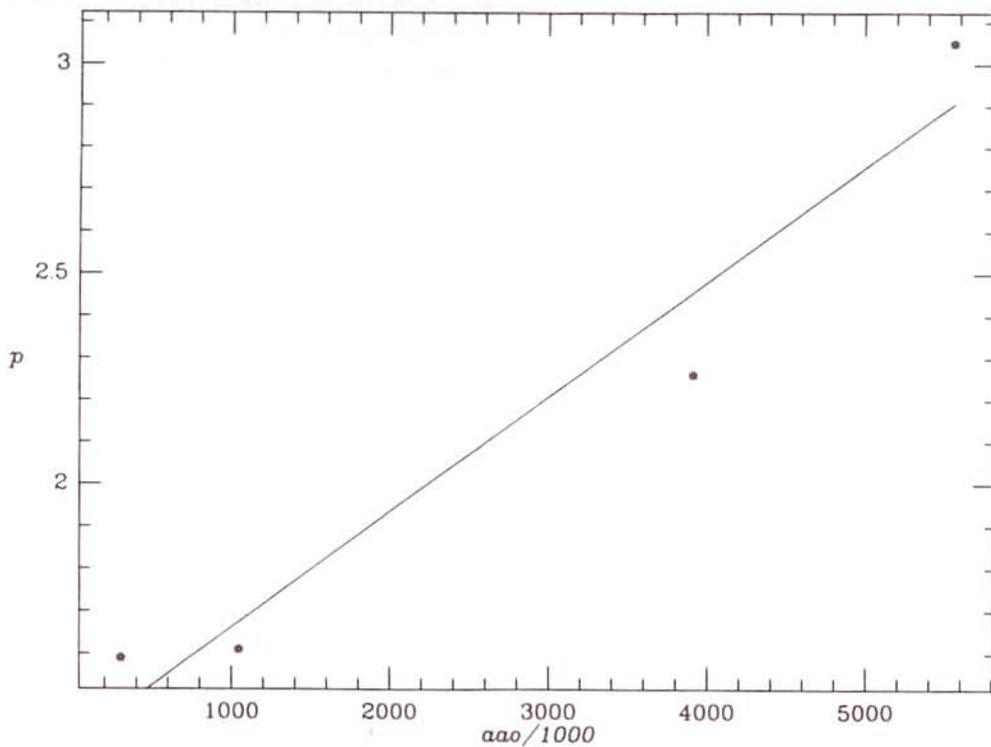


Figura 3: Relación de  $p$  para cuatro imágenes, con la magnitud equivalente  $aao$ .

los cuales se calcula la suma de los cuadrados de los residuos obteniendo así el ángulo para el cual la suma es mínima. Este es el ángulo en el que se define  $c_x$ . En las Figuras 4, 5, 6 y 7 se muestran las relaciones de  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $p_x$  y  $p_y$  con  $aa_0$ .

#### Una variante en la determinación del ángulo de orientación

En lo que respecta al ángulo de orientación de las ecuaciones [2] y [3],  $w$  es un parámetro que puede eliminarse de la lista de las incógnitas e iniciarse el proceso para tres ángulos distintos, para cada uno de los cuales se calcula la suma de los cuadrados de los residuos. Si se grafica esta suma en función de los ángulos, se tiene una forma de determinar hacia dónde se debe cambiar  $w$  de forma que se encuentre un valor menor de la mencionada suma. Una vez que el mínimo de la suma corresponda al punto central de los tres, se adapta una parábola a los tres puntos respectivos. Adaptada la parábola, se calcula su mínimo que repre-

senta el mínimo verdadero de la suma, que a su vez dará el ángulo de mayor elongación para la imagen.

#### Eliminación de incógnitas

Hasta este punto se tiene la forma de obtener los valores de todos los parámetros que describen la forma y tamaño de las imágenes. Sin embargo, imagen por imagen las incógnitas han sido  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $w$ , más las coordenadas  $x_0$  y  $y_0$ . Las Figuras 4, 5, 6 y 7 dan la relación de los parámetros de imagen con la magnitud  $aa_0$ . Se aprecia que aparte de los objetos débiles, que para este trabajo no interesan, la dispersión para  $c_x$  y  $c_y$  es baja y prácticamente sin significado. La dispersión para  $p_x$  y  $p_y$  es mayor. Sin embargo, estos parámetros influyen poco en la determinación de  $x_0$  y  $y_0$ , que después de todo son el producto más importante de todo el proceso. Eso quiere decir que los parámetros de imagen podrían simplemente ser calculados de los respectivos valores de  $aa_0$ , y así ser eliminados de la lista de incógnitas.

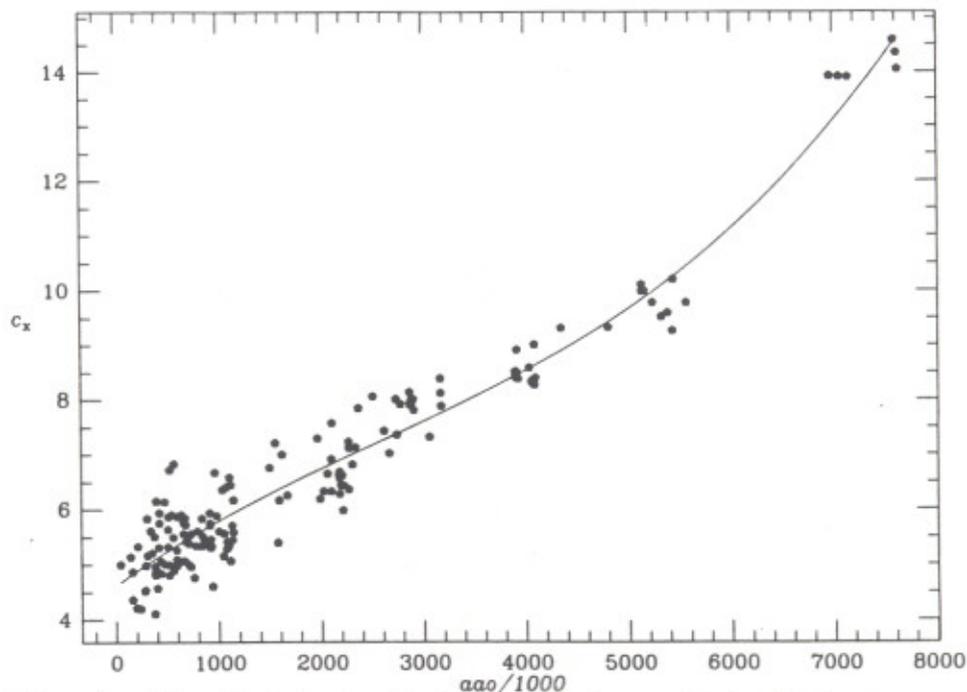


Figura 4: Polinomio cúbico adaptado a la relación de  $c_x$  con la magnitud equivalente  $aa_0$ .

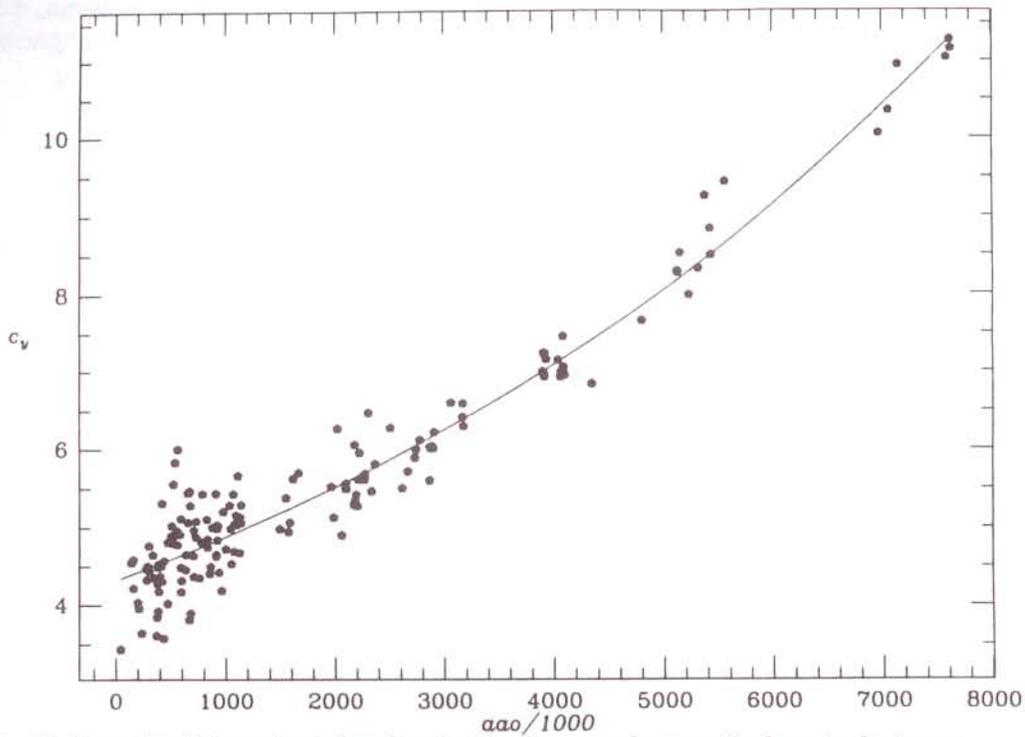


Figura 5: Polinomio cúbico adaptado a la relación de  $c_y$  con la magnitud equivalente  $a_{ao}$ .

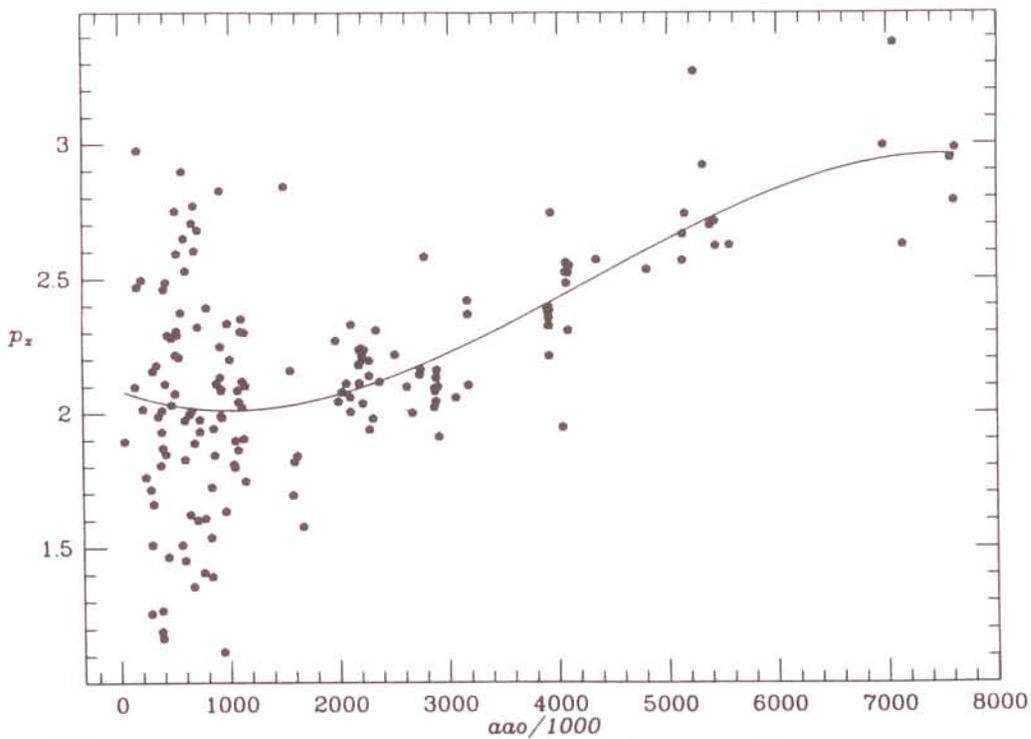


Figura 6: Polinomio cúbico adaptado a la relación de  $p_x$  con la magnitud equivalente  $a_{ao}$ .

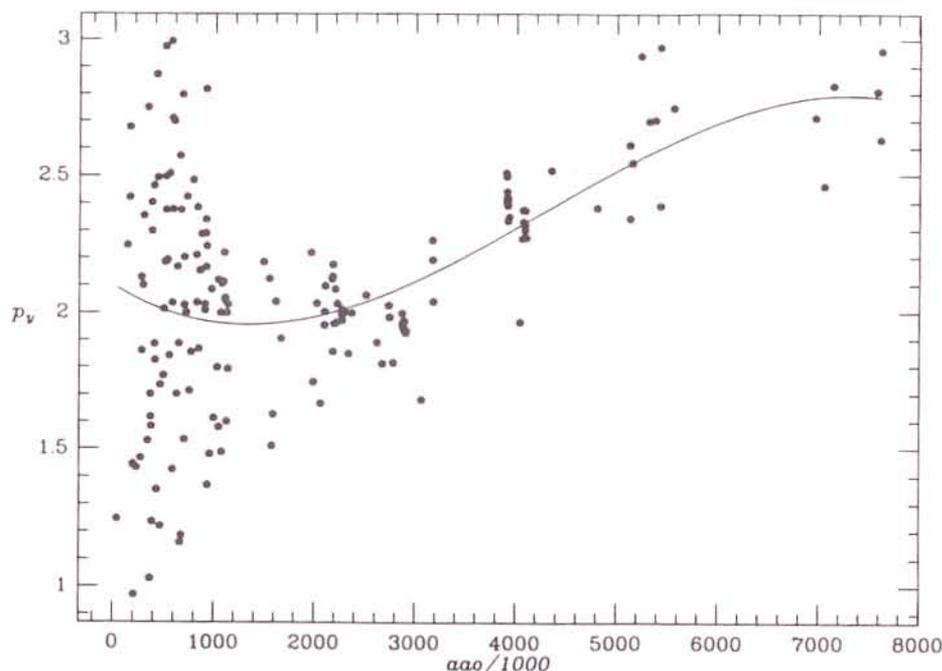


Figura 7: Polinomio cúbico adaptado a la relación de  $p_y$  con la magnitud equivalente  $aa_0$ .

En cuanto al ángulo  $\omega$ , éste resultó prácticamente igual para casi todas las imágenes tal que podría usarse su promedio y también quitarla de la lista de incógnitas. De esta manera nos quedamos con tan sólo dos incógnitas para la iteración ( $x_0$  y  $y_0$ ). Esto es muy beneficioso cuando las imágenes son tan pequeñas que cubren solamente unos pocos píxeles. Ese no es el caso en la muestra que tenemos, así que para cada imagen se ha utilizado  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $\omega$ ,  $x_0$  y  $y_0$  como incógnitas, calculando tan sólo los valores de  $p_x$  y  $p_y$  a partir de los respectivos valores de  $aa_0$ .

## Resultados y discusiones

### Interpretación de los parámetros de imagen

En algunos casos no se obtuvo convergencia para ningún ángulo. Al estudiarse visualmente estas imágenes y/o perfiles en diferentes ángulos se detectó que éstas eran ventanas vacías, imágenes deformadas o imágenes dobles. Otro caso común de no

convergencia se presenta cuando las imágenes están muy cerca del borde de la ventana. En estos casos no se tiene convergencia debido a que no se tienen lectura para algunos píxeles por encontrarse fuera de la ventana.

Se detectó que todas las imágenes están alargadas, la mayoría en el mismo sentido. La Figura 8 presenta la distribución de los ángulos de orientación del eje mayor de las imágenes. Considerando que para cada objeto hay tres imágenes provenientes de tres exposiciones distintas y que a la vez las exposiciones fueron cortas y el telescopio fue guiado durante las exposiciones, la elongación común a todas las imágenes parece indicar un defecto óptico del telescopio. Por otra parte, cuando una imagen acusa una elongación en una dirección distinta a las demás imágenes, se puede interpretar de la siguiente manera. Si las tres imágenes del mismo objeto tienen el mismo defecto, se trata de un objeto alargado. Si es una sola imagen que tiene el defecto, esta imagen está perturbada.

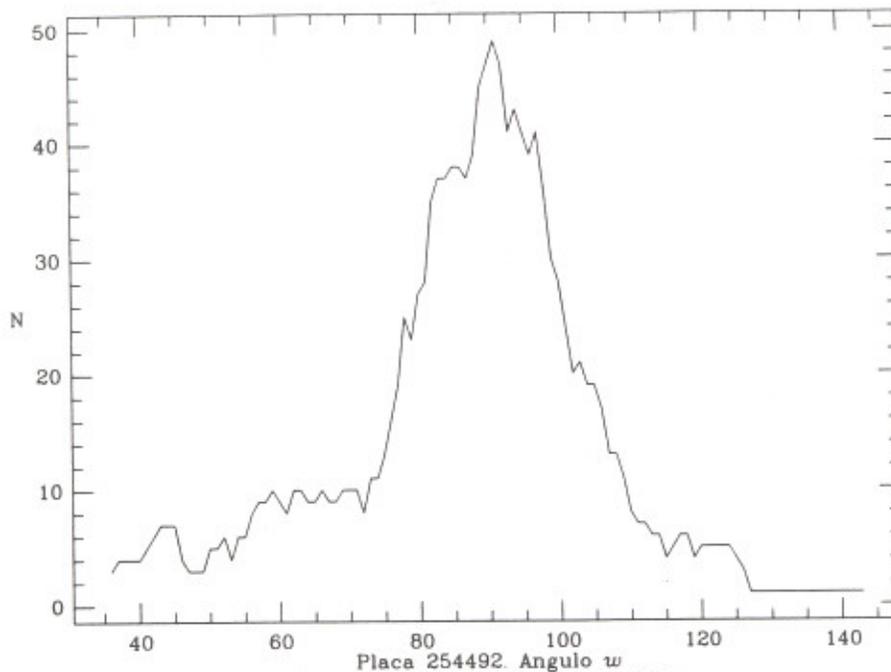


Figura 8: Distribución de ángulos de orientación en la placa 254492.

### Análisis de las coordenadas

De especial importancia es determinar el grado de exactitud con el que se obtienen las coordenadas de los centros de las imágenes.

Para cada ventana se conocen las coordenadas de la primera fila y primera columna de los píxeles (que están en unidades de láser). Se desarrolló un programa que determina la posición de la imagen en la ventana en términos de la fila y la columna (en píxeles) y fracciones de ellas. Si se multiplican estas últimas por el tamaño del paso de píxel a píxel, se convierten en coordenadas con las mismas unidades de aquellas de las del primer píxel y seguidamente pueden ser sumadas a éstas para referirlas a un origen común. De esta forma el programa provee las coordenadas finales ( $x_0$ ,  $y_0$ ) en micrones, para cada imagen. Por otro lado se debe recalcar que la PDS de la Universidad de Yale está equipada con un interferómetro con láser el cual lee la posición exacta de cada uno de los píxeles en la ventana con gran precisión. En este caso, la PDS da la

lectura de la densidad del píxel y las posiciones de éstos en ambas coordenadas, triplicando la cantidad de datos que deben ser grabados y manipulados, excediendo de esta forma el espacio de memoria de las máquinas de las que disponemos. Es éste el motivo por el que no se graban estas coordenadas, pero si son disponibles transitoriamente para el uso local. Por lo tanto se debe confiar en la precisión con la cual la PDS mantiene la posición de las filas y las columnas en las ventanas.

Afortunadamente se cuenta con las coordenadas finales para las imágenes, calculadas del mismo rastreo con la rutina desarrollada en el Observatorio de Yale y que usa perfiles gaussianos. Por supuesto, en estos cálculos se ha hecho uso de las posiciones del láser para cada píxel y no se basa en las posiciones de las filas y de las columnas en el arreglo de cada ventana.

Como la placa, las imágenes y el rastreador de placas son los mismos en cualquier orientación se debería esperar que una simple traslación y una rotación, reduz-

ca las coordenadas del  $i$ -ésimo rastreo a las coordenadas del  $j$ -ésimo rastreo de la siguiente forma:

$$x_j = x_0 + x_i \cos w + y_i \operatorname{sen} w \quad [7]$$

$$y_j = y_0 - x_i \operatorname{sen} w + y_i \cos w \quad [8]$$

Se comparan las coordenadas de cada imagen de la placa 254491, con las coordenadas derivadas de aplicar las ecuaciones [7] y [8] a partir de las posiciones de la placa 254492. De esta forma, y luego de comparar todas las coordenadas para todas las otras orientaciones, se obtienen los residuos en las direcciones de  $x$  y  $y$  para cada imagen.

El resultado de este proceso trajo residuos incompatibles con los procesos involucrados, además de un carácter evidentemente sistemático. Solamente a través de las coordenadas calculadas con la rutina de Yale, y basadas en las mediciones con láser, se pudo identificar el origen del problema. Se pudo demostrar que están involucrados

cuatro factores de escala que varían de placa en placa. Dos de ellos se refieren a las coordenadas el primer píxel de las ventanas (estas coordenadas cubren un rango de más de 100 mm) y las otras dos se refieren a las coordenadas dentro de las ventanas (que cubren un rango de hasta 1,6 mm). Todas estas coordenadas están definidas por un conteo de pasos y, al parecer, el largo de los pasos se redefine cada vez que se inicia un rastreo. Solamente después de haber aplicado estos factores, se pudo proceder a intercomparar las cuatro placas. Lógicamente lo mismo se puede hacer con las mediciones de Yale. Ya que en realidad todas las placas son una sola, y las imágenes siempre las mismas, después de reducir todos los datos a la misma orientación, los residuos reflejan la precisión de la máquina y la exactitud de los métodos de extracción de las coordenadas. Los residuos medios como función de la magnitud equivalente  $aa_0$  para los dos métodos se muestran en la Figura 9.

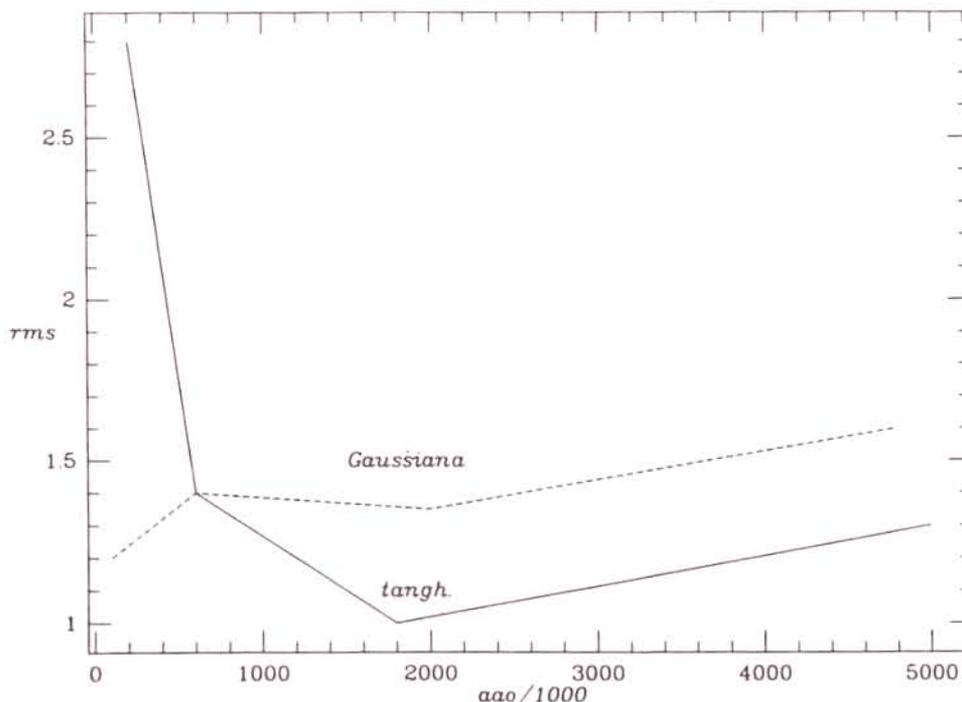


Figura 9: Residuos medios como función de la magnitud equivalente. Método de la tangente hiperbólica (línea continua) y método de la gaussiana (línea a trazos).

## Conclusiones

Se puede concluir del método de la tangente hiperbólica lo siguiente:

1.- El método es capaz de detectar en forma sensible la estructura de las imágenes. De esta manera, se detectó que en el caso particular de la placa analizada, todas las imágenes están alargadas, compartiendo el mismo tipo de elongación en la misma orientación.

2.- Los parámetros que describen el ancho de las imágenes, o sea,  $c_x$  y  $c_y$ , dependen sensiblemente de la magnitud equivalente  $aa_0$ . De esta manera, objetos cuyos valores de  $c_x$  y  $c_y$  se desvíen significativamente de la relación establecida entre estos parámetros por los demás objetos, tales como galaxias, nebulosas, etc. pueden ser separados fácilmente de los objetos de estructura puntual.

3.- Los residuos entre las posiciones obtenidas para las cuatro orientaciones de la placa se consideran indicativos de la precisión de todo el proceso de medición y de extracción de las coordenadas. En este sentido, el método de la tangente hiperbólica demostró que funcionaba muy bien para todas las imágenes, siendo más preciso que el método de Yale, en lo que se refiere a imágenes brillantes.

4.- Se analizó el margen dentro del que tienen que quedar los valores iniciales de los distintos parámetros a determinarse por un proceso de iteración para que se garantice

la convergencia. Resulta que aún las relaciones más provisorias entre estos parámetros y la magnitud equivalente  $aa_0$  perfectamente cumplen con este requisito. Sin embargo, mejores aproximaciones para los parámetros resultan en una convergencia más rápida.

5.- Se pudo demostrar la existencia de un mal funcionamiento del microdensitómetro de la Universidad de Yale que conduce a la necesidad de introducir para cada rastro de una placa cuatro factores distintos de escala cuando no se dispone de las mediciones que arroja el interferómetro láser.

## Agradecimiento

Uno de los autores (Ingrid Inciarte) quiere agradecer al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT) por el proyecto F-139 y a los profesores Jeanette Stock y Néstor Sánchez por la colaboración prestada en la revisión de este trabajo.

## Referencias Bibliográficas

1. VAN ALTENA W. F., AUER L.H.: *Image Processing Techniques in Astronomy*. Digital image centering I. (eds). C. de Jager and H. Nieuwenhuljzen. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht (Holland), 1975, pp. 411-419.
2. AUER L. H., VAN ALTENA W. F.: Digital image centering II. *The Astrophysical Journal* 83: 531-537, 1978.